

# 준비비와 재고비를 고려한 직렬 비연속 공정과 중간 저장조의 최적설계

## Optimal Design of Batch-Storage Serial Trains Considering Setup and Inventory Holding Cost

이 경 범  
(Gyeongbeom Yi)

**Abstract** : This article presents a new model which is called Periodic Square-Wave(PSW) to describe the material flow of the periodic processes involving intermediate buffer. The material flows incoming into and outgoing from the intermediate buffer are assumed to be periodic square shaped. PSW model gives the same result as that of Economic Production Quantity(EPQ) model for determining optimal lot size of single stage batch storage system. However, for batch storage serial train system, PSW model gives a different optimal solution of about 6 % reduced total cost. PSW model provides the more accurate information on inventory and production system than the classical approach by maintaining simplicity and increasing computational burden.

**Keywords** : optimal, serial, batch, storage, periodic

### I. 서론

EOQ(Economic Order Quantity) 모형은 1915년 F. W. Harris 에 의해 유도된 이래, 비현실적인 가정에도 불구하고, 간단하면서도 입력 비용자료의 조그만 변화에도 최적해 근처에서의 총비용이 비교적 덜 민감함으로 인해 경제적 생산량을 결정하는 방법으로 산업계에서 널리 사용되어 왔다[2]. EOQ 모형은 그 기본 가정의 일부를 완화하는 많은 변형을 개발함으로써 그 응용성이 확대되었다. 예를 들어, EPQ(Economic Production Quantity) 모형이라 불리는 저장조에 대한 입고 유속이 일정한 경우 (finite supply rate), 미납품주문(backlogging), 재고 부족에 의한 판매기회 유실(lost sales) 또는 가격 할인(quantity discount)이 있는 경우 등이 있다[2].

본 연구에서는 공정과 저장시설의 최적용량을 결정함에 있어서, 저자들에 의해 처음 소개된 사각파 모형이 EPQ 와 사각파 모형 둘 다 저장조에 들어오는 물질 흐름이 주기적인 사각 파형이라고 가정을 한다. 그러나, 저장소에서 출고되는 물질 흐름, 즉 고객 또는 하부 공정이 요구하는 물질흐름의 유형은 서로 다르다. EPQ 모형은 단순히 하부 공정의 흐름이 일정하다고 가정을 하지만 사각파 모형은 저장조에 들어오는 물질 흐름 뿐만 아니라 나가는 물질 흐름도 주기적인 사각 파형이라고 가정을 한다. 즉 고전적인 경제적 생산량을 결정하는데 필요한 일정주문 가정은 더 이상 필요가 없게 되었다[8]. 사각파 모형에 대한 보다 자세한 수리적 고찰은 [8]에 나타나 있다. 본 논문에서는 사각파 모형에 대한 간단한 소개와 함께 단 단계 공정-저장조계에 대해서는 EPQ 모형과 사각파 모형이 경제적 생산량을 유도함에 있어서 같은 결과를 제공할 것을 보여 줄 것이다. 나아가서 직렬 다단계 공정-저장조계에 대해서 EPQ 모형과 사각파 모형은 다른 결과를 제시함을 보이며, 그 분석결과를 소개하고자 한다.

### II. 사각파 모형

먼저 단일 제품, 단입단출형(Single Input/Single Output)

중간 저장조계를 고려하자. 기본 구성요소는 공급자에 해당하는 상부 공정과 중간 저장조, 그리고 고객에 해당하는 하부 공정이 있고 그들 간의 물질 흐름이 주기적인 사각 파형이라고 가정을 한다. 개념도와 변수에 대한 정의, 물질 흐름의 모양은 그림 1에 나타나 있다. 상부 흐름은 중간 저장조에 들어오는 물질 흐름을 나타내며 그 주문량( $B_1$ )과 주문 주기( $\omega_1$ )는 계산되어야 한다. 하부 흐름은 중간 저장조에서 나가는 물질 흐름을 나타내며 그 수요량( $B_2$ )과 수요 주기( $\omega_2$ ), 그리고 초기 지연시간 분율( $y_2$ )은 이미 알려져 있다. 본 연구에서는 몇 개의 특수 연산자가 필요하다. 실수  $z$  는 정수 부분과 양의 소수점 이하 부분으로 분리될 수 있다. 이 경우 정수 부분은  $int[z]$  로 표시되고 양의 소수 부분은  $res[z]$  로 표시된다.

본 연구를 진행하는데 필요한 기본 가정들은 일정수요 가정을 제외하고 한정된 공급 속도를 가지는 경제적 생산량 모형, 즉 EPQ 모형을 따른다[2]. 일정 수요 가정은 이제부터 주기적 사각 파형으로 완화된다. 사각 파가 아니더라도 임의의 주기적 수요함수는 사각 파의 합으로 근사할 수 있다[8].

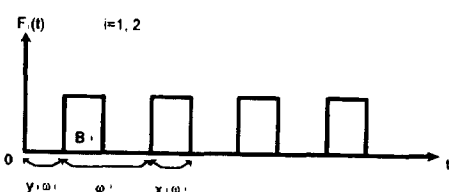
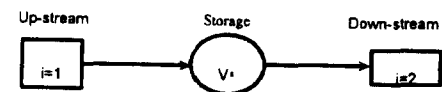


그림 1. 사각파 모형.

Fig. 1. Modelling of SISO buffer with periodic square wave flow.

저장조에 대한 물질 수지식은 다음과 같은 간단한 상미분

방정식으로 압축된다.

$$\frac{dV}{Dt} = F_1(t)u(t) - F_2(t - y_2 \omega_2)u(t - y_2 \omega_2) \quad (1)$$

(1) 을 적분하면,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t F_2(\tau) d\tau - \int_0^{t - y_2 \omega_2} F_2(\tau) d\tau \quad (2)$$

적분은 그림 2에서 나타난 것처럼 함수 F1(t) 과 F2(t) 의 유형을 고려하여 다음과 같이 유도될 수 있다. 먼저 F1(t) 의 적분을 고려하면, 주어진 시간 t 에 대해서 완결된 주문주기 횟수는  $int [t / \omega_1]$  이고 이에 해당하는 주문량은  $B_1 int \left[ \frac{t}{\omega_1} \right]$  이다. 한 주기보다 짧은 남은 시간  $res \left[ \frac{t}{\omega_1} \right]$  에 대해서는 두 가지 경우가 있다. 만약  $res \left[ \frac{t}{\omega_1} \right]$  이  $x_1$  보다 크면 다른 한 주기가  $B_1 int \left[ \frac{t}{\omega_1} \right]$  에 더해져야 한다. 만약  $res \left[ \frac{t}{\omega_1} \right]$  이  $x_1$  보다 작으면 그림 2에서 빗금 친 부분이  $\frac{B_1}{x_1} res \left[ \frac{t}{\omega_1} \right]$  에 더해져야 하는데 이 양은 이다. 이 두 경우는  $\min \{ \cdot \}$  함수를 이용하여 다음과 같이 합쳐질 수 있다.

$$\int_0^t F_1(\tau) d\tau = B_1 \left( int \left[ \frac{t}{\omega_1} \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_1} res \left[ \frac{t}{\omega_1} \right] \right\} \right) \quad (3)$$

(2)의 두 번째 적분 F2(t) 는 단지 첫째 적분의 시간 평행 이동에 불과하다.

적분을 통해 얻어진 재고 함수는 다음과 같다.

$$V(t) = V(0) + B_1 \left( int \left[ \frac{t}{\omega_1} - y_1 \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_1} res \left[ \frac{t}{\omega_1} - y_1 \right] \right\} \right) - B_2 \left( int \left[ \frac{t}{\omega_2} - y_2 \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_2} res \left[ \frac{t}{\omega_2} - y_2 \right] \right\} \right) \quad (4)$$

여기서 단 단계 공정-저장조계에서는  $y_1 = 0$  으로 두어도 무방하다. (4)이외에도 전체적인 물질 수지식으로부터 다음 관계식이 유도된다.

$$\frac{B_1}{\omega_1} = \frac{B_2}{\omega_2} \quad (5)$$

(4)는 다음과 같은 누적함수라 불리는 기본적 함수를 포함한다.

$$f(z) = int [z] + \min \left\{ 1, \frac{res [z]}{z_1} \right\} \quad (6)$$

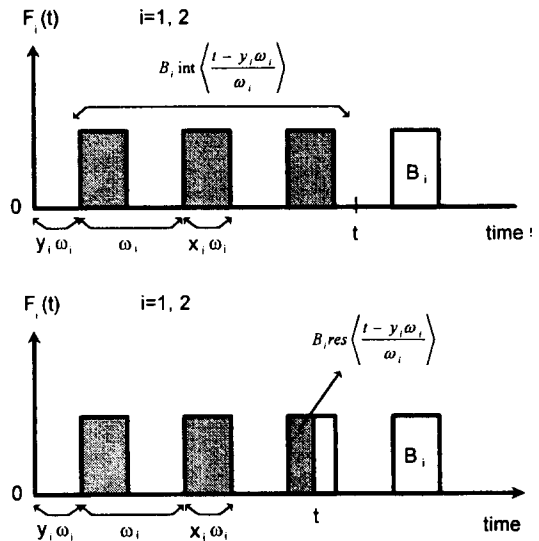


그림 2. 사각파 모형의 적분. Fig. 2. Integration of periodic square wave flow.

누적 함수는 다음과 같은 유용한 관계식을 가지고 있다.

$$z < f(z) < z + 1 - z_1 \quad (7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(z) dz = z + \frac{1 - z_1}{2} \quad (8)$$

이들 식들은 그림 3에서 볼 때 명확하다.

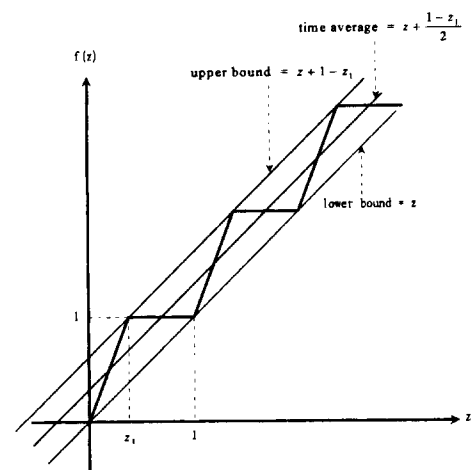


그림 3. 누적함수의 상한선, 하한선과 평균선. Fig. 3. Bounds on flow accumulation function.

재고 함수 V(t) 의 상한/하한선은 (5)와 (7)을 사용하여 계산된다.

$$V_{ub} = V(0) - B_1 (x_1 + y_1 - 1) + B_2 y_2 \quad (9)$$

$$V_{lb} = V(0) - B_1 y_1 + B_2 (x_2 + y_2 - 1) \quad (10)$$

평균 재고  $\bar{V}$  는 (5)와 (8)을 사용하여 계산되어 질 수 있다.

$$\bar{V} = V(0) + B_1 \left( \frac{1-x_1}{2} - y_1 \right) - B_2 \left( \frac{1-x_2}{2} - y_2 \right) \quad (11)$$

이상으로부터 연간 주문 비용과 재고 유지비의 합으로 구성된 연간 총비용은 다음과 같이 나타내어진다.

$$Total\ Cost = \frac{A}{\omega_1} + H \bar{V} \quad (12)$$

여기서 A 는 1 회 주문당 비용이고, H 는 단위물량당 단위시간당 재고유지비용이다. (12)는 (5)와 (11)을 사용하여 독립변수에 대하여 재구성될 수 있다.

$$Total\ Cost = \frac{A B_2}{\omega_2 B_1} + H \left( \frac{1-x_1}{2} \right) B_1 + constant \quad (13)$$

최적 주문량  $B_1^*$ 은  $B_1$ 에 대한 총비용의 미분을 0으로 함으로써 구해진다.

$$B_1^* = \sqrt{\frac{2A B_2}{(1-x_1) \omega_2 H}} \quad (14)$$

(14)는 고전적인 경제적 주문량 결정식인 EPQ 모형과 비교될 수 있다. 사각과 모형의 매개변수들은 EPQ 모형과 다음과 같은 관계식을 가지고 있다.

$$D = \frac{B_2}{\omega_2}, \quad x_1 = \frac{D}{p}, \quad B_1 = Q \quad (15)$$

(15)를 (14)에 적용함으로써 EPQ 모형에 의한 경제적 주문량과 같은 결과가 사각과 모형으로부터 얻어진다.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{\left(1 - \frac{D}{p}\right)}} \quad (16)$$

이러한 사실은 EPQ 모형이 일정 수요 뿐만 아니라 주기적 수요에 대해서도 적용된다는 사실을 나타낸다[8].

사각과 모형은 저장조 용량 제약에 대해서는 EPQ 모형과 다른 결과를 나타낸다. 저장조 용량 제약에 대한 충분조건은  $0 \leq V_b < V_{ub} \leq V_s$  이다. 이 조건들은 (9)와 (10)과 함께 주문량과 초기재고에 대한 제약식으로 전환된다.

$$B_1 \leq \frac{V_s - (V(0) + y_2 B_2)}{1 - x_1 - y_1} \quad (17)$$

$$V(0) \geq B_1 y_1 - B_2 (x_2 + y_2 - 1) \quad (18)$$

EPQ 모형에 의한 주문량 제약식은 다음 식에서 나타난 것처럼 사각과 모형과 다르다.

$$B_1 \leq \frac{V_s}{1 - x_1} \quad (19)$$

### III. 직렬 공정-저장조계의 최적용량 결정

그림 4에 나타난 것처럼 비연속 공정과 중간 저장조가 직렬로 연결된 생산선을 편의상 직렬 생산선이라 부른다. 직렬 생산선은 총 N+1 개의 비연속 공정과 이들을 연결하는 N 개의 중간 저장조로 구성되어 있고, 마지막 공정은 고객의 수요로서 알려진 값을 가진다. 우리는 상첨자 j 를 저장조에 대한 일련번호로 사용할 것이다. j 번째 저

장조와 그 상부 또는 하부 공정으로 구성된 j 번째 작업대는 단 단계의 그림 1과 동일하다. 이상과 같은 명명법에 의하면 j 번째 저장조의 하부공정 크기와 주기는 j+1 번째 저장조의 상부공정 크기와 주기와 일치한다.

$$\omega_1^{j+1} = \omega_2^j, \quad B_1^{j+1} = B_2^j \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (20)$$

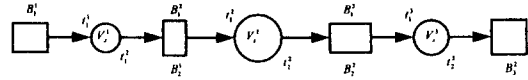


그림 4. 직렬 공정-저장조계의 개념도.

Fig. 4. Schematic diagram of serial batch-storage trains.

j 번째 저장조의 상부 공정의 준비비용은  $A^j$  이고, j 번째 저장조의 연간 재고 유지비용은  $H^j$  이다. 모든 입고/출고시간 분율  $x_i^j$  은 이미 알려진 것으로 가정한다. 마지막 제품에 대한 고객의 수요, 즉 N 번째 저장조의 하부 공정의 크기, 주기와 시간지연 분율들도 별다른 무리없이 모두 알려졌다고 가정한다. 따라서 직렬 생산선의 평균 생산속도도 알려진 값이다.

$$D = \frac{B_i^j}{\omega_i^j} \quad (i=1, 2, \quad j=1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

본 모형에서는 제 II 장과는 달리 저장조의 출고 시간지연 분율  $y_i^j$  대신에 다음과 같이 정의되는 시간지연  $t_i^j$  을 사용할 것이다.

$$t_i^j = y_i^j \omega_i^j \quad (22)$$

인접한 저장조간의 시간 지연은 독립적이지 않다. 즉 j 번째 저장조의 하부 공정은 j 번째 저장조로부터 원료를 받아서 일정시간 동안 처리를 하고 j+1 번째 저장조로 보낸다. 이러한 관계는 다음식으로 표현된다.

$$t_1^{j+1} = t_2^j + \omega_1^{j+1} (1 - x_1^{j+1}) \quad (23)$$

제 II 장의 단 단계에서 유도된 재고 함수 (4), 재고 상한선 (9), 재고 하한선 (10)과 평균 재고식 (11) 은 j 번째 작업대에 대해 각 변수에 상첨자 j 를 붙임으로써 여전히 유효하다. 본 장의 문제는 총비용을 최소화하는 N 개의 공정과 저장조의 크기 및 시간 지연을 계산하는 것으로 요약된다. 총비용은 각 작업대 당 준비비와 재고비의 합과 같다.

$$TC = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{A^j}{\omega_1^j} + H^j \bar{V}^j \right] \quad (24)$$

공정의 크기  $B_i^j$  (j=1, 2, ..., N) 와 시간 지연  $t_1^1, t_2^2$  (j=1, 2, ..., N-1) 가 효과적인 탐색 변수로 지정되었다. 주기는 (21) 에 의해 계산될 수 있다. 초기재고  $V^j(0)$  도 시간 지연을 대신하여 탐색 변수로 사용될 수 있으나 그 결과는 변함이 없다. (24)의 두 번째 항은 (11)과 (23) 으로부터 다음과 같이 전개된다.

$$\sum_{j=1}^N H^j \bar{V}^j = \frac{H^1 (1-x_1^1)}{2} B_1^1 - H^1 D t_1^1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{H^j (1-x_2^j) + H^{j+1} (1-x_1^{j+1})}{2} B_1^{j+1}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{N-1} D(H^{j+1} - H^j)t_2^j + \sum_{j=1}^N H^j V^j(0) \\
 & - \frac{H^N(1-x_2^N)}{2} B_2^N + H^N D t_2^N \quad (25)
 \end{aligned}$$

따라서 (24)의 총비용은 탐색 변수에 대해서 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 TC = & \sum_{j=1}^N \frac{DA^j}{B_1^j} + \frac{H^1(1-x_1^1)}{2} B_1^1 \\
 & - H^1 D t_1^1 \\
 & - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{H^j(1-x_2^j) + H^{j+1}(1-x_1^{j+1})}{2} B_1^{j+1} \\
 & - \sum_{j=1}^{N-1} D(H^{j+1} - H^j)t_2^j + \sum_{j=1}^N H^j V^j(0) \\
 & - \frac{H^N(1-x_2^N)}{2} B_2^N + H^N D t_2^N \quad (26)
 \end{aligned}$$

재고 함수  $V^j(t)$  저장조 용량에 의해 제약을 받는다. 저장조용량에 의한 제약의 충분조건은  $0 \leq V_{ub}^j < V_{ls}^j \leq V_s^j$  이다. 저장조의 크기  $V_s^j$  도 이 연구를 통해 결정되어야 할 변수이므로 제약식은  $0 \leq V_{lb}^j$  만 남는다.

$$\begin{aligned}
 & V^1(0) - (1-x_1^1)B_1^1 \\
 & - D t_1^1 + D t_2^1 \geq 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V^j(0) - (1-x_1^j)B_1^{j+1} \\
 & - (1-x_1^j)B_1^j - D t_2^{j-1} + D t_2^j \geq 0 \\
 & (j=2, 3, \dots, N-1) \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V^N(0) - (1-x_2^N)B_2^N - (1-x_1^N)B_1^N \\
 & - D t_2^{N-1} + D t_2^N \geq 0 \quad (29)
 \end{aligned}$$

이제 최적화 문제는 탐색 변수  $B_1^j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ),  $t_1^j, t_2^j$  ( $j=1, 2, \dots, N-1$ )에 대해 (27), (28)과 (29)에 해당하는 제약 조건하에 총비용 (26)을 최소화하는 것으로 정리된다. 목적 함수 (26)은 아래로 오목(convex)하다. 이것은 그 이차 편미분 행렬 Hessian 을 조사함으로써 알 수 있다. Hessian 은 주대각 원소가 모두 음수가 아닌 대칭 행렬이다. 따라서 Hessian 이 positive semidefinite 이므로 목적 함수는 아래로 오목하다. 제약식인 (27), (28)과 (29)는 탐색 변수에 대해 선형이고 따라서 위로 볼록하다. 참고문헌 [4]에 있는 Kuhn-Tucker 충분조건으로부터, 만약 Kuhn-Tucker 조건을 만족하는 해가 있으면 그것은 최적이며 전범위 최소값이다.

$\lambda^j$  을 (27), (28)과 (29)에 대한 Lagrange 승수라 할 때 Lagrangian 함수는,

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{j=1}^N \frac{DA^j}{B_1^j} + \frac{H^1(1-x_1^1)}{2} B_1^1 - H^1 D t_1^1 \\
 & - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{H^j(1-x_2^j) + H^{j+1}(1-x_1^{j+1})}{2} B_1^{j+1} \\
 & - \sum_{j=1}^{N-1} D(H^{j+1} - H^j)t_2^j + \text{constants}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \lambda^1 [V^1(0) - (1-x_1^1)B_1^1 - D t_1^1 + D t_2^1] \\
 & - \lambda^j [V^j(0) - (1-x_2^j)B_1^{j+1} \\
 & - (1-x_1^j)B_1^j - D t_2^{j-1} + D t_2^j] \\
 & - \lambda^N [V^N(0) - (1-x_2^N)B_2^N \\
 & - (1-x_1^N)B_1^N - D t_2^{N-1} + D t_2^N] \quad (30)
 \end{aligned}$$

Kuhn-Tucker 조건들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial B_1^1} = & - \frac{A^1 D}{(B_1^1)^2} \\
 & + \frac{H^1(1-x_1^1)}{2} = 0 \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial B_1^j} = & - \frac{A^j D}{(B_1^j)^2} \\
 & + \lambda^{j-1}(1-x_2^{j-1}) + \lambda^j(1-x_1^j) = 0 \\
 & \frac{H^j(1-x_1^j) + H^{j-1}(1-x_2^{j-1})}{2} \\
 & (j=2, 3, \dots, N) \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_1^1} = - H^1 D + \lambda^1 D = 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial t_2^j} = & - (H^{j+1} - H^j)D \\
 & + (\lambda^{j+1} - \lambda^j)D = 0 \\
 & (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 [ & V^1(0) - (1-x_1^1)B_1^1 \\
 & - D t_1^1 + D t_2^1] = 0 \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda^j [ & V^j(0) - (1-x_2^j)B_1^{j+1} \\
 & - (1-x_1^j)B_1^j - D t_2^{j-1} + D t_2^j] = 0 \\
 & (j=2, 3, \dots, N-1) \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda^N [ & V^N(0) - (1-x_2^N)B_2^N \\
 & - (1-x_1^N)B_1^N - D t_2^{N-1} + D t_2^N] = 0 \quad (37)
 \end{aligned}$$

(31) 을 풀면,

$$B_1^1 = \sqrt{\frac{2 A^1 D}{H^1(1-x_1^1)}} \quad (38)$$

이것은 (16)과 같다. (33)과 (34)를 풀면,

$$\lambda^j = H^j \quad (j=1, 2, 3, \dots, N) \quad (39)$$

(39)를 (32)에 삽입하면,

$$B_1^j = \sqrt{\frac{2 A^j D}{(1-x_1^j)H^j + (1-x_2^{j-1})H^{j-1}}} \quad (j=2, 3, \dots, N) \quad (40)$$

명백히 (40)은 EPQ 모형에 의해 유도된 (16)과 다르다. (40)으로 볼 때 EPQ 모형은 사각과 모형의 특수한 경우,

즉  $x_2^{j-1} = 1$  인 경우가 된다. (35), (36)과 (37)을 양수인  $\lambda^j$  와 함께 풀면,

$$*t_2^{N-1} = \frac{1}{D} [ V^N(0) - (1 - x_2^N) B_2^N - (1 - x_1^N) B_1^N + D(*t_2^N) ] \quad (41)$$

$$*t_2^{j-1} = \frac{1}{D} [ V^j(0) - (1 - x_2^j) B_1^{j+1} - (1 - x_1^j) B_1^j + D(*t_2^j) ] \quad (j=2, 3, \dots, N-1) \quad (42)$$

$$*t_1^1 = \frac{1}{D} [ V^1(0) - (1 - x_2^1) B_1^2 + D(*t_2^1) ] \quad (43)$$

(38)과 (40)~(43)을 (26)에 삽입하면 최적 해에서의 총비용이 계산된다.

$$*TC = \sqrt{2DA^1H^1(1-x_1^1)} + \sum_{j=2}^N \sqrt{2DA^j[H^j(1-x_1^j) + H^{j-1}(1-x_2^{j-1})]} + \frac{H^N(1-x_2^N)B_2^N}{2} \quad (44)$$

EPQ 모형의 결과인 (16)을 사용했을 경우와 사각과 모형의 결과인 (40)을 사용했을 경우 총비용의 차이를 비교하면 사각과 모형의 효율성을 평가할 수 있다. (16)을 사용했을 경우 총비용은,

$$TC(EPQ) = \sum_{j=1}^N \sqrt{2DA^jH^j(1-x_1^j)} + \sum_{j=2}^N \frac{H^{j-1}(1-x_2^{j-1})}{2} \sqrt{\frac{2DA^j}{H^j(1-x_1^j)}} + \frac{H^N(1-x_2^N)B_2^N}{2} \quad (45)$$

(45)와 (44)의 차이는,

$$TC(EPQ) - TC(PS) = \sum_{j=2}^N \sqrt{2DA^jH^j(1-x_1^j)} \times \left[ 1 + 0.5 \frac{H^{j-1}(1-x_2^{j-1})}{H^j(1-x_1^j)} - \sqrt{1 + \frac{H^{j-1}(1-x_2^{j-1})}{H^j(1-x_1^j)}} \right] \quad (46)$$

편의상  $H^{j-1}(1-x_2^{j-1}) \approx H^j(1-x_1^j)$  으로 가정하자. 이 조건하에서 (16)과 (40)을 비교할 때 EPQ 모형에 의한 최적 주문량은 사각과 모형에 의한 최적 주문량보다 1.414 배 크다. 또한 (46)은 다음과 같이 정리된다.

$$TC(EPQ) - TC(PS) =$$

$$\sum_{j=2}^N \sqrt{2(1.5 - \sqrt{2})\sqrt{DA^jH^j(1-x_1^j)}} \times \sum_{j=2}^N 0.1232 * \left( \frac{\text{setup cost of PSW model}}{\text{PSW model}} \right) \quad (47)$$

(47)은 EPQ 모형의 결과가 최적 해로부터 준비비의 약 12%, 또는 총비용의 약 6% 정도 떨어져 있음을 나타낸다.

#### IV. 투자비용을 고려한 최적해

화학 산업에 있어서 준비비나 재고 유지비 뿐만 아니라 공정의 건설과 사용권에 관한 투자비용을 무시할 수 없다. 일반적인 경우 투자비용은 공정 처리능력의 어떤 지수 승에 비례한다.

$$\text{annual capital cost} \propto (\text{capacity})^\alpha \quad (48)$$

여기서  $\alpha$ 의 전형적인 값은 0.3에서 1.2에 이른다[3]. 본 논문에서는 해석적인 해법을 유지하기 위해  $\alpha=1$  로 가정한다. 총비용은 (24)에 나타난 항들 뿐만 아니라 j번째 저장조의 투자비용과 j번째 저장조의 상부 공정의 투자비용을 포함한다.

$$TC = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{A^j}{\omega_1^j} + H^j \bar{V}^j \right] + \sum_{j=1}^N [ a^j B_1^j + b^j V_s^j ] \quad (49)$$

여기서  $a^j$ 와  $b^j$ 는 공정과 저장조에 대한 단위물량당 연간 투자비용이다. 저장조의 크기  $V_s^j$ 는 무리없이 재고 상한선  $V_{ub}^j$ 와 일치한다고 가정할 수 있다.

$$V_s^1 = V^1(0) + B_1^1(1-x_1^1) - Dt_1^1 + Dt_2^1 \quad (50)$$

$$V_s^j = V^j(0) - Dt_2^{j-1} + Dt_2^j \quad (j=2, 3, \dots, N) \quad (51)$$

(50)과 (51)을 (49)에 삽입함으로써 총비용은 탐색 변수에 대해 재구성된다.

$$TC = \sum_{j=1}^N \frac{DA^j}{B_1^j} + \left[ \left( \frac{H^1}{2} + b^1 \right) (1-x_1^1) + a^1 \right] B_1^1 - (H^1 + b^1)Dt_1^1 - \sum_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{H^j(1-x_2^j) + H^{j+1}(1-x_1^{j+1})}{2} - a^{j+1} \right] B_1^{j+1} - \sum_{j=1}^{N-1} D(H^{j+1} - H^j + b^{j+1} - b^j)t_2^j + \sum_{j=1}^N (H^j + b^j)V^j(0) - \frac{H^N(1-x_2^N)}{2} B_2^N + (H^N + b^N)Dt_2^N \quad (52)$$

제약 조건들은 2장과 마찬가지로 (27), (28)과 (29)이다. 최적 해를 구하는 과정은 2장과 동일하며 그 결과는 다

음과 같다.

$$* B_1 = \sqrt{\frac{2 A^1 D}{2 a^1 + (H^1 + 2 b^1)(1 - x_1)}} \quad (53)$$

$$* B_j = \sqrt{\frac{2 A^j D}{\Psi^j}} \quad (j=2, 3, \dots, N) \quad (54)$$

여기서

$$\Psi^j = 2 a^j + (H^j + 2 b^j)(1 - x_j) + (H^{j-1} + 2 b^{j-1})(1 - x_{j-1}^{j-1})$$

그리고 (41), (42)과 (43)은 이 경우에도 여전히 성립됨을 보인다.

**V. 중간저장조의 크기**

제 1장에서 단 단계 공정-저장조계에서 사각파 모형과 EPQ 모형 둘 다 경제적 생산량과 주기를 결정함에 있어서 같은 결과를 제시하였지만 저장조 크기에 있어서는 다른 결과를 제시하였다. 여기서는 사각파 모형을 이용하여 경제적 생산량이 이미 계산된 다음 저장조의 크기를 어떻게 결정할 것인가 하는 문제를 깊이 다루고자 한다.

EPQ 모형을 이용할 경우 재고 함수는 주기적인 톱니 모양을 하며, 최소 저장조 크기는 (19)에 의해 계산된다. 사각파 모형에 의한 재고 함수는 그림 5에 보이듯 EPQ 모형의 매개변수 값에 따라 매우 복잡한 형태를 보인다.

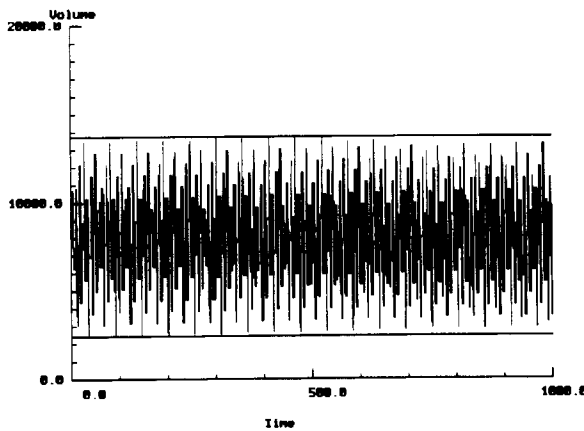


그림 5. 재고함수의 예.

Fig. 5. An example of inventory hold-up profile.

$V_{min}$ 를 재고 함수  $V(t)$ 의 전범위 최소값이라 하고  $V_{max}$ 를 전범위 최대값이라 할 때, 저장조의 크기  $V_s$ 와 초기재고  $V(0)$ 는 제약 조건  $0 \leq V_{min} < V_{max} \leq V_s$  하에서 결정된다. 여기서 전범위 최대값  $V_{max}$ 와 전범위 최소값  $V_{min}$ 는 다음식들로 주어지며, 유도 과정은 참고문헌 [5]에 주어져 있다.

$$V_{max} = V(0) + B_1 - \frac{B_1}{\beta_2} \left( \text{int}[x_1 \beta_2 - y_2 \beta_1] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_i} \text{res}[x_i \beta_2 - y_2 \beta_1] \right\} \right) \quad (55)$$

$$V_{min} = V(0) - B_2 + \frac{B_2}{\beta_1} \left( \text{int}[(x_2 + y_2) \beta_1] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_i} \text{res}[(x_2 + y_2) \beta_1] \right\} \right) \quad (56)$$

여기서  $U_1 \leq U_2$  이면  $i=1$ ,  $U_1 > U_2$  이면  $i=2$  이다. 정수  $\beta_1$  과  $\beta_2$  는 다음식에 의해 정의된다:

$$LCM(\omega_1, \omega_2) = \beta_1 \omega_1 = \beta_2 \omega_2 \quad (57)$$

여기서  $LCM(.,.)$  은 최소공배수이다. (57)에 있어서 최소공배수를 계산하는 것은 쉬운 일이 아니다. 따라서 (55)와 (56)의 용도는 (9)와 (10)에 의해 주어진 재고 상한선 또는 하한선식에 비해 유용성이 떨어진다.

**VI. 논의**

사각파 모형의 유용성은 고전적인 경제적 주문량 결정 방법을 재확인하는데 그치지 않는다. 사각파 모형은 비연속 화학 공정에서 중간 저장조의 설계와 운전 성공적으로 적용되었다[5]. 사각파 모형을 이용하여 단일 제품을 취급하는 다입다출형 중간 저장조에 대하여 모형 기반 실시 재고 제어기가 개발되었다[6]. 사각파 모형은 계의 상태 변수들의 미래의 값을 예측하거나 효과적인 제어 입력과 매개변수 값을 계산하는데 사용되었다. 이러한 연구는 다제품 다입다출 저장 창고 재고 제어기의 개발로 확장되었다[7].

사각파 모형의 장점은 모형이 저장조의 물질 흐름을 정밀하게 표현한다는 점 뿐만 아니라 (9), (10)과 (11)에 나타난 것처럼 재고 함수의 상한선, 하한선과 평균값을 쉽게 계산할 수 있다는데 있다. 사각파 모형은 순수한 재고관리계 뿐만 아니라 재고/생산계가 서로 연결되어 있거나 결합된 계를 해석하는데 유용하게 사용될 수 있다. 사각파 모형을 생산/재고관리에 이용할 경우 계산량을 늘리지 않고도 이산 시간대가 아닌 연속 시간대에서 해석할 수 있다. 사각파 모형이 계의 조합적이거나 순차적인 난이도를 줄이지는 못하지만 만약 주기적인 성격을 띠는 변수가 있다면 난이도를 줄일 수 있다.

사각파 모형도 단점이 있다. 경제적 주문량을 결정하는데 중요한 요인 중의 하나인 미납품주문이나 재고 부족에 의한 판매기회 유실은 표현하기 어렵거나 거의 불가능해 보인다. 또 비주기적이거나 시간 한계가 있을 경우에도 매우 불리하다. 사각파 모형의 응용에 대해서는 아직도 많은 연구가 필요하다.

**VII. 결론**

EPQ 모형은 일정 수요와 주기적인 사각 파형의 주문을 가정하였다. 대신에 사각파 모형은 주문과 수요에 있어서 모두 주기적인 사각 파형의 물질 흐름을 가정한다. 경제적 주문량과 주기를 결정함에 있어서 EPQ 모형과 사각파 모형은 단 단계 생산/재고계에 대해 다른 형태의 수요 유형에도 불구하고 같은 결과를 제시하였다. 그러나 생산/재고의 일련 연결된 계에 대해서는 사각파 모형은 EPQ 모형과 다른 결과를 제시하였다. 사각파 모형에 의한 새로운 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 사각파 모형을 이용할 경우 EPQ 모형에 비해 총 비용이 약 6 % 감소한다. 둘째, 사각파 모형에 의한 경제적 생산량 크기는 EPQ 모형에 비해 약 29 % 작다. 셋째, 최적해는 설계변수인 공정 및 저장조의 크기 뿐만 아니

라 운전변수인 저장조의 출고 시간지연도 포함한다. 넷째, 공정 및 저장조의 초기 투자비는 재고유지비에 포함될 수 있다.

실제 산업계에서는 EPQ 모형의 적용대상처럼 어떠한 생산/재고계가 독립적으로 존재하기보다는 본 연구의 대상과 같이 상호 연결되어 존재하는 경우가 많다. 대표적인 예로서 원유를 도입하여 여러 공정을 거치며 처리되어 일용품이 생산되는 석유화학 콤비나트를 들 수 있다. 1915년 EOQ 모형이 처음 유도된 이래 현재까지 EOQ 또는 EPQ 모형이 광범위하게 사용되고 있음을 감안할 때 본 논문의 결과는 큰 의미를 갖는다고 본다.

본 논문에서는 사각파 모형의 응용 가능성에 대한 논의와 몇 가지 응용 예를 제시하였다. 사각파 모형의 적용 대상으로서 본 연구에서는 직렬 공정-저장조계가 선정되었으나 병렬 또는 그물망 구조에 대한 연구결과도 저자들에게 의해 발표될 예정이다[9]. 사각파 모형의 정밀도와 응용성 및 단순성을 고려할 때 생산재고 계를 해석하는데 유용한 이론적 도구가 될 것이다.

**사용기호**

- A : 주문 비용, 원/주문 횟수
- A<sup>j</sup> : j 번째 공정의 주문비용, 원/주문 횟
- a<sup>j</sup> : j 번째 공정의 단위물량당 연간 투자비용, 원/년/물량
- B<sub>1</sub> : 상부 공정 1 회 생산량, 물량/주문 횟수
- B<sub>2</sub> : 하부 공정 1 회 소비량, 물량/주문 횟수
- B<sub>1</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조의 상부 공정 1 회 생산량, 물량/주문 횟수
- B<sub>2</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조의 하부 공정 1 회 소비량, 물량/주문 횟수
- b<sup>j</sup> : j 번째 저장조에 대한 단위물량당 연간 투자비용, 원/년/물량
- D : 평균 물질흐름 유속, 물량/년
- F<sub>1</sub>(t) : 주기적 사각 파형을 가진 상부 흐름
- F<sub>2</sub>(t) : 주기적 사각 파형을 가진 하부 흐름
- H : 연간 재고 유지비, 원/물량/년
- H<sup>j</sup> : j 번째 저장조의 연간 재고 유지비, 원/물량/년
- P : 입고 유속, 물량/년
- t<sub>i</sub><sup>j</sup> : 초기 지연시간, 년
- U<sub>1</sub> : 입고 유속(P), 물량/년
- U<sub>2</sub> : 출고 유속, 물량/년
- V<sub>max</sub> : 최대 재고량, 물량
- V<sub>min</sub> : 최소 재고량, 물량
- V<sub>ub</sub> : 재고 상한선, 물량
- V<sub>ub</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조의 재고상한선, 물량
- V<sub>lb</sub> : 재고 하한선, 물량
- V<sub>lb</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조의 재고하한선, 물량
- V(t) : 재고 함수, 물량
- V<sup>j</sup>(t) : j 번째 저장조의 재고함수, 물량
- V(0) : 초기재고량, 물량
- V<sup>j</sup>(0) : j 번째 저장조의 초기재고량, 물량
- V<sub>s</sub> : 저장조 크기, 물량
- V<sub>s</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조 크기, 물량

- $\bar{V}$  : 평균 재고량, 물량
- x<sub>1</sub> : =D/P, 입고시간 분율
- x<sub>2</sub> : =D/U<sub>2</sub>, 출고시간 분율
- x<sub>i</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조에 대한 입고 또는 출고시간 분율
- y<sub>1</sub> : 상부 흐름의 초기 지연시간 분율
- y<sub>2</sub> : 하부 흐름의 초기 지연시간분율
- z : 임의의 실수

**그리스 문자**

- λ<sup>j</sup> : Lagrange 승수
- ω<sub>1</sub> : 입고 주기, 년
- ω<sub>2</sub> : 출고 주기, 년
- ω<sub>i</sub><sup>j</sup> : j 번째 저장조에 대한 입고 또는 출고 주기, 년

**상첨자**

- j : 저장조 일련번호

**하첨자**

- i : 상부 공정은 1, 하부 공정은 2

**특수연산자**

- int[.] : 소수점 이하를 잘라서 실수를 정수로 만드는 함수
- res[.] : 소수점 이하 잘리는 부분으로서 양수
- u(.) : 단위 계단함수
- LCM(.,.) : 최소공배수

**참고문헌**

- [1] D. W. Burton, *A First Course in Rings and Ideals*, Addison-Wesley Publishing Co., 1970.
- [2] A. C. Hax and D. Candea, *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [3] M. S. Peters and K. D. Timmerhaus, *Plant Design and Economics for Chemical Engineers*, McGraw-Hill, 1980.
- [4] G. V. Reklaitis, A. Ravindran and K. M. Ragsdeil, *Engineering Optimization Method and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [5] G. Yi, *Modeling and Operation of Intermediate Storage in Noncontinuous Processes*, Ph. D. Dissertation, Purdue University, West Lafayette, IN, U. S. A., 1992.
- [6] G. Yi and G. V. Reklaitis, "Model based feedback inventory controller for intermediate storage in batch processes," *J. Proc. Cont.*, vol. 4, no. 4, pp 227-237, 1994.
- [7] G. Yi and G. V. Reklaitis, "Model based inventory controller for multiproduct warehouse systems," presented at PSE'94, Korea, 1994.
- [8] G. Yi, "An extended EPQ model to relax the constant demand assumption into periodic demand," *International Journal of Management Science*, vol. 1, no. 1, pp 39-66, 1995.
- [9] 이경범, "원료 및 제품 저장조를 포함하는 병렬 비연속 공정의 최적설계," 제어·자동화·시스템공학논문지, 제 3권, 제 5호, 10, 1997.

**이 경 범**

1983년에 서울대학교에서 화학공학과 학사, 1985년에 KAIST에서 화학공학과 석사학위를 받았으며 1992년 PURDUE 대학 화학공학과에서 박사학위를 하였다. 1985 ~ 1988년 쌍용정유에서 공정기사로, 1992 ~ 1996년 호남정유

기술연구소에서 연구원으로, 1996년부터 부경대학교 화학공학과 전임강사로 있음. 주요 관심 분야는 화학공장 생산계획 및 물류 최적화, 재고관리, 공정제어 및 최적화 등이다.