

論文97-34S-10-5

# PID 제어를 갖는 구간 플랜트의 강인안정화 기법

## (A Method of Robust Stabilization of the Interval Plants with a PID Controller)

姜煥一 \*

(Hwan Il Kang)

## 요 약

이 논문에서 PID 제어를 이용하여 구간플랜트를 안정화시키는 방법을 제안한다. 구간플랜트를 안정화시키기 위하여 PID 제어기의 분자 다항식의 계수의 부호에 따라, 최소위상 PID 제어기인 경우 8개의 다항식들이 안정하면 되고 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 각각 또 다른 8개의 다항식들이 안정하면 된다. 특히 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 구간플랜트의 강인 안정화의 필요충분 조건이 됨을 보인다.

## Abstract

In this paper, we consider methods of robust stabilization of the interval plant with a PID controller. Suppose that we know apriori a sign of the coefficients of the numerator of the PID controller. Under this condition, it suffices to make eight polynomials stable for robust stabilization of the interval plant with a minimum phase PID controller. In addition, with a nonminimum phase PID controller, it suffices to make different eight polynomials stable. Especially, with the nonminimum phase PID controller it is shown that stabilization of eight plants is necessary and sufficient for robust stabilization of the interval plants.

## I. 머리말

Kharitonov에 의해 구간 다항식(interval polynomial)의 안정도<sup>[1]</sup>에 관한 연구를 출발점으로 하여 구간플랜트(interval plant)의 강인안정(robust stability)에 관한 연구는 매개변수를 이용한 강인 제어 시스템의 연구에서 중요한 연구분야이다. 이에 관한 일반적인 연구결과의 모음은 Barmish와 Kang의 논문<sup>[2]</sup>에 잘 나타나 있다. 이 논문의 동기는 단일입력 단일출력 선형시불변 제어시스템의 매개변수가 불확실하다는 사실에서 출발한다. 즉 어떤 주어진 구간 내에 매개변수의 한계만이 알려진다는 것이다. 이 사

실에서 구간플랜트를 정의할 수 있다. 즉 구간플랜트의 분모 다항식과 분자 다항식이 구간 다항식으로 주어진다. 구간플랜트를 안정화시키기 위해 다음 폐환구조를 택할 수 있다. 즉 구간플랜트와 제어기가 단위 부캐환(unity negative feedback)으로 직렬로 연결되어 있다고 가정한다. 일차보상기를 이용한 구간플랜트의 강인안정화방법은 16개의 Kharitonov 플랜트만 안정화시키면 된다<sup>[3]</sup>. 이차이상의 보상기를 이용할 때 제어기의 분모와 분자 다항식이 다같이 소위 교차 후르비츠 소행렬 조건(alternating Hurwitz minor condition)<sup>[4]</sup>이나 Bhattacharyya의 조건<sup>[5]</sup>을 만족하면 구간플랜트의 강인안정화방법은 16개의 Kharitonov 플랜트만 안정화시키면 된다. 그러나 이 방법은 제어기가 비최소위상(nonminimum phase)이거나 불안정하다는 단점이 있다. 또한 32개의 모서리 정리(segment lemma)<sup>[6]</sup>를 이용하면 제어기가 비최

\* 正會員, 明知大學校 電氣電子工學部

(Dept. of Elec. &amp; Electronics Eng., Myong Ji Univ.)

接受日字: 1997年3月20日, 수정완료일: 1997年9月3日

소위상이고 불안정하다는 단점을 개선할 수 있으나 모서리 다항식을 취급하므로 많은 계산량을 요구한다. 적은 계산량과 제어기가 안정하거나 최소위상을 갖는 경우에는 구간플랜트의 강인안정화방법은 64개의 특별한 다항식을 안정화시키는 방법이다<sup>[7]</sup>. 이를 개선하여 32 개의 다항식은 항상 나머지 32개의 다항식이 안정화되면 자동적으로 안정화 된다는 것을 증명하였다.<sup>[8]</sup>

이 논문에서는 널리 실제 제어시스템에서 쓰이는 PID제어기를 이용한 구간플랜트의 강인안정화 기법에 관하여 고찰한다. Hernandez 와 Dormido<sup>[8]</sup>가 제안한 32개의 다항식에서 최소위상 PID 제어기를 이용하면 16개의 다항식의 안정도만 고찰하면 되는데 이를 개선하여 만약 PID 제어기의 분자 다항식의 계수의 부호를 미리 알고 있다면 8개의 다항식만 안정하면 구간플랜트가 강인안정화 된다는 정리를 증명하고 또한 8개의 다항식들도 Hernandez와 Dormido<sup>[8]</sup>의 경우보다 간단히 표현된다는 것을 보인다. 비최소 위상 PID 제어기의 경우에는 소위 교차 후르비츠 소행렬 조건<sup>[4]</sup>이 만족되므로 구간플랜트의 강인안정화방법은 16개의 Kharitonov 플랜트만 안정화시키면 된다. 그러나 위에서 언급한 계수의 부호를 미리 알고 있다면 8개의 다항식만 안정하면 구간플랜트가 강인안정화가 됨을 보인다. 특히 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 8개의 Kharitonov 플랜트의 안정도가 구간플랜트의 강인 안정화의 필요충분 조건이 됨을 보인다. 이 논문에서 취급하는 모든 다항식의 계수는 실수임을 가정한다.

2절에서는 기존의 정리와 예비 보조정리를 나타낸다. 3절은 구간플랜트를 안정화시키기 위하여 PID 제어기의 분자 다항식의 계수의 부호에 따라, 최소위상 PID 제어기인 경우 8개의 다항식이 안정하면 되고 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 또 다른 8개의 다항식이 안정하면 된다. 특히 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 구간플랜트의 강인 안정화의 필요충분 조건이 됨을 보인다. 4절은 보기를 들어 이 논문에서 제시한 정리 1를 이용하여 구간플랜트를 강인안정화 시키는 최소위상 PID 제어기의 계수를 구한다. 그리고 결론은 5절에 나타낸다.

## II. 구간 플랜트와 보조정리

구간플랜트는 전달함수  $F(s, q, r)$ 로 표시되며  $q, r$ 은

불확실한 매개변수 벡터이며 이 벡터들은 분모,분자의 계수에 속한다. 즉 구간 플랜트  $F(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)}$ 로 표시되며 분자와 분모는 각각

$$N(s, q) = \sum_{i=0}^m q_i s^i ; \tag{1}$$

$$D(s, r) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i$$

로 표시된다. 구간 한계는  $q_i$ 는  $[q_i^-, q_i^+]$ 를 취하며  $r_i$ 는  $[r_i^-, r_i^+]$ 를 취하고  $m < n$ 의 부등식을 가정한다. 구간플랜트와 직렬로 연결된 제어기가 있는 단일 부채환 SISO시스템을 생각하자. 이때 제어기가 폐환회로에 있는 경우도 적용할 수 있다. 제어기  $C(s) = N_c(s)/D_c(s)$ 로 구간 플랜트를 강인 안정화할 조건은 모든  $q \in Q$  와 모든  $r \in R$  에 대하여 페루우프 다항식

$$\Delta(s, q, r) = N_c(s)N(s, q) + D_c(s)D(s, r) \tag{2}$$

의 모든 근이 개 좌 반 복소평면에 존재하여야 한다.  $p(s)$ 가 주어진 다항식일 때  $p(s)$ 의 우수함수와 기수함수는 각각  $E(p(s)) := (p(s) + p(-s))/2$ ,  $O(p(s)) := (p(s) - p(-s))/2$ 로 정의한다.  $N_c(s)$ 의 우수와 기수함수를 각각  $n_e(s)$ 와  $n_o(s)$ 로 표기하고  $N_c(s) = n_e(s) + n_o(s)$ 로 기술된다. 구간플랜트의 분자 구간 다항식들중 4 개의 Kharitonov 다항식<sup>[1]</sup>은

$$N_1(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + \dots ;$$

$$N_2(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \dots ;$$

$$N_3(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + \dots ;$$

$$N_4(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \dots ; \tag{3}$$

이고 분모를 위한 4개의 Kharitonov 다항식<sup>[1]</sup>은

$$D_1(s) = r_0^- + r_1^- s + r_2^+ s^2 + r_3^+ s^3 + r_4^- s^4 + r_5^- s^5 + \dots + s^n ;$$

$$D_2(s) = r_0^+ + r_1^- s + r_2^- s^2 + r_3^+ s^3 + r_4^+ s^4 + r_5^- s^5 + \dots + s^n ;$$

$$D_3(s) = r_0^+ + r_1^+ s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + r_4^+ s^4 + r_5^+ s^5 + \dots + s^n ;$$

$$D_4(s) = r_0^- + r_1^+ s + r_2^+ s^2 + r_3^- s^3 + r_4^- s^4 + r_5^+ s^5 + \dots + s^n ; \tag{4}$$

이다. 여기서 16 개의 플랜트  $N_i(s)/D_j(s)$  ( $i, j=1, 2, 3, 4$ )를 Kharitonov 플랜트라 부른다. 여기서  $p_{emin}(s) := (N_1(s) + N_1(-s))/2$ ,  $p_{emax}(s) := (N_2(s) + N_2(-s))/2$ ,  $p_{omin}(s) := (N_1(s) - N_1(-s))/2$ ,  $p_{omax}(s) := (N_3(s) - N_3(-s))/2$

로 정의한다. 또한 다음 절에서 요구되는 8 개의 다항식

$$\begin{aligned} p_1(s) &:= n_e(s)N_1(s) + n_o(s)N_4(s); & p_2(s) &:= n_e(s)N_2(s) + n_o(s)N_1(s) \\ p_3(s) &:= n_e(s)N_3(s) + n_o(s)N_2(s); & p_4(s) &:= n_e(s)N_4(s) + n_o(s)N_3(s) \\ p_5(s) &:= n_e(s)N_3(s) + n_o(s)N_4(s); & p_6(s) &:= n_e(s)N_4(s) + n_o(s)N_1(s) \\ p_7(s) &:= n_e(s)N_1(s) + n_o(s)N_2(s); & p_8(s) &:= n_e(s)N_2(s) + n_o(s)N_3(s) \end{aligned} \quad (5)$$

을 정의한다. 다음 절의 주요결과의 증명을 위해 두가지 사실들과 하나의 보조정리를 기술한다.

### 사실 1<sup>[4]</sup> :

구간플랜트  $P(s, q, r)$ 를 PID 제어기  $C(s) = k(s^2 + as + b)/s$  ( $a > 0, b < 0$  or  $a < 0, b > 0$ ) 로 강인안정화를 위한 필요충분조건은 16개의 Kharitonov 플랜트들을 강인안정화 하는 것과 같다.

### 사실 2<sup>[9]</sup> :

모서리 다항식  $f(s, \lambda) = f_0(s) + \lambda g(s)$  ( $\lambda \in [0, 1]$ )에서 불변 차수 성질을 만족하고 모든  $\omega > 0$  ( $g(j\omega) \neq 0$ )에 대하여 부등식(이하 각성장조건이라 명하기로 한다)

$$\frac{d}{d\omega} \arg(g(j\omega)) \leq \left| \frac{\sin(2 \arg(g(j\omega)))}{2\omega} \right| \quad (6)$$

이 성립하다고 가정하자.  $f(s, \lambda)$ 가 안정다항식이 될 필요충분조건은 두 다항식  $f(s, 0), f(s, 1)$ 이 안정하면 된다. 여기서  $\arg(f(j\omega)) = \text{Atan2}(\text{Re}(f(j\omega)), \text{Im}(f(j\omega)))$ <sup>10</sup>이다.

다음 보조정리는 정리 1의 증명시 사용되므로 기술하며 그의 증명은 Rantzer의 결과<sup>[9]</sup>를 이용하여 직접 연산을 행하면 되므로 생략한다.

### 보조정리 1:

두 다항식  $h(s^2), sh(s^2)$ 은 각성장조건을 만족한다. 또한  $k$ 가 실수이면  $k(s+a)(s-b)$  ( $a > 0, b > 0$ )도 각성장조건을 만족한다. 만약  $g(s)$ 가 각성장 조건을 만족하면 두 다항식  $sh(s^2)g(s), h(s^2)g(s)$ 도 각성장 조건을 만족한다.

## III. 주요결과

구간플랜트를 안정화시키기 위하여 PID 제어기의 분

자 다항식의 계수의 부호에 따라, 최소위상 PID 제어기인 경우 각각 8개의 다항식이 안정하면 된다는 정리를 기술하고 이의 증명을 기술한다.

### 정리 1:

구간플랜트  $P(s, q, r)$ 를 최소위상 PID 제어기  $C(s) = N_c(s)/s = k(s^2 + as + b)/s$  ( $a > 0, b > 0$ )로 강인안정화를 위해  $k$ 의 부호에 따라 다음의 8 다항식들이 각각 안정하면 된다. 우선 1)  $k > 0$ 이면 구간플랜트를 강인안정화 하기 위한 충분조건은 8개의 다항식  $p_1(s) + sD_4(s), p_2(s) + sD_{(i-1)}(i=2, 3, 4), p_5(s) + sD_4(s), p_6(s) + sD_{(i-5)}(s)$  ( $i=6, 7, 8$ )이 안정하면 된다. 2)  $k < 0$ 이면 구간플랜트를 강인안정화 하기 위한 충분조건은 8개의 다항식  $p_3(s) + sD_4(s), p_4(s) + sD_1(s), p_7(s) + sD_{(i+1)}(s)$  ( $i=1, 2$ ),  $p_7(s) + sD_4(s), p_8(s) + sD_1(s), p_i(s) + sD_{(i-3)}(s)$  ( $i=5, 6$ )이 안정하면 된다.

(정리 1의 증명): 우선  $\theta_n = \text{Atan2}(\text{Re}(N_c(j\omega)), \text{Im}(N_c(j\omega)))$ 로 정의하자. 만약  $k < 0$ 인 경우  $p_1(s), p_2(s), p_3(s), p_4(s)$ 를 각각  $p_3(s), p_4(s), p_1(s), p_2(s)$ 로  $p_5(s), p_6(s), p_7(s), p_8(s)$ 를 각각  $p_7(s), p_8(s), p_5(s), p_6(s)$ 로  $0 \leq \theta_n \leq \pi/2, \pi/2 \leq \theta_n \leq \pi$ 를 각각  $\pi \leq \theta_n \leq 3\pi/2, 3\pi/2 \leq \theta_n \leq 2\pi$ 로 바꾸어 생각하면 동일한 증명이 되므로  $k < 0$ 인 경우의 증명은 생략한다. 이제  $k > 0$ 조건을 만족시키는 경우 증명을 시작한다. 우선 value 집합  $N_c(j\omega)N(j\omega, q)$  ( $N_c(j\omega) = k(-\omega^2 + a\omega + b)$ )을 고려하자. 고정된  $\omega > 0$ 에서  $N_c(j\omega)N(j\omega, q)$ 은 회전된 직사각형이 되며 만약  $0 \leq \theta_n \leq \pi/2$ 이면, 이 회전된 직사각형을 포함하는 새로운 직사각형을 구성하는데 각변이 실수와 허수축에 평행하면서  $N_c(j\omega)N(j\omega, q)$ 의 4 꼭지점을 변에 가지는 새로운 직사각형을 과다한계(overbounding)를 가진 직사각형이라고 하자. 이 과다한계를 가진 직사각형의 4 꼭지점에 대응하는 다항식중에서 왼쪽 밑의 다항식은

$$\begin{aligned} & E(N_c(s)N_4(s) + O(N_c(s)N_1(s))) \\ &= E((n_e(s) + n_o(s))(p_{emin}(s) + p_{omax}(s))) \\ &\quad + O((n_e(s) + n_o(s))(p_{emin}(s) + p_{omin}(s))) \\ &= n_e(s)p_{emin}(s) + n_o(s)p_{omax}(s) + n_e(s)p_{omin}(s) + n_o(s)p_{emin}(s) \\ &= n_e(s)(p_{emin}(s) + p_{omin}(s)) + n_o(s)(p_{emin}(s) + p_{omax}(s)) \end{aligned}$$

$$= n_e(s)N_1(s) + n_0(s)N_4(s) \quad (7)$$

$$=: p_1(s)$$

이 된다. (2절참조) 같은 방법으로 오른쪽 밑, 오른쪽 위, 왼쪽위 에 대응하는 다항식은 각각  $p_2(s), p_3(s), p_4(s)$ 가 된다. 여기서 복소평면을 4 영역으로 나누어  $R_i := \{z \in C \mid \pi(i-1)/2 \leq \arg z \leq i\pi/2\}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )로 표시하기로 하고  $\theta_n \in R_2$ 이면 위와 같은 대응하는 다항식들은 각각  $p_5(s), p_6(s), p_7(s), p_8(s)$ 이 된다 (그림 1 참조).

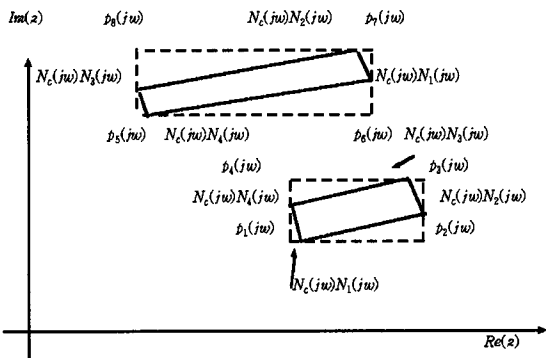


그림 1. 과다한계(overbounding)를 가진 두 직사각형  
Fig. 1. Two overbounding rectangles.

이제 페루프다항식의 value 집합은  $\Delta(j\omega) = D_c(j\omega)D(j\omega, r) + N_c(j\omega)N(j\omega, q)$ 로 표시되며  $N_c(j\omega)N(j\omega, q)$ 은 위에서 만든 과다한계를 가진 직사각형을 이용하고  $D_c(j\omega)D(j\omega, r)$  ( $D_c(j\omega) := j\omega$ )은 자체의 value 집합을 이용하여 집합가산을 행하여 만든 value 집합  $\mathcal{Z}(j\omega)$ 을 구해보면  $\mathcal{Z}(j\omega) \supset \Delta(j\omega)$ 이 성립되며  $\mathcal{Z}(j\omega)$ 은 직사각형을 구성하는데 (2 모서리가 실수축에 평행하고 2 모서리는 허수축에 평행하게 된다.)  $\theta_n$ 에 따라 8개의 꼭지점은 다음과 같이 두경우로 나누어 고려하자. 즉 1)  $\theta_n \in R_1$  ( $R_i := \{z \in C \mid (i-1)\pi/2 \leq \arg z \leq i\pi/2\}$ ) (혹은  $\theta_n \in R_2$ )인 경우 맨 왼쪽 밑에서 반시계방향으로 돌아가면서 꼭지점을 표시하면 4개의 다항식 식  $p_1(s) + sD_4(s)$   $p_2(s) + sD_{(i-1)}(s)$  ( $i=2, 3, 4$ )이 된다. 여기서 4개의 모서리는

$$f_1(s, \lambda) = p_2(s) + sD_1(s) + \lambda(p_1(s) - p_2(s) + s(D_4(s) - D_1(s)))$$

$$f_2(s, \lambda) = p_3(s) + sD_2(s) + \lambda(p_2(s) - p_3(s) + s(D_1(s) - D_2(s))),$$

$$f_3(s, \lambda) = p_4(s) + sD_3(s) + \lambda(p_3(s) - p_4(s) + s(D_2(s) - D_3(s)))$$

$f_4(s, \lambda) = p_1(s) + sD_4(s) + \lambda(p_4(s) - p_1(s) + s(D_3(s) - D_4(s)))$ 로 표현되며  $\partial f_i(s, \lambda) / \partial \lambda$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )는 각각  $h_1(s^2), h_2(s^2), h_3(s^2), h_4(s^2)$ 로 표현되며 이는 각성장 조건을 모두 만족한다. (사실 2) 따라서  $\mathcal{Z}(j\omega)$ 가 모든  $\omega > 0$ 에 대하여 복소평면의 원점을 제외하기 위해서는 4개의 꼭지점  $p_1(s) + sD_4(s)$   $p_2(s) + sD_{(i-1)}(s)$  ( $i=2, 3, 4$ )이 안정하면 된다. 이와같은 방식으로 나머지 경우의 4개의 꼭지점을 각각 구하면 다음과 같다. 2)  $\theta_n \in R_2$ 인 경우  $p_5(s) + sD_4(s)$   $p_6(s) + sD_{(i-5)}(s)$  ( $i=6, 7, 8$ )를 얻는다. 따라서 정리 1의 결론에 있는 8개의 다항식들이 모두 안정 다항식이 되면 영점제외 원리<sup>[11]</sup>에 의해  $\Delta(s)$ 가 안정하게 된다. 이로써 증명이 끝난다.

다음 정리 2를 통하여 비최소 위상 PID 제어기로 구간플랜트의 강인안정기법을 기술한다. 정리 2를 기술하기 전에  $e_{ij}(s) := k(s+a)(s+b)N_i(s) + sD_j(s)$ 라고 정의한다. 이제 정리 2를 기술한다.

**정리 2 :**

만약 PID 제어기  $C(s) = k(s+a)(s-b)/s$  ( $a > 0, b > 0$ )로 구간플랜트를 강인안정화할 필요충분조건은 다음 각 경우에 따라 8개의 다항식을 강인 안정화 시켜야 한다. 즉 1)  $k > 0, a > b$  인 경우 8개의 다항식은  $e_{11}(s), e_{12}(s), e_{22}(s), e_{23}(s), e_{33}(s), e_{34}(s), e_{41}(s), e_{44}(s)$  이고 2)  $k > 0, a < b$  인 경우 8개의 다항식은  $e_{12}(s), e_{13}(s), e_{23}(s), e_{24}(s), e_{31}(s), e_{34}(s), e_{41}(s), e_{42}(s)$  이고 3)  $k < 0, a > b$  인 경우 8개의 다항식은  $e_{13}(s), e_{14}(s), e_{21}(s), e_{24}(s), e_{31}(s), e_{32}(s), e_{42}(s), e_{43}(s)$  이고 4)  $k < 0, a < b$  인 경우 8개의 다항식은  $e_{11}(s), e_{14}(s), e_{21}(s), e_{22}(s), e_{32}(s), e_{33}(s), e_{43}(s), e_{44}(s)$  이다.

정리 2의 증명: 필요조건의 증명은 자명하므로 충분조건을 증명하고자 한다. value 집합  $\Delta(j\omega) = k(j\omega+a)(j\omega+b)N(j\omega, Q) + j\omega D(j\omega, R)$ 은 논문<sup>[3]</sup>에 따라 팔각형을 구성하며 그 모서리는 경우에 따라 다음과 같다. 즉 만약  $k > 0, a > b$ 이면 모서리에 대응하는 다항식들은  $e_{33}(s), e_{34}(s), e_{44}(s), e_{41}(s), e_{11}(s), e_{12}(s), e_{22}(s), e_{23}(s)$ 가 되며 모서리에 대응하는 모서리 다항식은

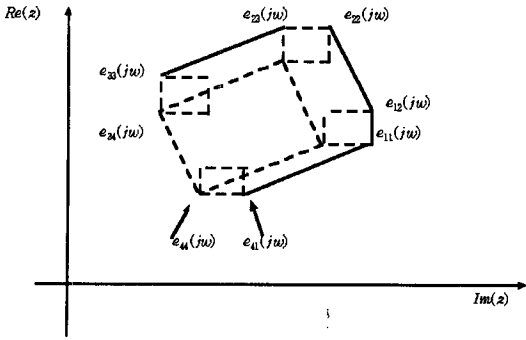


그림 2.  $k>0, a>b$  일 때  $\Delta(j\omega)$  의 value 집합  
Fig. 2. The value set of  $\Delta(j\omega)$  when  $k>0, a>b$ .

$$\begin{aligned} f_1(s, \lambda) &= e_{23}(s) + \lambda(e_{33}(s) - e_{23}(s)), \\ f_2(s, \lambda) &= e_{33}(s) + \lambda(e_{34}(s) - e_{33}(s)), \\ f_3(s, \lambda) &= e_{34}(s) + \lambda(e_{44}(s) - e_{34}(s)), \\ f_4(s, \lambda) &= e_{44}(s) + \lambda(e_{41}(s) - e_{44}(s)), \\ f_5(s, \lambda) &= e_{41}(s) + \lambda(e_{11}(s) - e_{41}(s)), \\ f_6(s, \lambda) &= e_{11}(s) + \lambda(e_{12}(s) - e_{11}(s)), \\ f_7(s, \lambda) &= e_{12}(s) + \lambda(e_{22}(s) - e_{12}(s)), \\ f_8(s, \lambda) &= e_{22}(s) + \lambda(e_{23}(s) - e_{22}(s)) \end{aligned}$$

이 되며  $\partial f_i(s, \lambda)/\partial \lambda = s^{0 \text{ or } 1} h(s^2)k(s+a)(s-b)$ 이거나  
혹은  $\partial p_i(s, \lambda)/\partial \lambda = s^{0 \text{ or } 1} h(s^2)$ 으로 표현되며 이는 보조  
정리 1에 따라 각 꼭지점 다항식만 안정하면 모서리  
다항식이 안정하게 되므로 증명이 끝난다. (그림 2 참  
조) 나머지 3개의 경우도 위와 마찬가지로 증명이 가  
능하므로 세가지 경우의  $\Delta(j\omega)$ 의 팔각형의 모서리 다  
항식을 기술하고 증명을 끝낸다. 만약  $k>0, a<b$ 이면  
모서리에 대응하는 다항식들은  $e_{12}(s), e_{13}(s), e_{23}(s),$   
 $e_{24}(s), e_{31}(s), e_{34}(s), e_{41}(s), e_{42}(s)$ 가 되며  $k<0, a>b$ 이면  
모서리에 대응하는 다항식들은  $e_{13}(s), e_{14}(s), e_{21}(s),$   
 $e_{24}(s), e_{31}(s), e_{32}(s), e_{42}(s), e_{43}(s)$ 가 되며  $k<0, a<b$ 이면  
모서리에 대응하는 다항식들은  $e_{11}(s), e_{14}(s), e_{21}(s),$   
 $e_{22}(s), e_{32}(s), e_{33}(s), e_{43}(s), e_{44}(s)$ 가 된다. 이로써 증명  
이 끝난다.

#### IV. 보 기

이절에서는 정리1를 이용하여 일차와 이차 구간플랜  
트를 강인안정화 시키는 최소위상 PID 제어기의 계수를  
구하는 예제를 보인다. 보기 1에서는 일차보상기의

강인안정화의 예를 보인다. 보기 2에서는 이차 구간플  
랜트를 강인안정화 시키는 PID제어기의 계수를 구하  
는 예제를 보인다.

보기 1: 구간플랜트  $P(s, q, r) = q_0/(s+r_0)$  ;  
 $0.4 \leq q_0 \leq 0.6$ ;  $-0.31 \leq r_0 \leq -0.29$  와 제어기  
 $C(s) = k(s^2 + as + b)/s$  ( $k>0$ ) 가 존재할 때 정리 1를  
이용하여 제어기의 계수를 설계하고자 한다. 정리 1의  
증명에서 구간플랜트의 강인안정화는  $p_1(s) + sD_4(s),$   
 $p_i(s) + sD_{(i-1)}(s)$  ( $i=2, 3, 4$ ),  $p_5(s) + sD_4(s),$   $p_i(s) + sD_{(i-5)}(s)$   
( $i=6, 7, 8$ ) 이 안정해야 한다. 우선

$$sD_1(s) = sD_4(s) = s(s-0.31); sD_2(s) = sD_3(s) = s(s-0.29);$$

$$n_o(s) = k(s^2 + b); n_e(s) = kas$$

$$N_1(s) = N_4(s) = 0.4; N_2(s) = N_3(s) = 0.6$$

$$p_1(s) = p_6(s) = n_o(s)N_1(s) + n_e(s)N_4(s) = k(0.4s^2 + 0.4as + 0.4b)$$

$$p_2(s) = p_5(s) = n_e(s)N_2(s) + n_o(s)N_1(s) = k(0.6s^2 + 0.4as + 0.6b)$$

$$p_3(s) = p_8(s) = n_o(s)N_3(s) + n_e(s)N_2(s) = k(0.6s^2 + 0.6as + 0.6b)$$

$$p_4(s) = p_7(s) = n_o(s)N_4(s) + n_e(s)N_3(s) = k(0.4s^2 + 0.6as + 0.4b)$$

(8)

을 구하고 강인안정과 관련된 16 개의 다항식

$$p_1(s) + sD_4(s) = p_6(s) + sD_1(s) = (0.4k+1)s^2 + (0.4ak-0.31)s + 0.4bk$$

$$p_2(s) + sD_1(s) = p_5(s) + sD_4(s) = (0.6k+1)s^2 + (0.4ak-0.31)s + 0.6bk$$

$$p_3(s) + sD_2(s) = p_8(s) + sD_3(s) = (0.6k+1)s^2 + (0.6ak-0.29)s + 0.6bk$$

$$p_4(s) + sD_3(s) = p_7(s) + sD_2(s) = (0.4k+1)s^2 + (0.6ak-0.29)s + 0.4bk$$

(9)

을 구하면 위의 8개의 다항식은 모두 안정하기위한 조  
건은  $k>0, ak>(0.31/0.4), b>0$  이 된다. 만약  
 $k=2, a=0.39, b=0.9$  로 하면 구간플랜트를 강인 안  
정화 시킬 수 있다.

보기 2: 컴퓨터 그래픽(graphics)을 이용하여 정리  
1의 응용예를 나타낸다. 이를 위해 다음 구간플랜트  
 $P(s, q, r)$ 를 고려하자. 즉  $P(s, q, r) = (q_1s + q_0)/$   
 $(r_2s + r_1s + r_0)$  이고 매개변수 불확실성 구간을  
 $118 \leq q_0 \leq 138; 26 \leq q_1 \leq 102; -0.1 \leq r_0 \leq 0.1; 30.1 \leq r_1 \leq 33.9;$   
 $49.5 \leq r_2 \leq 81.7$ 로 표현된다고 가정하자. 단위 부계환  
제어시스템을 구성하고 제어기  $C(s) = k(s^2 + as + b)/s$   
( $k>0$ )가 궤환회로에 존재할 때 정리 1를 이용하여 제  
어기의 계수를 설계하고자 한다. 정리 1의 증명에서  
구간플랜트의 강인안정화는  $p_1(s) + sD_4(s), p_i(s) +$

$sD_{(i-1)}(s) (i=2, 3, 4), p_5(s) + sD_1(s), p_1(s) + sD_{(i-5)}(s)$   
 ( $i=6, 7, 8$ )이 안정해야 한다. 우선

$$\begin{aligned} D_1(s) &= 81.7s^2 + 30.1s - 0.1 \\ D_2(s) &= 49.5s^2 + 30.1s + 0.1 \\ D_3(s) &= 49.5s^2 + 33.9s + 0.1 \\ D_4(s) &= 81.7s^2 + 33.9s - 0.1 \end{aligned} \quad (10)$$

을 구하고  $p_i(s) (i=1, 2, \dots, 8)$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} p_1(s) &= (ks^2 + kb)(26s + 118) + kas(102s + 118) \\ p_2(s) &= (ks^2 + kb)(26s + 138) + kas(26s + 118) \\ p_3(s) &= (ks^2 + kb)(102s + 138) + kas(26s + 138) \\ p_4(s) &= (ks^2 + kb)(102s + 118) + kas(102s + 138) \\ p_5(s) &= (ks^2 + kb)(102s + 138) + kas(102s + 118) \\ p_6(s) &= (ks^2 + kb)(102s + 118) + kas(26s + 118) \\ p_7(s) &= (ks^2 + kb)(26s + 118) + kas(26s + 138) \\ p_8(s) &= (ks^2 + kb)(26s + 138) + kas(102s + 138) \end{aligned} \quad (11)$$

따라서 정리1에 의한 8개의 다항식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_1(s) + sD_4(s) &= k[26s^3 + (102a + 118)s^2 + (118a + 26b)s + 118b] + 81.7s^3 + 33.9s^2 - 0.1s \\ p_2(s) + sD_1(s) &= k[26s^3 + (26a + 138)s^2 + (118a + 26b)s + 138b] + 81.7s^3 + 30.1s^2 - 0.1s \\ p_3(s) + sD_2(s) &= k[102s^3 + (26a + 138)s^2 + (138a + 102b)s + 138b] + 49.5s^3 + 30.1s^2 + 0.1s \\ p_4(s) + sD_3(s) &= k[102s^3 + (102a + 118)s^2 + (138a + 102b)s + 118b] + 49.5s^3 + 33.9s^2 + 0.1s \\ p_5(s) + sD_4(s) &= k[102s^3 + (102a + 138)s^2 + (118a + 102b)s + 138b] + 81.7s^3 + 33.9s^2 - 0.1s \\ p_6(s) + sD_1(s) &= k[102s^3 + (26a + 118)s^2 + (118a + 102b)s + 118b] + 81.7s^3 + 30.1s^2 - 0.1s \\ p_7(s) + sD_2(s) &= k[26s^3 + (26a + 118)s^2 + (138a + 26b)s + 118b] + 49.5s^3 + 30.1s^2 + 0.1s \\ p_8(s) + sD_3(s) &= k[26s^3 + (102a + 138)s^2 + (138a + 26b)s + 138b] + 49.5s^3 + 33.9s^2 + 0.1s \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $k=1$ 로 가정하면 위의 8개의 다항식이 안정될

$(a, b)$ 영역을 그림 3에 나타낸다.

그림 3에 의해  $k=1, a=b=1$ 로 택하면 정리 1에 의해 구간플랜트를 강인안정화시킬 수 있다.

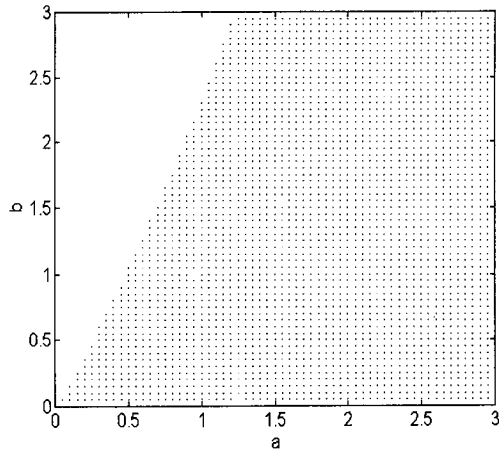


그림 3. 주어진 구간플랜트를 강인안정화 시키는  $(a, b)$  영역  
 Fig. 3. Region of  $(a, b)$  to stabilize the given interval plant.

### V. 결론

이 논문에서 PID 제어를 이용하여 구간플랜트를 안정화시키는 방법을 제안했다. 구간플랜트를 안정화시키기 위하여 PID 제어기의 분자 다항식의 계수의 부호에 따라, 최소위상 PID 제어기인 경우 8개의 다항식이 안정하면 되고 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 또 다른 8개의 다항식이 안정하면 된다는 것을 보였다. 특히 비최소위상 PID 제어기의 경우에는 구간플랜트의 강인 안정화의 필요충분 조건이 됨을 보였다.

### 참고 문헌

[1] V. L. Kharitonov, "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations," *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 14, no. 11, pp. 2086--2088, 1978.  
 [2] B. R. Barmish & H. I. Kang, "A Survey of Extreme point results for robustness of control Systems," *Automatica*, Vol. 29, no. 1, pp. 13--35, 1993.  
 [3] B. R. Barmish, C. V. Hollot, F. J. Kraus

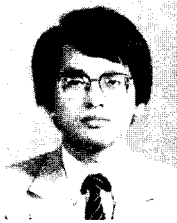
- and R. Tempo, "Extreme point results for robust Stabilization of interval plants with first order compensators," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-37, no. 6, pp. 707-714, 1992.
- [4] B. R. Barmish & H. I. Kang, "Extreme point results for robust stability of interval plants : Beyond first order Compensators, Automatica, Vol.28, no. 6, pp. 1169-1180, 1993.
- [5] S. P. Bhattacharyya, "Recent Results in Robust Parametric Stability and Control," IEEE International Symposium on Circuits and Systems, San Diego, CA, 1992.
- [6] H. Chapellat & S. P. Bhattacharyya, " A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, no. 3, pp. 306--311, 1989.
- [7] T. E. Djaferis, "To stabilize an interval plant family it suffices to simultaneously stabilize sixty-four polynomials," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-38, no. 5, pp.760--764, 1993.
- [8] R. Hernandez & S. Dormido, "On the sixty-four polynomials of Djaferis to stabilize an interval plant," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-40, no. 12, pp. 2122--2127, 1995.
- [9] A. Rantzer, "Stability conditions for polytopes of polynomials", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-37, no. 1, pp.79--82, 1992.
- [10] J. J. Craig, *Introduction to Robotics Mechanics and Control*, 2nd Ed. 2, Addison-Wesley, (Korean Ed., 이대길, 최상민 공역, 홍릉출판사, p. 49), 1992.
- [11] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat & L. H. Keel, *Robust Stability: The Parametric Approach*, p. 38, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

---

 저 자 소 개
 

---

## 姜煥一(正會員)



1956년 11월 27일생. 1980년 서울대 공대 전자공학과 졸업. 1982년 KAIST 전기전자공학과 졸업(석사). 1992년 미국 Wisconsin Madison 대학 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(공학박사). 1983년 ~ 1984년 경북대 공대 전자공학과 전임강사. 1993년 ~ 1995년 경상대 공대 제어계측공학과 조교수. 1996년 ~ 1997년 명지대 공대 전기전자공학부 조교수. 현재 명지대 공대 전기전자공학부 부교수