

# 파라미터 불확실성 및 모델 불확실성에 대한 $H^\infty$ 건실성능 제어기 설계

## Robust $H^\infty$ Performance Controller Design with Parameter Uncertainty and Unmodeled Dynamics

이 갑 래, 오 도 창, 박 흥 배

• (Kap Rai Lee, Do Chang Oh, Hong Bae Park)

**Abstract** : The method of designing robust two degree of freedom(2 DOF) controllers for linear systems with parameter uncertainties and unmodeled dynamics is presented in this paper. Robust performance condition that accounts for robust model matching of closed loop system and disturbance rejection is derived. Using the robust performance condition, the feedback controller is designed to meet robust stability and disturbance rejection specifications, while prefilter is used to improve the robust model matching properties. The  $H^\infty$  and  $\mu$  controller for six degree of freedom vehicle with parameter variations are designed and compared. Simulations for hydrodynamic parameter variations and disturbance are presented to demonstrate the achievement of good robust performance.

**Keywords**: parameter uncertainty, unmodeled dynamics,  $H^\infty$  robust performance, two degree of freedom controller, six degree of freedom vehicle

### I. 서론

모델 불확실성을 가지는 페루프 시스템의 안정성과 외란에 대해 성능을 보장하는 건실제어이론이 활발히 연구되어 왔다. Doyle[1]과 Glover[2] 등은 두개의 리카티 방정식을 사용하여 표준  $H^\infty$  최적화문제에 대한 상태공간해법을 개발하였으며, Ho[3]와 Li[4] 등은 하중함수를 도입하여 혼합감도 최적화문제와 외란감쇠문제 등을  $H^\infty$  최적화문제로 변환하여 리카티 방정식을 이용한 상태공간해법에 근거하여  $H^\infty$  제어기를 설계하였다. 혼합감도기법의 경우, 페루프 시스템의 설계목표와 하중함수와의 상관관계 설정이 어렵기 때문에 McFarlane과 Glover[5] 등은 개루프 플랜트의 주파수응답 루프형상을 만족시키는 방법으로 하중함수를 선정하는  $H^\infty$  루프형상 설계기법을 제안하였다. Limebeer[6]는 시간영역 성능사양을 보다 직접적으로 반영하고 건실안정성뿐만 아니라 건실성능을 만족하는  $H^\infty$  2 자유도 모델추종 기법을 제시하였다.

파라미터 불확실성에 대한 건실안정성 및 외란감쇠문제 등을 Lyapunov 접근법을 이용하여 다루는 논문들이 발표되어 왔다[7~10]. 이 방법은 상태공간에서 파라미터 불확실성을 직접 고려하고 비선형 시스템에도 확장이 가능하다는 장점이 있지만, 제어기 설계과정에서 설계자가 주파수영역에 관한 지식을 직접 가미할 수 없다는 단점이 있다. 구조화된 파라미터 불확실성을 갖는 시스템의 건실성능 제어기 설계는 불확실성 시스템이 구조적 불확실성에 대한 선형분수변환형태로 적절히 모델링 되었을 경우 Doyle[11]의 구조적 특이값 방법을 이용하여 제어기를 구할 수 있다. 설계 제어 대상 시스템에 따라서는 상태공간 모델에서 임의의 행과 열이 불확실성을 갖게되는 구조로 파라미터 불확실성 모델링을 맞이한다[7~10]. Lin[12]은 상태공간 모델에서 시스템행렬의 임의의 행과 열이 파라미터 불확실성을 가질 경우, 먼저 주파수영역에서 플랜트를 파라미터 불확실성에 대한 선형분수변환 형태로 나타내고 센서잡음에 대한 저감도, 제어

입력크기 제한, 명령추종 등의 문제를 표준(canonical) 설계 방법을 이용하여  $H^\infty$  최적화문제로 변환하여 제어기를 설계하였다. 이때 파라미터 불확실성은 시스템행렬에만 존재하는 것으로 고려하였다.

수중 및 우주공간의 3차원공간에서 이동하는 대부분의 6 자유도 운동체에 있어서 플랜트의 불확실성에는 파라미터 계수 불확실성 뿐만 아니라 모델 불확실성도 함께 존재한다. 중력중심점 및 부력중심점(양력중심점)의 부정확한 위치, 공역학(유체역학) 계수의 부정확한 값 등은 파라미터 불확실성으로 분류하고, 구동기와 센서의 동역학 및 시간지연을 무시한 모델링은 모델 불확실성으로 분류한다[13].

본 논문에서는 상태공간모델에서 모든 시스템행렬에 적절한 구조를 가지며 존재하는 파라미터 불확실성과 승산요소 모델 불확실성에 대한 건실 안정성 조건식을 유도한다. 또한 2자유도 제어기 구조에서 플랜트 불확실성이 존재할 시에도 모델추종 및 외란감쇠에 대해 건실성능을 보장하는 조건식을 유도한다. 그리고 건실성능 조건식으로부터 출력제한 제어기와 피드포워드 제어기를 분리하여  $H^\infty$  제어기를 설계한다. 마지막으로 파라미터 불확실성을 가지는 6 자유도 운동체에 대해 건실성능을 보장하는  $H^\infty$  제어기와  $\mu$  합성을 이용한 제어기를 설계하고 시뮬레이션을 통하여 파라미터 불확실성 및 외란에 대한 건실성능을 확인한다.

### II. 파라미터 및 모델 불확실성에 대한 건실성능 파라미터 불확실성을 가지는 선형시스템

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A]x + [B_u + \Delta B_u]u + [B_w + \Delta B_w]w \\ y &= [C + \Delta C]x + [D_u + \Delta D_u]u + [D_w + \Delta D_w]w \end{aligned} \quad (1)$$

을 고려하자. 여기서  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^r$ ,  $y(t) \in R^r$ ,  $z(t) \in R^p$  는 각각 상태, 제어입력, 출력, 외란신호를 나타낸다.  $R^n$ 은  $n$ 차원 실수공간을 의미하며 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다.  $\Delta$ 항은 파라미터 불확실성이며 (2)의 정합조건을 만족하는 구조를 가진다.

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_u & \Delta B_w \\ \Delta C & \Delta D_u & \Delta D_w \end{bmatrix} = H_x \Delta_{p1} \begin{bmatrix} E_{x1} & E_{u1} & E_{w1} \\ E_{x2} & E_{u2} & E_{w2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $H_x, H_y, E_{x1}, E_{x2}, E_{u1}, E_{u2}, E_{w1}, E_{w2}$ 는 알 수 있는 상수행렬이며  $\Delta_{p1}, \Delta_{p2}$ 는 크기가 제한된 모르는 행렬이다. 위 (1)로부터 입력  $[u, w]$ 와 출력  $y$ 의 관계는

$$\begin{aligned} y &= [(D_u + \Delta D_u) + (C + \Delta C)(sI - A - \Delta A)^{-1}(B_u + \Delta B_u)]u(s) \\ &\quad + [(D_w + \Delta D_w) + (C + \Delta C)(sI - A - \Delta A)^{-1}(B_w + \Delta B_w)]w(s) \\ &= [\bar{G}_{uy}(s, \Delta_p) \quad \bar{G}_{wy}(s, \Delta_p)] \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 파라미터 불확실성  $\Delta_p$ 를

$$\Delta_p = \begin{bmatrix} \Delta_{p1} & 0 \\ 0 & \Delta_{p2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

로 정의하고 불확실성  $\Delta$ 를 파라미터 불확실성  $\Delta_p$ 와 승산요소 불확실성  $\Delta_M$ 으로 정의하면

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_M \end{bmatrix} \quad (5)$$

이다. 여기서  $\Delta_M$ 은 안정한 진유리함수 행렬공간을 나타내는  $RH^\infty$ 에 속한다. 따라서 파라미터 불확실성과 승산요소 모델 불확실성을 가지는 선형시스템에서 전달함수는

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\Delta u} &= (1 + \Delta_M) \bar{G}_{uy}(s, \Delta_p) \\ \bar{G}_{\Delta w} &= (1 + \Delta_M) \bar{G}_{wy}(s, \Delta_p) \end{aligned} \quad (6)$$

과 같이 표현할 수 있다.

본 논문에서는 (6)의 파라미터 및 모델 불확실성을 가지는 시스템에 그림 1과 같이 출력례환 제어기  $K_2$ 와 피드포워드 제어기  $K_1$ 를 사용할 경우, 페루프 시스템의 안정성과 모델정합 및 외란감쇠에 대한 견실성능 조건식을 유도한다. 여기서  $W_r, W_d, W_{e1}, W_{e2}$ 는  $RH^\infty$ 에 속하는 하중함수이며 행렬  $M$ 의 최대 특이치는  $\bar{\sigma}(M)$ 으로 나타내며 진유리함수  $H(s) \in RH^\infty$ 의  $H^\infty$  노름은  $\|H\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}(H(jw))$ 로 나타낸다.  $M_0$ 는 추종모델이다. 블록 대각화된 구조적 불확실성의 집합은

$$B\Delta = [\text{Diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) : \bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1] \quad (7)$$

로 표시하고 행렬  $M$ 의 구조적 특이치  $\mu_\Delta(M)$ 은

$$\mu_\Delta(M) := \left( \min_{\Delta \in B\Delta} [\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - \Delta M) = 0] \right)^{-1} \quad (8)$$

로 정의한다.

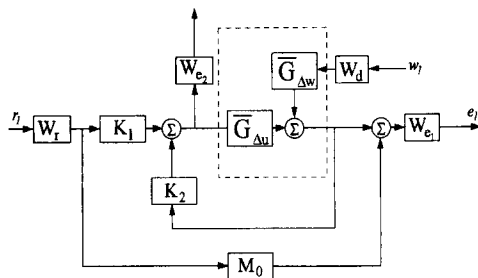


그림 1. 제어기 설계 구조.

Fig. 1. Controller design configuration.

## 2.1 견실 안정성

실유리 전달함수  $P$ 의 선형분수변환은 다음과 같이 정의한다. 낮은 선형분수변환(LLFT: lower linear fractional transformation)은

$$F_l \left( \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (9)$$

으로 나타내고 높은 선형분수변환(ULFT: upper linear fractional transformation)은

$$F_u \left( \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) = P_{22} + P_{21}K(I - P_{11}K)^{-1}P_{12} \quad (10)$$

로 표현된다.

보조정리 1: 위 (1)과 같은 파라미터 불확실성을 가지는 시스템의 전달함수  $\bar{G}_{wy}, \bar{G}_{uy}$ 는 ULFT의 형태로 나타낼 수 있으며

$$\bar{G}_{uy} = F_u \left( \begin{bmatrix} G_c & 0 & G_b \\ E_{x2}G_a & 0 & E_{x2}G_u + E_{u2} \\ CG_a & H_y & CG_u + D_u \end{bmatrix}, \Delta_p \right) \quad (11)$$

$$\bar{G}_{wy} = F_u \left( \begin{bmatrix} G_c & 0 & G_d \\ E_{x2}G_a & 0 & E_{x2}G_w + E_{w2} \\ CG_a & H_y & CG_w + D_w \end{bmatrix}, \Delta_p \right)$$

와 같이 표현된다. 여기서,

$$\begin{aligned} G_u &= (sI - A)^{-1}B_u, & G_a &= (sI - A)^{-1}H_x \\ G_c &= E_{x1}(sI - A)^{-1}H_x, & G_w &= (sI - A)^{-1}B_w, \\ G_d &= E_{x1}(sI - A)^{-1}B_w + E_{w1} \\ G_b &= E_{x1}(sI - A)^{-1}B_u + E_{u1} \end{aligned} \quad (12)$$

이다.

증명: 부록참조

보조정리 2: 위 (6)과 같은 파라미터 및 모델 불확실성을 가지는 시스템의 전달함수  $\bar{G}_{\Delta u}, \bar{G}_{\Delta w}$ 는 ULFT의 형태로 나타낼 수 있으며

$$\bar{G}_{\Delta u} = F_u(G_{\Delta u}, \Delta) = F_u \left( \begin{bmatrix} G_{11} & G_{u1} \\ G_{21} & G_{u2} \end{bmatrix}, \Delta \right) \quad (13)$$

$$\bar{G}_{\Delta w} = F_u(G_{\Delta w}, \Delta) = F_u \left( \begin{bmatrix} G_{11} & G_{w1} \\ G_{21} & G_{w2} \end{bmatrix}, \Delta \right)$$

과 같이 표현된다. 여기서

$$G_{11} = \begin{bmatrix} G_c & 0 & 0 \\ E_{x2}G_a & 0 & 0 \\ CG_a & H_y & 0 \end{bmatrix} \quad G_{21} = [CG_a \quad H_y \quad I]$$

$$G_{u1} = \begin{bmatrix} G_b \\ E_{x2}G_u + E_{u2} \\ CG_u + D_u \end{bmatrix} \quad G_{u2} = [CG_u + D_u] \quad (14)$$

$$G_{w1} = \begin{bmatrix} G_d \\ E_{x2}G_w + E_{w2} \\ CG_w + D_w \end{bmatrix} \quad G_{w2} = [CG_w + D_w]$$

이다.

증명: 부록 참조

교란된 시스템  $\bar{G}_{\Delta u}$ 의 선형분수변환 형태  $F_u(G_{\Delta u}, \Delta)$ 에서  $G_{\Delta u}$ 는 공칭플랜트를 포함하는 표준플랜트를 나타낸다.

표준플랜트  $G_{du}$ 는 안정가능(stabilizable)이고 탐지가능(detectable)이며, 교란시스템  $\bar{G}_{du}$ 와 공칭플랜트  $G_{du}$ 는 같은 수의 우반평면 극점을 가진다고 가정한다. 보조정리 1로부터  $\| \Delta \|_\infty < \gamma^{-1}$ 을 만족하는 모든  $\Delta$ 에 대해서 (6)의 시스템이 안정하기 위한 필요충분조건은 제어기  $K_2$ 가 공칭플랜트를 안정화시키면서 (15)을 만족하는 것이다.

$$\| F(G_{du}, K_2) \|_\infty = \| G_{11} + G_{u1}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \|_\infty =$$

$$\left\| \begin{array}{cc} G_c + G_bK_2SCG_a & G_bK_2SH_y \\ E_{22}G_u + (E_{22}G_u + E_{u2})K_2SCG_a & (E_{22}G_u + E_{u2})K_2SH_y \\ CG_a + (CG_u + D_u)K_2SCG_a & H_y + (CG_u + D_u)K_2SH_y \end{array} \right\|_\infty$$

$$\left\| \begin{array}{c} G_bK_2S \\ (E_{22}G_u + E_{u2})K_2S \\ (CG_u + D_u)K_2S \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (15)$$

여기서  $S = [I - (CG_u + D_u)K_2]^{-1}$ 이다

2.2 건실성능

이 절에서는 파라미터 및 모델 불확실성이 존재할 경우에도 시스템의 출력과 원하는 응답과의 오차에 관한  $H^\infty$ 노름을 최소화하는 모델정합문제와 외란감쇠문제를 고려하여 건실성능을 위한 조건식을 유도한다. (6)에 대해

$$u = K_1r + K_2y \quad (16)$$

와 같은 2자유도 구조의 제어시스템을 생각하자. 여기서  $r$ 은 기준입력이고  $y$ 는 측정출력이다. 모든 교란된 플랜트 모델  $\bar{G}_{du}$ 와  $\bar{G}_{dw}$ 에 대해 (17)가 만족될 경우,  $\| \Delta \|_\infty < \gamma^{-1}$ 을 만족하는 모든  $\Delta$ 에 대해서 건실성능이 만족된다.

$$\| \Phi \|_\infty = \left\| \begin{array}{c} W_{e1}[(I - \bar{G}_{du}K_2)^{-1}\bar{G}_{du}K_1 - M_0]W_r \\ W_{d2}(I - K_2\bar{G}_{du})^{-1}K_1W_r \\ W_{e1}(I - \bar{G}_{du}K_2)^{-1}\bar{G}_{du}W_d \\ W_{d2}(I - K_2\bar{G}_{du})^{-1}K_2\bar{G}_{dw}W_d \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (17)$$

여기서,  $M_0$ 는 원하는 응답의 전달함수모델을 나타낸다.

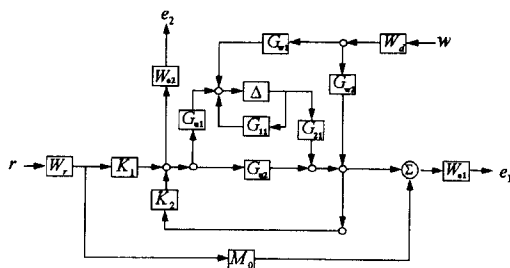


그림 2. 선형분수 변환구조. Fig. 2. Linear transformation configuration.

그림 1의 제어기 설계구조에서 불확실성 모델을 선형분수변환 형태로 표시하면 그림 2와 같으며, 그림 2로부터 (17)의 전달함수  $\Phi$ 를  $\Delta$ 에 대한 LLFT의 형태로 나타내면

$$\Phi = F_l \left( \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} & \hat{P}_{13} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} & \hat{P}_{23} \\ \hat{P}_{31} & \hat{P}_{32} & \hat{P}_{33} \end{bmatrix}, \Delta \right) \quad (18)$$

로 표현된다. 여기서,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} &= W_{e1}[(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}K_1 - M_0]W_r \\ \hat{P}_{12} &= W_{e1}(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}W_d \\ \hat{P}_{13} &= W_{e1}(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \\ \hat{P}_{21} &= W_{d2}(I - K_2G_{u2})^{-1}K_1W_r \\ \hat{P}_{22} &= W_{d2}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}W_d \\ \hat{P}_{23} &= W_{d2}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \\ \hat{P}_{31} &= G_{u1}(I - K_2G_{u2})^{-1}K_1W_r \\ \hat{P}_{32} &= [G_{u1} + G_{u1}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{u2}]W_d \\ \hat{P}_{33} &= G_{11} + G_{u1}K_2(I - G_{u2}K_2)^{-1}G_{21} \end{aligned} \quad (19)$$

이다. 위 (18)으로부터  $\| \hat{P} \|_\infty < \gamma$ 을 만족하면 건실 안정성 조건식 (15)도 만족됨을 알 수 있다.

보조정리 3(14) :  $\| \hat{P} \|_\infty < \gamma$  와  $\| \Delta \|_\infty \leq \gamma^{-1}$ 을 만족하면  $\| F_l(\hat{P}, \Delta) \|_\infty \leq \gamma$ 이다.

보조정리 4(6) :  $\left[ \begin{array}{c} \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{21} \end{array} \right] \leq \gamma_1, \left[ \begin{array}{c} \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{22} \end{array} \right] \leq \gamma_2$ 라고 가정하면,  $\| \Delta \|_\infty \leq 1 / \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ 을 만족하는 모든  $\Delta$ 에 대해

$$\left\| F_l \left( \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{bmatrix}, \Delta \right) \right\|_\infty \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (20)$$

를 만족한다

정리 1 : (6)의 시스템에 대해 (17)을 만족하기 위한 충분조건은 다음과 같다.

(i) 제어기  $K = [K_1 \ K_2]$ 와 (22)로 표현되는  $P$ 에 대해 (21)를 만족한다.

$$\| F_l \left( \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) \|_\infty < \gamma \quad (21)$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_{e1}M_0W_r & W_{e1}[CG_w + D_w]W_d & W_{e1}CG_a & W_{e1}H_y & W_{e1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_dW_d & G_c & 0 & 0 \\ 0 & (E_{22}G_w + E_{u2})W_d & E_{22}G_a & 0 & 0 \\ 0 & (CG_w + D_w)W_d & CG_a & H_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} W_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (CG_w + D_w)W_d & CG_a & H_y & I \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} W_{e1}(CG_u + D_u) \\ W_{d2} \\ G_b \\ E_{22}G_u + E_{u2} \\ CG_u + D_u \end{bmatrix} \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ CG_u + D_u \end{bmatrix}$$

(ii) 제어기  $K_1, K_2$ 와 (25)으로 주어지는  $P_2$ 에 대해 (23)과 (24)를 만족한다.

$$\| F_l(P_2, K_2) \|_\infty \leq \gamma_2 \quad (23)$$

$$\left\| \begin{array}{c} W_{e1}[(I - (CG_u + D_u)K_2)^{-1}(CG_u + D_u)K_1 - M_0]W_r \\ W_{d2}[I - K_2(CG_u + D_u)]^{-1}K_1W_r \\ G_b[I - K_2(CG_u + D_u)]^{-1}K_1W_r \\ (E_{22}G_u + E_{u2})[I - K_2(CG_u + D_u)]^{-1}K_1W_r \\ (CG_u + D_u)[I - K_2(CG_u + D_u)]^{-1}K_1W_r \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma_1 \quad (24)$$

여기서,  $P_2$ 와  $\gamma_2$ 는

$$\begin{bmatrix} W_{e1}[CG_w + D_w]W_d & W_{e1}CG_a & W_{e1}H_y & W_{e1} & W_{e1}(CG_u + D_u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{d2} \\ G_dW_d & G_c & 0 & 0 & G_b \\ (E_{22}G_w + E_{u2})W_d & E_{22}G_a & 0 & 0 & E_{22}G_u + E_{u2} \\ (CG_w + D_w)W_d & CG_a & H_y & 0 & CG_u + D_u \\ (CG_w + D_w)W_d & CG_a & H_y & I & CG_u + D_u \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (25)$$

이다.

증명: (i)  $\|\Phi\|_\infty < \gamma$  를 만족하기 위한 충분조건은 보조정리 3으로부터  $\|\tilde{P}\|_\infty < \gamma$  이다. 따라서 (18)으로 주어진  $\tilde{P}$  를  $K$  에 대한 LLFT 형태로 나타내면 (21)와 같다.

(ii) (18)으로 주어진  $\tilde{P}$  를  $\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \\ \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} \end{bmatrix}$  형태로 표시하고  $\begin{bmatrix} \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{22} \\ \tilde{P}_{31} \end{bmatrix}$  를  $K_2$  에 대한 LLFT 형태인  $F_l(P_2, K_2)$  로 나타내

면 (25)가 되고, 보조정리 4를 이용하면 (23)과 (24)도 쉽게 만족됨을 알 수 있다. ■

(18)의  $\tilde{P}$  를  $K = [K_1 \ K_2]$  에 대하여 LLFT 형태로 나타내면  $F_l(P, K)$  에서  $P$  는 (22)의  $P$  로 나타나므로 만일  $\|\Delta\|_\infty < 1$  라고 가정하면 구조적 특이값( $\mu$ )의 조건식

$$\|\mu_\Delta(F_l(P, K))\|_\infty < 1 \quad (26)$$

를 만족하면 견실성능에 대한 요구조건이 충족되므로[11] 정리 1의 (i)에서 (21)는 (26)이 됨을 알 수 있다.

2.3 제어기 설계

1자유도 제어기 설계는 정리 1의 견실성능 조건식으로부터 정리 1의 (i)에서  $K_1 = K_2 = K$  로 두면 (22)에서  $P_{21}, P_{22}$  는 (27)로 바뀐다.

$$\begin{aligned} P_{21} &= [W_r \ (CG_w + D_w)W_d \ CG_a \ H_y \ I] \\ P_{22} &= [CG_u + D_u] \end{aligned} \quad (27)$$

2자유도 제어기 설계는 정리 1의 결과로부터 두가지 방법으로 설계할 수 있다. 한단계 접근방법에서는 정리 1의 (i)를 만족하는 케환제어기와 피드포워드 제어기를  $H^\infty$  최적화방법을 이용하여 동시에 설계한다. 한단계 접근방법은 또한  $\mu$ -설계 방법을 이용하여 구할 수 있다. 섭동을 나타내는  $\Delta$ 블럭에 적합한 임의의 대각행렬  $D$ 에 대하여

$$\mu_\Delta(F_l(P, K)) < \bar{\sigma}(DF_l(P, K)D^{-1}) \quad (28)$$

이므로 (26) 조건식은  $\|DF_l(P, K)D^{-1}\|_\infty$  를 최소화 하는것으로 된다. 이 최소화 과정은  $D, K$  를 반복적으로 변화시키면서 구한다[15].

두단계 접근방법에서는 정리 1의 (ii)에서 (22)를 만족하는 케환제어기  $K_2$  를  $H^\infty$  최적화방법을 이용하여 먼저 구한 후 (24)를 만족하는 제어기  $K_1$  은 모델정합방법을 이용하여 구한다. 두단계 접근방법으로 제어기를 구하므로써 제어기 차수는 증가하지만 안정성여유  $\gamma^{-1}$  는 증가할 수 있다.

III. 운동체에의 적용

6 자유도 운동체의 평행상태에서 구한 수평면 선형 운동방정식은 다음과 같다[16].

$$\begin{bmatrix} m - Y_v & -Y_p & -Y_r \\ -K_v & I_x - K_p & -K_r \\ -N_v & -N_p & I_z - N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p & Y_p + mU_0 \sin(\theta_0) & Y_r mU_0 \cos(\theta_0) & (W - B) \cos(\theta_0) \\ K_p & K_p & K_r & Z_B B \cos(\theta_0) \\ N_p & N_p & N_r & -X_B B \cos(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} Y_{\delta_r} & 0 \\ K_{\delta_r} & K_{\delta p} \\ N_{\delta_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (29)$$

출력변수는  $\{p, r, \phi, \psi\}$  로 주어지며, 여기서  $v$  는 동체좌표계에 대한 속도  $p, r$  은 동체좌표계에 대한 각속도,  $\phi, \psi$  는 유도좌표계에 대한 동체좌표계의 오일러각(롤, 요)을 나타내며,  $\delta_r$  는 방향타,  $\delta_p$  는 좌우승강타 차이를 나타낸다. 나머지 계수값들은 유체역학 계수값과 수중운동체의 제원을 나타낸다.

파라미터 불확실성은 운동모델의 유체역학 계수값 중 불확실성이 심한 횡동요 계수값과 실제 하드웨어 구현시 오차로 작용하는 중량, 부력, 질량중심, 및 부력중심점 등을 파라미터 불확실성으로 설정하였으며 이를 표 1에 나타내었다.

표 1. 불확실성 계수 및 오차변화량.  
Table 1. Uncertainty coefficients error changes.

계수	오차변화량	계수	오차변화량
$K_v$	10%	$W$	1.04%
$K_p$	10%	$B$	0.5%
$K_r$	20%	$x_B$	0.4%
$K_{\delta_r}$	10%	$z_B$	10%
$K_{\delta_e}$	10%		

평행상태에서 공칭플랜트의 선형화한 운동방정식 및 파라미터 불확실성은 각각

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A]x + [B_u + \Delta B_u]u + B_w w \\ y &= Cx + D_u u + D_w w \end{aligned} \quad (30)$$

$$[\Delta A \ \Delta B_u] = H_x \Delta_p [E_{x1} \ E_{u1}] \quad (31)$$

와 같다. 여기서,

$$X = [v \ p \ r \ \phi \ \psi], \quad Y = [p \ r \ \phi \ \psi], \quad u = [\delta_r \ \delta_p]$$

$$A = \begin{bmatrix} -7.4490 & -0.2039 & -9.3600 & 2.1050 & 0 \\ -7.5140 & -11.300 & 20.910 & -8.4110 & 0 \\ -4.3800 & -0.4370 & -18.160 & 1.1390 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} -38.270 & 2.0270 \\ -38.61 & -140.30 \\ 89.010 & 1.1230 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_w = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (32)$$

$$D_w = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad D_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

이다. 표 1의 계수값 변화는 (30)의 A행렬 2행 4열과 B행렬 2행 2열이다. 따라서 (30)의 시스템 모델을 불확실성과의 정합조건을 갖는 (1)과 같은 형태로 나타내면 (2)에서의 불확실성 구조 및 크기를 나타내는  $H_x, E_{x1}, E_{u1}$  는 각각

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$E_{x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.7 & 1.1 & 2.0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}, E_{x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 3.8 & 14 \end{bmatrix} \quad (33)$$

와 같다. 여기서  $H_x, E_{x1}, E_{x2}$ 의 각 요소 크기는 공칭 플랜트 계수값의 10%에 해당하는 값이다. 따라서 (31)의 파라미터 불확실성  $\Delta$ 는

$$\|\Delta\|_\infty < 1 \quad (34)$$

로 간주할 수 있다.

### 3.1 파라미터 불확실성에 대한 제어기 설계

그림 2의 제어기 설계구조로부터 하중함수  $W$  및 추종모델  $M_0$ 를

$$\begin{aligned} W_r &= \text{Diag}[0.01 \ 0.01 \ 1.0 \ 1.0], \\ W_n &= \text{Diag}[0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01], \quad W_d = 0.01 \\ M_0 &= \text{Diag} \left[ 0.01 \frac{0.06s+1}{s+1} \quad 0.01 \frac{0.06s+1}{s+1} \right. \\ &\quad \left. \frac{0.06s+1}{s+1} \quad 2 \frac{0.06s+1}{s+1} \right] \quad (35) \\ W_{e1} &= I, \quad W_{e2} = 0 \end{aligned}$$

로 두었다. 여기서  $W_n$ 은 측정잡음에 대한 하중함수를 나타낸다. 그림 2의 제어기 설계구조로부터 정리 1의 일반화된 플랜트  $P$ 를 가지고 구한  $H^\infty$  제어기와  $\mu$  제어기의 견실성능 여유  $\gamma_{\min}$  값은 표 2와 같다. 2 자유도  $H^\infty$  제어기의 2 단계 접근방법에서는 출력궤환 제어기와 피드포워드 제어기를 분리하여 구하였으며,  $\mu$  제어기 설계에서는 전체 불확실성 구조를 성능 블럭 1개와 불확실성 블럭 1개로 나누어서  $D, K$  반복법을 취하여 구하였다.

표 2. 파라미터 불확실성에 대한 견실 성능여유.  
Table 2. Robust performance for parameter uncertainty.

제어기	성능여유
1자유도 $H^\infty$ 제어기	$\ F_I(P, K)\ _\infty = 1.4658$
2 자유도 $H^\infty$ 제어기 (1단계 접근)	$\ F_I(P, K)\ _\infty = 1.0085$
2 자유도 $H^\infty$ 제어기 (2 단계 접근)	$\ F_I(P, K)\ _\infty = 0.81$
2 자유도 $\mu$ 제어기	$\ DF_I(P, K)D^{-1}\ _\infty = 1.007$

표 2로부터 정합조건을 사용하여 불확실성 구조를 고려하는 것 이외에도 2자유도  $H^\infty$  제어기를 2 단계로 분리하여 구하므로 견실성능이 더욱 개선됨을 알 수 있다. 구조적 불확실성을 이용한  $\mu$  제어기에서는 블럭의 갯수가 작음으로 인하여 성능개선이 별로 이루어지지 않았다.

### 3.2 파라미터 및 모델 불확실성에 대한 제어기 설계

앞 (31)의 파라미터 불확실성  $\Delta_p$  뿐만아니라 승산요소 모델 불확실성  $\Delta_M$ 을 고려하여 전체 불확실성  $\Delta = \text{diag}(\Delta_p, \Delta_M)$ 에 대한 견실성능 제어기를 설계한다. 그림 2의 제어기 설계구조로부터 하중함수  $W$  및 추종모델  $M_0$ 를

$$\begin{aligned} W_r &= \text{Diag}[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 1.0], \\ W_n &= \text{Diag}[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1], \quad W_d = 0.1 \\ M_0 &= \text{Diag} \left[ 0.1 \frac{0.06s+1}{s+1} \quad 0.1 \frac{0.06s+1}{s+1} \right. \\ &\quad \left. \frac{0.05s+1}{s+1} \quad 1.6 \frac{0.06s+1}{s+1} \right] \quad (36) \\ W_{e1} &= I, \quad W_{e2} = 0 \end{aligned}$$

로 두었다. 여기서  $W_n$ 은 모델 불확실성에 대한 하중함수를 나타낸다. 그림 2의 제어기 설계구조로부터 정리 1의 일반화된 플랜트  $P$ 를 가지고 구한  $H^\infty$  제어기와  $\mu$  제어기의 견실성능 여유  $\gamma_{\min}$  값은 표 3과 같다. 2 자유도  $H^\infty$  제어기의 2 단계 접근방법에서는 출력궤환 제어기와 피드포워드 제어기를 분리하여 구하였으며,  $\mu$  제어기 설계에서는 불확실성 블럭(파라미터 불확실성 블럭, 모델 불확실성 블럭) 2개와, 성능 블럭 1개로 나누어서  $D, K$  반복법을 취하여 구하였다.

표 3. 파라미터 및 모델 불확실성에 대한 견실 성능.

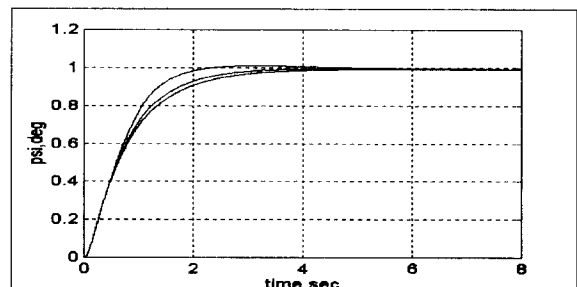
Table 3. Performance margin for parameter and model uncertainty.

제어기	성능여유
2 자유도 $H^\infty$ 제어기 (1단계 접근)	$\ F_I(P, K)\ _\infty = 1.1366$
2 자유도 $H^\infty$ 제어기 (2 단계 접근)	$\ F_I(P, K)\ _\infty = 0.99$
2 자유도 $\mu$ 제어기	$\ DF_I(P, K)D^{-1}\ _\infty = 0.90$

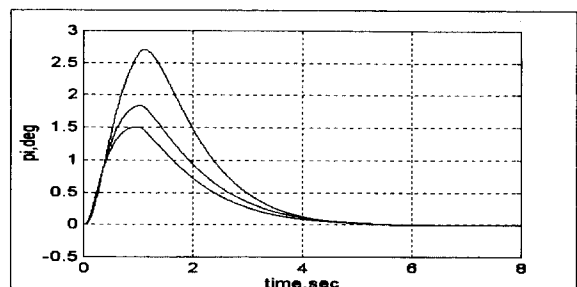
표 3으로부터 출력궤환 제어기와 피드포워드 제어기를 분리하여 구한 2 자유도  $H^\infty$  제어기 뿐만 아니라 불확실성 블럭이 증가함으로 인하여  $\mu$  합성 제어기의 견실성능은 더욱 개선됨을 알 수 있다.

### 3.3 컴퓨터 시뮬레이션

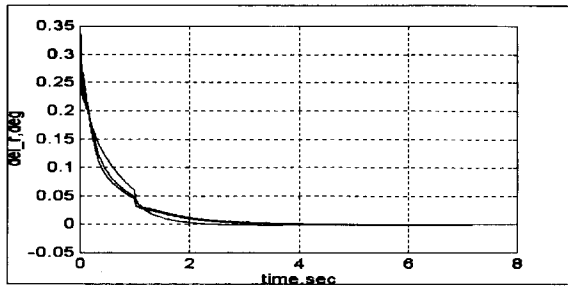
컴퓨터 시뮬레이션에서는 공칭플랜트(비행조건 1)뿐만 아니라 표 1의 계수값 불확실성에서 +50% 불확실성을 가지는 모델(비행조건2)과 -50% 불확실성을 가지는 모델(비행조건 3)에 대해서 시뮬레이션을 수행하였다. 외란으로 구형파 외란을 인가하였으며 초기에 10 deg/sec 크기로 1초동안 존재하는 것으로 하였으며 샘플링 시간은 0.01초로 정하였다. 각각의 비행조건에 대한 2 자유도  $H^\infty$  제어기의 단위계단응답은 그림 3과 같으며  $\mu$  합성을 이용한 제어기는 그림 4와 같다. 시뮬레이션 결과에서 보는 바와 같이 공칭시스템 뿐만아니라 파라미터 불확실성 시스템에 대해서도 외란제거와 명령추종 성능이 우수함을 알 수 있다.



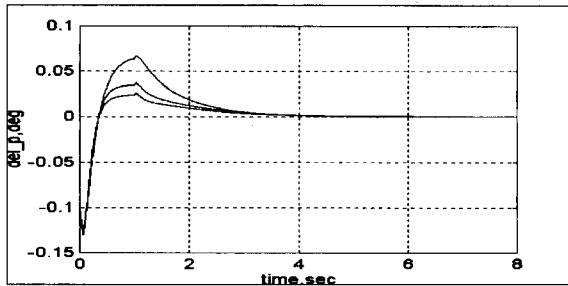
(a)



(b)



(c)

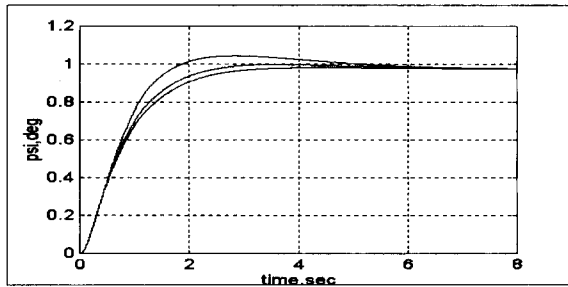


(a)

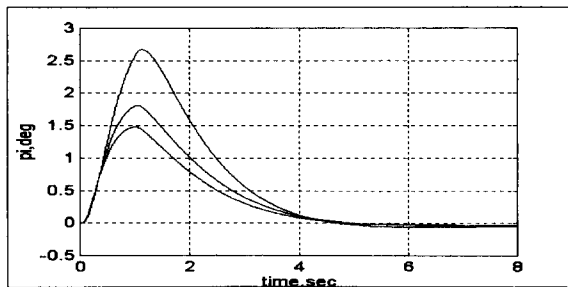
그림 3. 2자유도  $H^\infty$  제어기의 시간응답,  
(a) 요오 시간응답, (b) 롤 시간응답, (c) 요오 제어입력, (d) 롤 제어입력.

Fig. 3. Time response of  $H^\infty$  controller with 2 DOF.

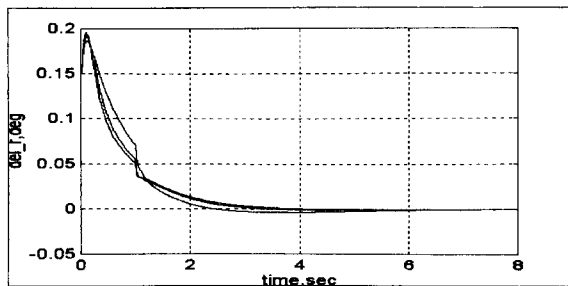
(a) yaw response, (b) roll response, (c) yaw control input, (d) roll control input.



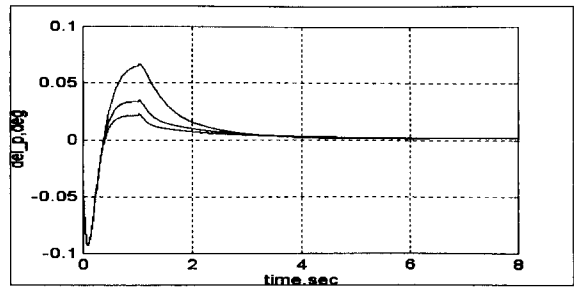
(c)



(b)



(a)



(d)

그림 4. 2 자유도  $\mu$  제어기 제어기의 시간응답.

(a) 요오 시간응답, (b) 롤 시간응답, (c) 요오 제어입력, (d) 롤 제어입력.

Fig. 4. Time response of  $\mu$  controller with 2 DOF.

(a) yaw response, (b) roll response, (c) yaw control input, (d) roll control input.

IV. 결론

본 논문에서는 상태공간모델에서 모든 시스템행렬에 존재하는 파라미터 불확실성과 승산요소 모델 불확실성에 대한 견실 안정성 조건식을 유도하였다. 또한 2자유도 제어기 구조에서 플랜트 불확실성이 존재할 시에도 모델추종 및 외란감쇠에 대해 견실성능을 보장하는 조건식을 유도하였다. 견실성능을 나타내는 페루프 시스템의 전달함수 행렬을 선형분수변환 형태로 나타내어 불확실성을 포함하지 않는 일반화된 플랜트를 유도하여 2자유도  $H^\infty$  제어기를 설계하였다. 정합조건을 사용하여 파라미터 불확실성 구조를 고려하는 것 이외에도 출력제한 제어기와 피드포워드 제어기를 분리하여 구하므로써 제어기 구조를 고려하였다. 또한 파라미터 불확실성을 갖는 6 자유도 운동체의  $H^\infty$  제어기와  $\mu$  제어기를 설계하고 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 파라미터 변화와 외란이 존재할 시에도 페루프 시스템이 만족할만한 성능을 가짐을 보였다. 제어기 설계 결과로 부터 정합조건을 사용하여 불확실성 구조를 고려하는 것 이외에도 제어기 구조를 고려하여 제어기를 설계하므로써 견실성능이 더욱 개선됨을 알 수 있었다.

참고문헌

- [1] J. C. Doyle, K. Glover, K. Khargonekar and B. A. Francis. "State-space solution to standard  $H^2$  and  $H^\infty$  control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 2, pp. 819-999, 1989.
- [2] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for stabilizing controllers that satisfy an  $H^\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity," *System & Control Letters*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [3] D. W. C. Ho, J. Lam and T. W. K. Chan, "Mixed  $H^\infty$  optimisation with model-matching," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 141, no. 5, pp. 329-340, 1994.
- [4] X. P. Li, B. C. Chang, S. S. Banda and H. H. Yeh, "Robust control systems design using  $H^\infty$  optimization theory," *J. of Guidance, control, and Dynamics*, vol. 15, no. 4, pp. 944-952, 1992.
- [5] D. C. McFarlane and K. Glover, "A loop shaping design procedure using  $H^\infty$  synthesis," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp.

759-769, 1992.

[6] D. J. N. Limebeer, E. M. Kasenally, and J. D. Perkins, "On the design of robust two degree of freedom controllers," *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 157-168, 1993.

[7] G. Shi, Y. Zou and C. Yang, "An algebraic approach to robust  $H^\infty$  control via state feedback," *System & Control Letters*, vol. 18, pp. 365-370, 1992.

[8] L. Xie, M. Fu and C. E. de Souza, " $H^\infty$  control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 8, pp. 1253-1256, 1992.

[9] L. Xie and C. E. de Souza, "Robust  $H^\infty$  control for linear systems with norm bounded time-varying uncertainty," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 8, pp. 1188-1191, 1992.

[10] K. Gu, " $H^\infty$  control of systems under norm bounded uncertainties in all system matrices," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1320-1322, 1994.

[11] J. C. Doyle, "Structured uncertainty in control system design," *Proceeding of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, Inst. of Electrical and Electronics Engineers, New York, pp. 260-265, 1985.

[12] C. F. Lin, J. R. Cloutier and J. H. Evers, "High-performance, robust bank-to-turn missile autopilot design," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 1, pp. 46-53, 1995.

[13] H.-H. Yeh, S. S. Banda, S. A. Heise and A. C. Bartlett, "Robust control design with real parameter uncertainty and unmodeled dynamics," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, no. 6, pp. 1117-1125, 1990.

[14] R. M. Redheffer, "On a certain linear fractional transformation," *J. Maths. Phys.*, vol. 39, pp. 269-286, 1960.

[15] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith, " $\mu$ -analysis and synthesis toolbox," Math works Inc. *Matlab User Guide*, 1991.

[16] Bhattachayya, *Dynamic of Marine Vehicle*, John Wiley & Sons, 1978.

부록

보조정리 1의 증명

$$\bar{G}_{wy} = (D_u + H_y \Delta_{p2} E_{u2}) + [C + H_y \Delta_{p2} E_{u2}] \times (sI - A - H_x \Delta_{p1} E_{x1})^{-1} (B_u + H_x \Delta_{p1} E_{u1})$$

여기서

$$\begin{aligned} & (sI - A - H_x \Delta_{p1} E_{x1})^{-1} (B_u + H_x \Delta_{p1} E_{u1}) \\ &= [I - (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} E_{x1}]^{-1} (sI - A)^{-1} [B_u + H_x \Delta_{p1} E_{u1}] \\ &= (sI - A)^{-1} [I + [I - H_x \Delta_{p1} E_{x1} (sI - A)^{-1}]^{-1} \\ & \quad \times H_x \Delta_{p1} E_{x1} (sI - A)^{-1}] (B_u + H_x \Delta_{p1} E_{u1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (sI - A)^{-1} B_u + (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} E_{u1} \\ & \quad + (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} [I - E_{x1} (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1}]^{-1} \\ & \quad \times E_{x1} (sI - A)^{-1} [B_u + H_x \Delta_{p1} E_{u1}] \\ &= (sI - A)^{-1} B_u + (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} E_{u1} \\ & \quad + (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} [I - E_{x1} (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1}]^{-1} \\ & \quad \times E_{x1} (sI - A)^{-1} B_u \\ & \quad - (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} E_{u1} + (sI - A)^{-1} \\ & \quad \times H_x \Delta_{p1} [I - E_{x1} (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1}]^{-1} E_{u1} \\ &= (sI - A)^{-1} B_u + (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1} [I - E_{x1} (sI - A)^{-1} H_x \Delta_{p1}]^{-1} \\ & \quad \times [E_{x1} (sI - A)^{-1} B_u + E_{u1}] \\ &= G_u + G_a \Delta_{p1} (I - G_c \Delta_{p1})^{-1} G_b \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \bar{G}_{wy} &= [C + H_y \Delta_{p2} E_{u2}] [G_u + G_a \Delta_{p1} (I - G_c \Delta_{p1})^{-1} G_b] \\ & \quad + [D_u + H_y \Delta_{p2} E_{u2}] \\ &= (CG_u + D_u) + [CG_a \Delta_{p1} \quad H_y \Delta_{p2}] \\ & \quad \times \begin{bmatrix} (I - G_c \Delta_{p1})^{-1} G_b \\ E_{u2} G_a \Delta_{p1} (I - G_c \Delta_{p1})^{-1} G_b + E_{u2} G_u + E_{u2} \end{bmatrix} \\ &= (CG_u + D_u) + [CG_a \Delta_{p1} \quad H_y \Delta_{p2}] \\ & \quad \times \begin{bmatrix} I - G_c \Delta_{p1} & 0 \\ -E_{u2} G_a \Delta_{p1} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_b \\ E_{u2} G_u + E_{u2} \end{bmatrix} \\ &= [CG_u + D_u] + [CG_a \quad H_y] \begin{bmatrix} \Delta_{p1} & 0 \\ 0 & \Delta_{p2} \end{bmatrix} \\ & \quad \times (I - \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ E_{u2} G_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{p1} & 0 \\ 0 & \Delta_{p2} \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} G_b \\ E_{u2} G_u + E_{u2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이와 같은 방법으로

$$\begin{aligned} \bar{G}_{wy} &= [CG_w + D_w] + [CG_a \quad H_y] \begin{bmatrix} \Delta_{p1} & 0 \\ 0 & \Delta_{p2} \end{bmatrix} \\ & \quad \times (I - \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ E_{u2} G_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{p1} & 0 \\ 0 & \Delta_{p2} \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} G_d \\ E_{u2} G_w + E_{u2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. ■

보조정리 2의 증명

$\tilde{G}_u, \tilde{G}_a, \tilde{G}_c, \tilde{G}_b$  를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_u &= CG_u + D_u, & \tilde{G}_a &= [CG_a \quad H_y] \\ \tilde{G}_c &= \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ E_{u2} G_a & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{G}_b &= \begin{bmatrix} G_b \\ E_{u2} G_u + E_{u2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

보조정리 1로 부터

$$\bar{G}_{du} = (1 + \Delta_M) [\tilde{G}_u + \tilde{G}_a \Delta_p (I - \tilde{G}_c \Delta_p)^{-1} \tilde{G}_b]$$

이고,  $G_{du}$ 를 선형분수변환하면

$$\begin{aligned} F_u(G_{du}, \Delta) &= G_{u2} + G_{21} \Delta (I - G_{11} \Delta)^{-1} G_{u1} \\ &= \tilde{G}_u + [\tilde{G}_a \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_M \end{bmatrix} \\ & \quad \times (I - \begin{bmatrix} \tilde{G}_c & 0 \\ \tilde{G}_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_M \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_b \\ \tilde{G}_u \end{bmatrix} \\ &= \tilde{G}_u + [\tilde{G}_a \Delta_p \quad \Delta_M] \begin{bmatrix} I - \tilde{G}_c \Delta_p & 0 \\ -\tilde{G}_a \Delta_p & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_b \\ \tilde{G}_u \end{bmatrix} \\ &= \tilde{G}_u + [\tilde{G}_a \Delta_p \quad \Delta_M] \begin{bmatrix} (I - \tilde{G}_c \Delta_p)^{-1} \tilde{G}_b \\ \tilde{G}_a \Delta_p (I - \tilde{G}_c \Delta_p)^{-1} \tilde{G}_b + \tilde{G}_u \end{bmatrix} \\ &= (1 + \Delta_M) [\tilde{G}_u + \tilde{G}_a \Delta_p (I - \tilde{G}_c \Delta_p)^{-1} \tilde{G}_b] \end{aligned}$$

이므로  $\bar{G}_{du} = F_u(G_{du}, \Delta)$ 가 됨을 알 수 있다.

$\bar{G}_{du}$ 에 대한 증명도 같은 방법으로 구해진다. ■

**이 갑 래**

제어·자동화·시스템공학 논문지 제2권, 제1호 참조.

**박 흥 배**

제어·자동화·시스템공학 논문지 제2권, 제1호 참조.

**오 도 창**

1967년 1월 16일생. 1991년 경북대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1993년 동 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사). 1993년 ~ 현재 동 대학원 전자공학과 박사과정. 연구분야는 견실제어, 모델 및 제어기 차수축소, 유도항법제어 등.