

論文97-34S-11-2

나카가미 페이딩 채널에서 M-ary QAM의 심벌 오류 확률

(Probability of Symbol Error for M-ary QAM in Nakagami Fading Channel)

趙慶國*, 尹東源**, 韓榮烈***

(Kyong-Kuk Cho, Dong-Weon Yoon, and Young-Yearl Han)

요 약

나카가미 m -분포는 다양한 페이딩 환경을 모델링하며 다른 분포에 비해 실제 측정 결과에 근접한다고 알려져 있다. 본 논문은 주파수 비선택적 느린 나카가미 페이딩과 부가성 백색 가우시안 잡음하에서 정방형 신호 배치도를 갖는 M-ary QAM의 심벌 오류 확률을 유도한다. 나카가미 페이딩 지수가 정수인 경우에 유한 급수로 구성된 결과식이 된다.

Abstract

The Nakagami m -distribution is used to model different fading environments and shown to fit experimental results m more accurately than other distributions. In this paper, the probability of symbol error for M-ary QAM with square signal constellation in frequency-nonselective slow Nakagami fading and additive white Gaussian noise is derived. When Nakagami fading index is integer, the derived result leads to the closed-form of a finite series.

I. 서 론

디지털 이동통신시스템은 다양한 이동통신 서비스를 제공하면서 급속히 발전해 오고 있다. 하지만, 보다 깨끗한 통화 품질과 더불어 데이터 통신, 화상 통신과 같은 대량의 정보 전송 서비스를 제공하기 위해서 새로운 전송 시스템을 필요로 한다. 또한 현재 다양한 이동통신 서비스를 제공하기 위한 이동통신 서비스용 주파수의 대역이 제한되어 있다. 차세대 이동통신시스

템은 이러한 이동통신 서비스를 수용하기 위하여 대역폭 효율이 우수하며 고속 데이터 전송이 용이한 변조 방식을 채택하여야 한다.

고속 데이터 전송과 대역폭 효율이 우수한 변조 방식 중 하나인 QAM(Quadrature Amplitude Modulation)은 차세대 이동통신시스템의 변조 방식으로 권고되고 있으며 [1], 현재 이동통신시스템에서 QAM의 적용을 위한 연구가 한창 진행중이다. QAM은 반송파의 진폭과 위상 성분에 정보를 전송하는 방식인데, 유선 통신망과는 달리 무선 이동통신 환경에서는 페이딩 현상으로 인한 반송파의 위상과 진폭이 동시에 변동된다. 따라서, 디지털 이동통신시스템은 다치 레벨(multi-level) 변조 방식에 속한 QAM보다는 BPSK(Binary Phase Shift Keying), QPSK(Quadrature Phase Shift Keying)나 MSK(Minimum Shift Keying)와 같은 동일 포락선 변조 방식이 주로 사용된다. 그러나, 이러한 변조 방식들은

* 正會員, LG 情報通信

(LG Information & Communications)

** 正會員, 大田大學校 情報通信工學科

(Dept. of Info. & Comm. Eng., DaeJeon Univ.)

*** 正會員, 漢陽大學校 電子通信工學科

(Dept. of Elect. & Comm. Eng., Hanyang Univ.)

接受日字: 1996年9月20日, 수정완료일: 1997年9月24日

고속, 대용량의 데이터 전송에는 QAM보다 대역폭 효율 면에서 떨어진다. 반송파에 파일럿 톤(pilot tone)을 추가하거나 파일럿 심볼(pilot symbol) 기법등을 사용하여 페이딩 현상을 정밀하게 보상시킬 수 있다면 심한 페이딩을 겪고 있는 이동통신시스템에서도 QAM의 채택이 가능하다^{[2], [3]}.

디지털 통신 시스템에서 전송 데이터에 대한 오류 확률은 시스템의 성능 분석에 중요한 기준이 되는데 이제까지 나카가미 페이딩 환경에서 M-ary QAM의 일반화된 오류 확률은 유도되지 않았다. 본 논문에서는 주파수 비선택적 느린 나카가미 페이딩 채널에서 정방형 신호점 배치를 갖는 M-ary QAM의 심볼 오류 확률을 정확한 수식으로 유도한다.

II. 나카가미 페이딩 채널

나카가미 m -분포는 M. Nakagami가 제안한 것으로 나카가미 n -분포와 나카가미 q -분포에서 쉽게 유도된다^[4]. 이론적 측면에서 나카가미 m -분포의 수신된 신호는 임의의 계수와 임의의 위상을 갖는 벡터의 합이 된다. 나카가미 m -분포는 내부적으로 레일리 분포를 포함하고 있으며 단축 가우시안 분포에서 비 페이딩 분포에 이르는 다양한 페이딩 환경을 갖는 전송 채널을 모델링할 수 있다. 또한, 나카가미 m -분포는 라이시안 분포와 대수정규 분포에 대한 근사식을 제공한다^{[4], [5]}.

나카가미 m -분포는 레일리(Rayleigh), 대수정규(log-normal)나 라이시안(Rician) 분포에 비교하여 수학적 해석과 실제 측정 자료의 분석에 있어 훨씬 용이하다. 또한, 나카가미 m -분포는 도심의 다중 전파경로를 갖는 전송 채널의 모델로 가장 적합한 것으로 알려져 있다^[6]. 일반적으로 레일리 페이딩 모델은 수신기를 기준으로 비교적 작은 범위를 실질적인 전송 채널로 간주하고 있어서 도심의 대형 빌딩이나 언덕, 산과 같은 지형물에 의해 발생하는 전파 음영(shadowing) 효과 등의 전파 특성을 다루지 못한다.

디지털 통신에서 주파수 비선택적 느린 나카가미 페이딩 채널에서 수신 신호는 식 (1)로 표시된다.

$$r(t) = ae^{-j\phi} s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (1)$$

여기서 $s(t)$ 는 송신 신호이며 $n(t)$ 는 양측 주파수

전력밀도(double-sided power spectral density)가 $N_0/2$ 인 부가성 백색 가우시안 잡음(AWGN)이며 ϕ 는 전송 채널의 위상 천이로 $[0, 2\pi]$ 범위 내에서 균일한 확률 분포를 가진다. 그리고 α 는 전송 채널의 감쇄 계수(attenuation factor)이며 α 에 대한 통계적 특성은 나카가미 m -분포를 가진다.

나카가미 m -분포를 갖는 α 에 대한 확률 밀도 함수(probability density function)는 식 (2)로 표시된다^[4].

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \alpha^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} \alpha^2\right), \quad \alpha \geq 0 \quad (2)$$

식 (2)에서 Ω 는 α 의 이차 모멘트(second order moment)로 식 (3)의 관계를 성립한다.

$$\Omega = E[\alpha^2] \quad (3)$$

그리고, 식 (2)에서 m 은 페이딩 지수(fading index)로 정의되며 페이딩의 심한 정도를 나타낸다.

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(\alpha^2 - \Omega)^2]}, \quad m \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

나카가미 m -분포를 갖는 페이딩 채널에서 $m = 0.5$ 이면 이 전송 채널은 단축 가우시안 채널이고 $m = 1$ 이면 레일리 페이딩 채널이 되며 m 이 무한대(∞)가 되면 페이딩이 없는 채널이 된다. 따라서, m 이 1보다 작은 값을 갖는 전송 채널은 레일리 페이딩보다 심각한 페이딩 채널을 나타내며 m 이 1보다 큰 값을 갖는 전송 채널은 페이딩 현상이 줄어든 전송 채널을 의미한다.

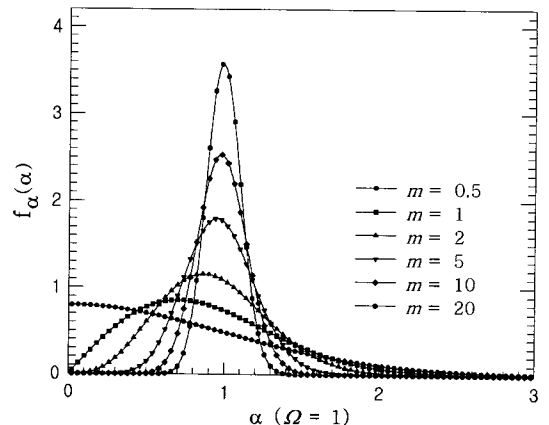


그림 1. 나카가미 m -분포의 확률 밀도 함수

Fig. 1. Probability density function of Nakagami m -distribution.

그림 1은 식 (2)에서 $\Omega = 1$ 로 정규화된 나카가미 m -분포의 확률 밀도 함수를 나타내며 페이딩 지수가 커짐에 따라 감쇄 계수가 $\Omega = 1$ 에 수렴함을 볼 수 있다.

III. M-ary QAM의 심볼 오류 확률

M-ary QAM은 서로 독립된 PAM 신호를 직교 반송파에 부가하는 변조 방식이므로 M-ary QAM의 송신 신호는 일반적으로 식 (5)로 표시된다.

$$s(t) = A_I \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos 2\pi f_c t - A_Q \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin 2\pi f_c t, \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (5)$$

여기에서 A_I 는 동상(in phase)의 데이터 성분이며 A_Q 는 직교 위상(quadrature phase)의 데이터 성분을 나타낸다. 각각 \sqrt{M} 개의 신호 레벨을 가지며 전송 데이터에 따라 $-(\sqrt{M}-1)d, -(\sqrt{M}-3)d, \dots, (\sqrt{M}-1)d$ 의 크기를 가진다. 여기서 d 는 송신 신호 간 최소 거리(Minimum Euclidean distance)의 1/2에 해당한다.

나카가미 페이딩 채널을 통과한 수신 신호는 식 (1)과 같이 표현된다. 이 전송 채널은 수 신호 주기동안 채널 감쇄 계수를 상수로 취급할 수 있는 느린 페이딩 환경이며 수신기는 이 전송 채널의 감쇄 계수를 정확하게 추정한다고 가정한다. 따라서, M-ary QAM의 판정 경계는 수신기에서 추정된 채널 감쇄 계수에 따라 변동된다.

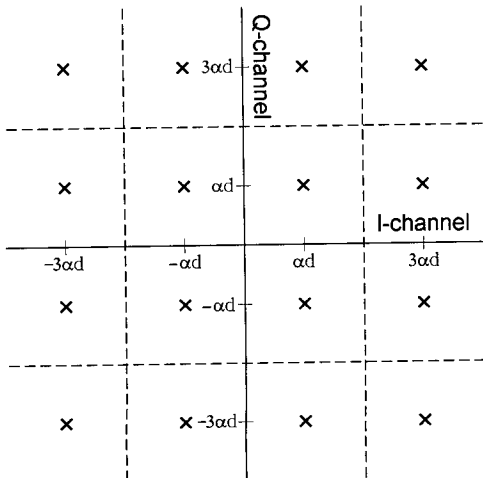


그림 2. 16 QAM의 수신 신호점
Fig. 2. Received signal constellation of 16 QAM.

그림 2는 16-QAM의 수신 신호점을 나타낸다. 16-QAM의 판정 경계는 그림 2에서 보듯이 I-channel과 Q-channel에서 각각 $-2\alpha d, 0, 2\alpha d$ 가 된다.

주어진 감쇄 계수 α 에 대한 M-ary QAM의 조건부 심볼 오류 확률은 다음과 같다^[7, 5-2-79 p. 280].

$$P_s(e|a) = \frac{M-1}{M} - \frac{2(\sqrt{M}-1)}{M} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha d}{\sqrt{N_0}}\right) - \frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M} \operatorname{erf}^2\left(\frac{\alpha d}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (6)$$

여기에서 $\operatorname{erf}(\cdot)$ 는 에러 함수(error function)이며 식 (7)로 정의된다.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (7)$$

또한, M-ary QAM의 순시 신호 대 잡음 비(instantaneous SNR)는

$$\gamma_b = \frac{a^2 E_b}{N_0} = \frac{2(M-1) a^2 d^2}{3(\log_2 M) N_0} \quad (8)$$

이 된다. 식 (8)에서 E_b 는 신호의 페이딩 현상이 존재하지 않고 단지 부가성 백색 잡음만 존재하는 전송 채널($\alpha = 1$)에서 M-ary QAM의 평균 에너지에 해당한다.

나카가미 페이딩 채널에서 심볼 오류 확률은 식 (6)의 감쇄 계수에 대한 조건부 오류 확률을 식 (2)의 감쇄 계수에 대한 확률 밀도 함수로 적분을 취함으로써 얻어진다^[7].

$$\overline{P}_s(e) = \int_0^\infty P_s(e|a) f(a) da \quad (9)$$

식 (9)는 식 (10)으로 표현된다.

$$\overline{P}_s(e) = k_1 + k_2 + k_3 \quad (10)$$

여기서 식 (10)의 k_1 은

$$\begin{aligned} k_1 &= \int_0^\infty \frac{M-1}{M} \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m a^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} a^2\right) da \\ &= \frac{M-1}{M} \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다. 그리고, 식 (10)의 k_2 는

$$k_2 = - \int_0^\infty \frac{2(\sqrt{M}-1)}{M} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha d}{\sqrt{N_0}}\right) \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m a^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} a^2\right) da \quad (12)$$

가 되며 식 (12)를 전개하기 위하여 다음의 관계식을 이용한다^[8, 6.286 p. 649].

$$\int_0^{\infty} [1 - \text{erf}(\beta x)] x^{\nu-1} e^{-\mu x^2} dx = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi} \nu \beta^{\nu}} {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{\nu}{2}+1; \frac{\mu^2}{\beta^2}\right) \quad (13)$$

여기서 ${}_2F_1$ 는 초기하 함수(Hypergeometric Function)이며 다음과 같은 무한 급수로 표현된다^[8, 9.100 p. 1039].

$${}_2F_1(a_1, a_2; \beta_1; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (a_2)_j}{(\beta_1)_j} \frac{x^j}{j!} \quad (14)$$

$$(a)_j = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$$

식 (12)는 식 (13)을 이용하면 다음의 결과식을 얻는다.

$$k_2 = -\frac{2(\sqrt{M}-1)}{M} + \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{\pi M}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{mN_0}{\Omega d^2}\right)^m {}_2F_1\left(m, m+\frac{1}{2}; m+1; -\frac{mN_0}{\Omega d^2}\right) \quad (15)$$

그리고 식 (10)의 k_3 는

$$k_3 = -\int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M} \text{erf}^2\left(\frac{a d}{\sqrt{N_0}}\right) \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m a^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} a^2\right) da \quad (16)$$

이되며 Appendix A를 참조하면 식 (17)이 된다.

$$k_3 = -\frac{2(\sqrt{M}-1)^2}{\sqrt{\pi M}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{mN_0}{\Omega d^2}\right)^i \frac{1}{\sqrt{\frac{mN_0}{\Omega d^2}+1}} + \frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\pi M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left(\frac{mN_0}{\Omega d^2}\right)^i {}_2F_1\left(i+\frac{1}{2}, i+1; i+\frac{3}{2}; -\frac{mN_0}{\Omega d^2}\right) \quad (17)$$

최종적으로 정수의 페이딩 지수를 갖는 나카가미 페이딩 채널에서 M-ary QAM의 심볼 오류 확률은 식 (18)이 된다.

$$\bar{P}_b(e) = \frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M} + \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{\pi M}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{mc}{\gamma_b}\right)^m {}_2F_1\left(m, m+\frac{1}{2}; m+1; -\frac{mc}{\gamma_b}\right) - \frac{2(\sqrt{M}-1)^2}{\sqrt{\pi M}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{mc}{\gamma_b+mc}\right)^i \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+mc}} + \frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\pi M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left(\frac{mc}{\gamma_b+mc}\right)^i {}_2F_1\left(i+\frac{1}{2}, i+1; i+\frac{3}{2}; -\frac{mc}{\gamma_b}\right) \quad (18)$$

여기서 M-ary QAM의 평균 신호 대 잡음 비는

$$\frac{\bar{\gamma}_b}{N_0} = \frac{E[a^2 E_b]}{N_0} = \frac{2(M-1)\Omega d^2}{3(\log_2 M)N_0} \quad (19)$$

가 되며 식 (18)에서 c 는

$$c = \frac{2(M-1)}{3 \log_2 M} = \frac{\bar{\gamma}_b}{\Omega d^2} N_0 \quad (20)$$

으로 정의한다.

위에서 유도한 식 (18)의 검증을 위하여 식 (18)에 $m=1$ 을 대입하고 Appendix B와 Appendix C를 이용하면, 참고문헌^[9]와 같은 레일리 페이딩 채널에서 M-ary QAM의 심볼 오류 확률을 얻을 수 있다.

$$\bar{P}_b(e) = \frac{M-1}{M} - \frac{2(\sqrt{M}-1)}{M} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+c}} - \frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\pi M} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+c}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+c}} \quad (21)$$

또한 식 (18)에 $m=1, M=4$ 를 대입하면 참고문헌^{[10], [11]}에서와 같은 레일리 페이딩 채널에서 QPSK의 심볼 오류 확률이 됨을 볼 수 있다.

$$\bar{P}_b(e) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+2}} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+2}} \quad (22)$$

식 (18)에서 페이딩 지수 m 이 1인 경우는 식 (21)이 됨을 보았으며, m 이 2 이상의 정수를 갖는 나카가미 페이딩 채널에서 M-ary QAM의 심볼 오류 확률은 Appendix B와 Appendix C를 이용하면 다음과 같이 유한 급수 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{P}_b(e) = \frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M} - \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{\pi M}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i)} \left[\left(\frac{\gamma_b}{\gamma_b+mc}\right)^{i+\frac{1}{2}} - 1\right] - \frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\pi^{3/2} M} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+mc}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_b+mc}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{mc}{\gamma_b+mc}\right)^i - \frac{2(\sqrt{M}-1)^2}{\pi M} \sum_{i=0}^{\infty} (mc)^i \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} \frac{\gamma_b(\gamma_b+mc)^{k-i}}{(2\gamma_b+mc)^{k+1}} \quad (23)$$

식 (18)과 (23)은 나카가미 페이딩 채널에서 정방형 신호점 배치를 갖는 M-ary QAM의 심볼 오류 확률의 일반식으로 성능 분석의 이론적 척도를 제공한다.

그림 3과 그림 4에는 나카가미 페이딩 채널에서 $M=4, 16, 64, 256$ 을 갖는 M-ary QAM의 심볼 오류 확률을 나타내었다. 그림 3에는 $m=1, 2$ 의 나카가미 m -분포를 갖는 전송 채널에서 M-ary QAM의 심볼 오류 확률을 나타내었으며, 그림 4에는 그림 3에서 $m=1, 2$ 인 채널 환경과 비교하여 페이딩 지수($m=10, \infty$)가 커짐에 따라 상대적으로 M-ary QAM의 성능이 좋아짐을 보여주고 있다.

그림 5와 그림 6은 페이딩 지수, $m=1, 2, 5, 10, \infty$ 에 대하여 각각 16-QAM과 64-QAM의 심볼 오

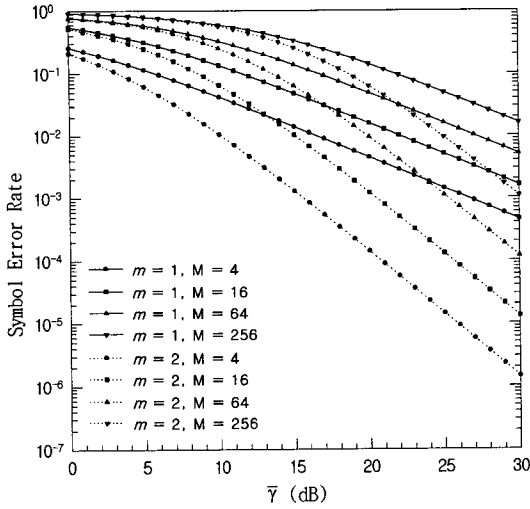


그림 3. $m = 1, 2$ 에서 M-ary QAM의 SER
Fig. 3. SER of M-ary QAM for $m = 1, 2$.

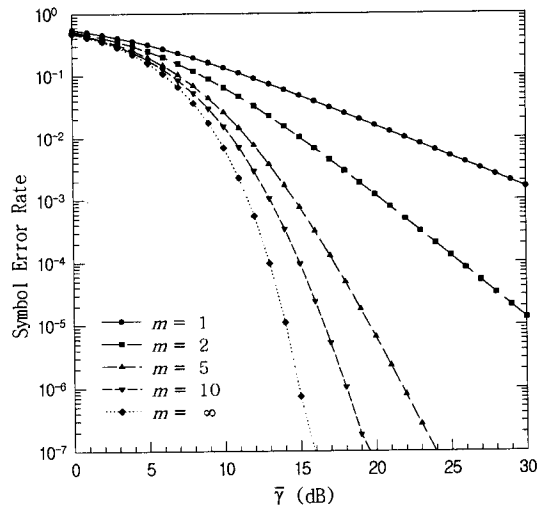


그림 5. 나카가미 페이딩 채널에서 16 QAM의 SER
Fig. 5. SER for 16 QAM signal in Nakagami fading channel.

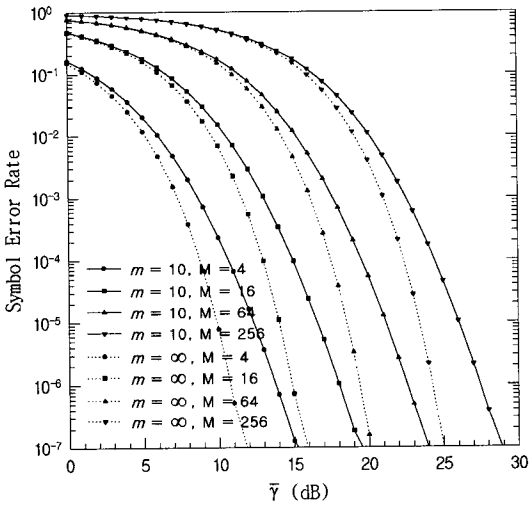


그림 4. $m = 10, \infty$ 에서 M-ary QAM의 SER
Fig. 4. SER of M-ary QAM for $m = 10, \infty$.

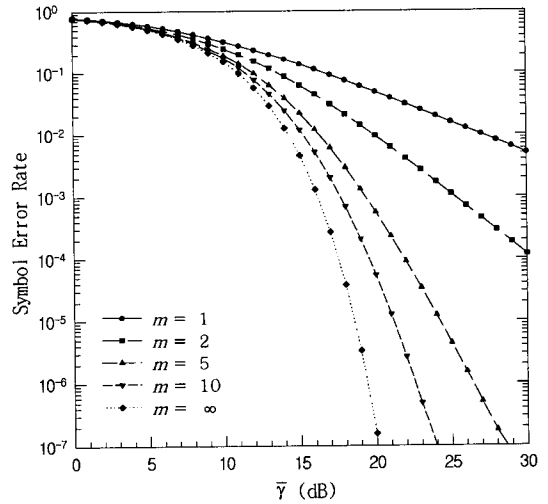


그림 6. 나카가미 페이딩 채널에서 64 QAM의 SER
Fig. 6. SER for 64 QAM signal in Nakagami fading channel.

류 확률을 나타내었다. 페이딩 지수가 커짐에 따라 페이딩 현상이 점차 사라지고 단지 부가성 백색 잡음만 존재하는 전송 채널에서 16-QAM과 64-QAM의 심볼 오류 확률에 접근함을 볼 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 주파수 비선형적 느린 나카가미 페이

딩 채널에서 정방형 신호점 배치를 갖는 M-ary QAM의 심볼 오류 확률에 대한 정확한 수식을 유도하였다. 나카가미 페이딩 채널에서 페이딩 지수가 정수일 경우에 M-ary QAM의 심볼 오류 확률을 유한 급수식 형태로 유도하였다. 이는 페이딩 채널에서 M-ary QAM에 대한 성능 분석의 기초를 제공할 수 있다. 본 논문에서는 수신기에서 페이딩 채널의 감쇄 계수를 정확하게 추정한다는 가정 하에서 M-ary QAM에 대

한 이론적인 성능 분석을 하였다. 유도된 오류 확률을 페이딩 지수 m 과 신호의 심볼수 M 을 변화시켜가며 성능을 비교 분석하였으며 이를 통하여 페이딩 지수가 커짐에 따라 페이딩이 존재하지 않는 전송 채널에서 M-ary QAM의 심벌 오류 확률에 접근함을 확인할 수 있었다. 유도된 결과는 가장 이상적인 결과이며 앞으로 이동통신 채널에 QAM을 적용시키기 위하여는 여러 페이딩 보상 기법들이 연구되어 실제로 적용되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] W. T. Webb and L. Hanzo, *Modern Quadrature Amplitude Modulation*, IEEE Press, 1994.
- [2] S. Sampei and T. Sunaga, "Rayleigh Fading Compensation for QAM in Land Mobile Radio Communications," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-42, no. 2, pp. 137-147, May 1993.
- [3] J. P. McGeehan and A. J. Bateman, "Phase-locked Transparent Tone in Band (TTTB): a new spectrum configuration particularly suited to the transmission of data over SSB mobile radio," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-32, no. 1, pp. 81-87, Jan. 1984.
- [4] M. Nakagami, "The m -distribution, a General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. G. Hoffman, Ed., Oxford, England: Pergamon Press, 1960.
- [5] P. J. Crepeau, "Uncoded and Coded Performance of MFSK and DPSK in Nakagami Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-40, no. 3, pp. 487-493, Mar. 1992.
- [6] H. Suzuki, "A Statistical Model for Urban Propagation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, no. 7, pp. 673-680, Jul. 1977.
- [7] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1995.
- [8] I. S. Gradshteyn, and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*,

Academic, 1980.

- [9] K. K. Cho, D. W. Yoon, and Y. Y. Han, "Error Probability for M-ary QAM on a Rayleigh Fading Channel," *Proc. of ITC-CSCC '96*, pp. 428-431, Jul. 1996.
- [10] R. Krishnamurthi and S. C. Gupta, "The Error Performance of Gray Encoded QPSK and 8-PSK Schemes in a Fading Channel with Cochannel Interference," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-41, no. 12, pp. 1773-1776, Dec. 1993.
- [11] C. K. Pauw and D. L. Schilling, "Probability of Error for M-ary PSK and DPSK on a Rayleigh Fading Channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-36, no. 6, pp. 755-756, Jun. 1988.

부 록

Appendix A

식 (16)의 k_3 는 m 이 정수일 경우에 부분적분을 이용하면, 식 (A.1)을 얻는다.

$$k_3 = -\frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{a d}{\sqrt{N_0}}\right) \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a^{2i}}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{m}{Q}\right)^i \exp\left(-\frac{m}{Q} a^2\right) \right\} \right]_{a=0}^{\infty} + \frac{4d}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{a d}{\sqrt{N_0}}\right) \exp\left(-\left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{Q}\right) a^2\right) \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a^{2i}}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{m}{Q}\right)^i \right\} da \quad (\text{A.1})$$

식 (A.1)을 정리하면 식 (A.2)가 된다.

$$k_3 = -\frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\sqrt{\pi} M} \frac{d}{\sqrt{N_0}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{m}{Q}\right)^i \left\{ \int_0^{\infty} a^{2i} \exp\left[-\left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{Q}\right) a^2\right] da - \int_0^{\infty} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a d}{\sqrt{N_0}}\right)\right] a^{2i} \exp\left[-\left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{Q}\right) a^2\right] da \right\} \quad (\text{A.2})$$

식 (A.2)는 다음 식으로 표현된다.

$$k_3 = -\frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\sqrt{\pi} M} \frac{d}{\sqrt{N_0}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{m}{Q}\right)^i [k_{31} - k_{32}] \quad (\text{A.3})$$

식 (A.3)의 k_{31} 은 식 (A.4)가 된다.

$$k_{31} = \int_0^{\infty} a^{2i} \exp\left[-\left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{Q}\right) a^2\right] da \quad (\text{A.4})$$

식 (A.4)의 적분식을 전개하면 다음과 같다.

$$k_{31} = \frac{\Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right)}{2 \left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{Q}\right)^i \sqrt{\left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{Q}\right)}} \quad (\text{A.5})$$

그리고, 식 (A.3)의 k_{32} 은 식 (A.6)이 된다.

$$k_{32} = \int_0^\infty \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha d}{\sqrt{N_0}} \right) \right\} \alpha^{(2i+1)-1} \exp \left\{ - \left(\frac{d^2}{N_0} + \frac{m}{\Omega} \right) \alpha^2 \right\} d\alpha \quad (\text{A.6})$$

식 (A.6)의 적분식을 전개하면 다음과 같다 [8, 6.286 p. 649]

$$k_{32} = \frac{\Gamma(i+1)}{\sqrt{\pi}(2i+1)} \left(\frac{\sqrt{N_0}}{d} \right)^{2i+1} {}_2F_1 \left(i + \frac{1}{2}, i+1; i + \frac{3}{2}; -\frac{mN_0}{\Omega d^2} - 1 \right) \quad (\text{A.7})$$

식 (A.5)과 식 (A.7)을 이용하면 식 (17)과 같은 k_3 를 얻을 수 있다.

Appendix B

$$z^m {}_2F_1 \left(m, m + \frac{1}{2}; m+1; -z \right) = \sum_{i=0}^\infty \frac{m}{m+i} \frac{(2m-1+2i)!!}{2^i(2m-1)!!} \frac{(-1)^i}{i!} z^{m+i} \quad (\text{B.1})$$

식 (B.1)을 $G(z) = z^m {}_2F_1 \left(m, m + \frac{1}{2}; m+1; -z \right)$ 로 정의한다면, $G(0) = 0$ 이며 식 (B.2)와 같은 적분식이 된다.

$$G(z) = m \int_0^z x^{m-1} \left\{ \sum_{i=0}^\infty \frac{(2m-1+2i)!!}{2^i(2m-1)!!} \frac{(-x)^i}{i!} \right\} dx + G(0) \quad (\text{B.2})$$

식 (B.2)의 무한 급수는 다음 식이 된다.

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{(2m-1+2i)!!}{2^i(2m-1)!!} \frac{(-x)^i}{i!} = (x+1)^{-m-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})$$

식 (B.3)을 이용하면 식 (B.2)는 식 (B.4)가 된다.

$$G(z) = \int_0^z m x^{m-1} (x+1)^{-\frac{2m+1}{2}} dx \quad (\text{B.4})$$

식 (B.4)의 적분식을 전개하면 다음과 같다 [8, 2.221 p. 73]

$$\begin{aligned} G(z) &= -m \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{i+\frac{1}{2}} \binom{m-1}{i} \left[(z+1)^{-i-\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &= -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{i+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i)} \left[(z+1)^{-i-\frac{1}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Appendix C

$$z^{i+\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(i + \frac{1}{2}, i+1; i + \frac{3}{2}; -z \right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{i+\frac{1}{2}}{i+\frac{1}{2}+k} \frac{(i+k)!}{i!} \frac{(-1)^k}{k!} z^{i+\frac{1}{2}+k} \quad (\text{C.1})$$

식 (C.1)을 $H(z) = z^{i+\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(i + \frac{1}{2}, i+1; i + \frac{3}{2}; -z \right)$ 로 정의한다면, $H(0) = 0$ 이며 식 (C.2)와 같은 적분식이 된다.

$$H(z) = \int_0^z \left(i + \frac{1}{2} \right) x^{i-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(i+k)!}{i!} \frac{(-x)^k}{k!} dx + H(0) \quad (\text{C.2})$$

식 (C.2)의 무한 급수는 다음 식이 된다.

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(i+k)!}{i!} \frac{(-x)^k}{k!} = (x+1)^{-i-1} \quad (\text{C.3})$$

식 (C.3)을 이용하면 식 (C.2)는 식 (C.4)가 된다.

$$H(z) = \int_0^z \left(i + \frac{1}{2} \right) x^{i-\frac{1}{2}} (x+1)^{-i-1} dx \quad (\text{C.4})$$

식 (C.4)의 적분식을 전개하면 다음과 같다 [8, 2.211, 2.212 p. 71]

$$H(z) = \begin{cases} \tan^{-1}\sqrt{z}, & i = 0 \\ -\frac{\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(i+1)} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{z}{z+1} \right)^{k+1} \\ \quad + \frac{2\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(i+1)} \tan^{-1}\sqrt{z}, & i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

저 자 소 개

趙慶國(正會員)

1972년 9월 13일생. 1995년 2월 한양대학교 전자통신공학과 공학사. 1997년 2월 한양대학교 전자통신공학과 공학석사. 1997년 1월 - 현재 LG정보통신연구원. 주관심 분야 : 디지털 변복조, 확산대역

尹東源(正會員) 第 32卷 A編 第 7號 參照

현재 대전대학교 정보통신공학과 전임강사

韓榮烈(正會員) 第 32卷 A編 第 7號 參照

현재 한양대학교 전자통신공학과 교수