

論文97-34S-3-5

# 유전 알고리즘과 퍼지 논리 시스템을 이용한 비선형 시스템의 피드백 선형화 제어

## (Feedback Linearization Control of a Nonlinear System using Genetic Algorithms and Fuzzy Logic System)

崔永吉\*, 金成炫\*, 沈貴寶\*\*, 全洪兌\*

(Young-Keel Choi, Seong-Hyun Kim, Kwee-Bo Sim, and Hong-Tae Jeon)

### 요 약

본 논문은 최적화 알고리즘인 유전 알고리즘과 퍼지 논리 시스템을 이용한 비선형 시스템의 피드백 선형화 제어 방식을 제안한다. 제안되는 방식은 비선형 시스템의 비선형항을 퍼지 논리 시스템에 의해 온라인으로 추정하고 이를 삭제하기 위한 제어입력을 계산한다. 이때 퍼지 시스템의 전건부 소속함수의 개수와 형태는 유전 알고리즘을 이용하여 제어 오차 범위를 최소화하도록 설정한다. 후건부 매개변수들은 전체 제어 시스템의 안정성을 보장하도록 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 얻어진 적응 규칙에 의해 조정된다. 퍼지 논리 시스템의 진화는 온라인 적응 제어 과정에서 이루어진다. 제안된 방식의 효율성은 간단한 비선형 시스템을 바탕으로 검토된다.

### Abstract

In this paper, we propose the feedback linearization technique for a nonlinear system using Genetic Algorithms(GAs) and fuzzy logic system. The proposed control scheme approximates the nonlinear term of a nonlinear system using the fuzzy logic system and computes the control input for cancelling the nonlinear term. Then in the fuzzy logic system, the number and shape of membership functions of the premise part will be tuned to minimize the control error boundary using GAs. And the parameters of the consequence of fuzzy rule will be tuned by the adaptive laws based on Lyapunov stability theory in order to guarantee the closed loop stability of control system. The evolution of fuzzy logic system is processed during the on-line adaptive control. The effectiveness of proposed method will be demonstrated by computer simulation of simple nonlinear system.

### I. 서 론

비선형 동적 특성을 갖는 제어대상의 제어시스템 설계 방식으로 피드백 선형화(feedback linearization)

\* 正會員, 中央大學校 電子工學科

(Dept. of Electronic Eng., Chung-Ang Univ.)

\*\* 正會員, 中央大學校 電氣·電子·制御工學部

(Dept. of Electrical, Electronics and Control Eng., Chung-Ang Univ.)

接受日字: 1996年5月10日, 수정완료일: 1997年3月10日

이론에 대한 연구가 되고 있다. 피드백 선형화 이론은 기존의 선형 근사화 제어이론과는 달리 비선형 시스템의 동특성을 전체적 혹은 부분적으로 선형형태로 대수적 변환에 의한 방식이다. 이러한 피드백 선형화는 비선형 좌표변환과 피드백을 이용하여 비선형 시스템을 선형시스템으로 변환하는 것으로 비선형 시스템을 제어하는데 이미 잘 정의된 선형 시스템이론을 적용할 수 있는 장점이 있다<sup>[1]</sup>. 그러나 이러한 피드백 선형화 방식은 정확한 상태변환과 피드백에 의해 이루어지는 것으로 실제 제어 대상의 정확한 수학적 모델링을 필요로 하게 된다. 따라서 수학적 모델링에 불확실성이

존재할 경우 정확한 피드백 선형화가 어렵다. 상기의 문제점을 보완할 수 있는 방식으로는 Sanner<sup>[2]</sup>와 Jin<sup>[3]</sup>이 제시한 신경망이나 Wang<sup>[4]</sup>이 제안한 퍼지 시스템을 이용한 방식을 들 수 있다. 이들 방식들은 신경망이나 퍼지 논리 시스템의 일반화된 근사화 능력을 이용하여 임의의 연속 비선형 함수를 모델링하고 피드백을 통해 불확실한 비선형항을 제거할 수 있는 기법을 제시하였다. 다층 신경망에 의한 피드백 선형화는 퍼지 논리 제어기에 비해 초기 오차가 클 수 있다. 이것은 다층 신경망은 전역 학습 특성을 가지고 있고 가중치를 적절하게 초기화하는 것이 어려운 반면에 퍼지 논리 제어기는 지역 적응 및 반응 특성을 가지고 있어서 반응 속도가 빠르고 경험적으로 얻어진 언어적 지식을 바탕으로 제어기의 매개변수들을 초기화할 수 있기 때문이다. 한편 퍼지 논리 시스템의 근사화 오차는 제어 성능에 큰 영향을 주게 된다. 이러한 근사화 오차는 비선형 함수에 대해 예비 지식으로부터 설정된 모델의 구조적인 특성에 의해 발생된다. 주어진 비선형 함수에 적합한 모델의 최적 구조를 알 수 있다면 제어 오차는 0으로 수렴할 수 있다. 그러나 비선형 함수를 정확히 알 수 없을 때 모델의 최적 구조를 구성하기 힘들다. 그러므로 모델의 근사화 오차로 인해 전체 제어 오차 범위가 존재하게 된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 근사화 오차를 최소화하는 모델의 최적 구조를 구성하기 위해 유전 알고리즘(Genetic Algorithms)<sup>[5]</sup> [16]을 적용한다. 유전 알고리즘은 집단에 기초한 최적화 과정인 자연 진화를 그 모델로 하고 있다. 이 알고리즘은 확률적 최적화 기법으로, 기존의 고전적인 최적화 방법과 비교할 때, 복잡한 문제의 해결에 우수한 성능을 기대할 수 있다.

본 논문에서는 비선형 시스템의 피드백 선형화 제어를 위해서 최적화 알고리즘인 유전 알고리즘과 퍼지추론을 갖는 퍼지 모델을 이용한다. 제안되는 방식은 비선형 시스템의 비선형항을 퍼지 논리 시스템에 의해 온라인으로 추정하여 비선형항을 삭제하기 위한 제어 입력을 계산한다. 이때 퍼지 논리 시스템의 전진부 소속 함수의 개수와 형태는 유전 알고리즘을 이용하여 제어 오차 범위를 최소화하도록 설정한다. 후진부 매개변수들은 전체 제어 시스템의 안정성을 보장하도록 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 얻어진 적응 규칙에 의해 조정된다. 조정 매개변수의 진화과정은 온라인 적응 제어 과정에서 이루어진다. 제안된 방식의 효율성

은 간단한 비선형 시스템을 바탕으로 검토된다.

## II. 퍼지 논리 시스템과 유전 알고리즘

### 1. 연결성 비트를 갖는 퍼지 논리 시스템

퍼지 논리 시스템은 임의의 연속적인 비선형 함수  $f$ 를  $\varepsilon$ 의 범위로 근사화할 수 있는 일반화된 근사화기이다<sup>[4]</sup>. 퍼지 논리 시스템의 일반 근사화 속성은 두 가지 중요한 의미를 제공해 준다. 첫째, 퍼지 논리 시스템이 비선형 제어기로 사용될 수 있는 이론적 정당성을 제공해주고 둘째, 퍼지 논리 시스템의 실제 성공적 응용 사례에 대한 이유를 설명해준다. 퍼지 논리 시스템은 비선형 처리 소자인 기준 함수(basis function)에 의해서 입력력 비선형 맵핑  $f_u: X \rightarrow U$ 를 수행한다. 본 논문에서 사용되는 퍼지 논리 시스템은 그림 1에서 보인다. 그림 1의 퍼지 논리 시스템은 MISO 구조의 일반적인 퍼지 논리 시스템을 망형태로 표현한 것으로 퍼지화기를 포함하는 입력층과 중간층, 그리고 출력층의 3층 구조를 갖는다. 그러나 퍼지 소속 함수의 개수를 결정하는 연결성 비트  $C_{kj}$ ( $\in \{0, 1\}$ )를 포함한 부분이 기존 퍼지 논리 시스템과의 차이점이며 아래에서 상세히 설명된다. 연결성 비트를 갖는 퍼지 논리 시스템의 구조적 특성은 다음과 같은 언어 규칙들로부터 특징화된다.

$$R_j: IF (x_1 \text{ is } A_{1j}) \text{ and } \dots \text{ and } (x_n \text{ is } A_{nj}) \\ THEN (f_u \text{ is } B_j), \quad j=1, \dots, r \quad (1)$$

여기서,  $0 < j_1, j_2, \dots, j_n, \dots, j_n \leq h$ 이고  $h$ 는 각 입력의 소속 함수 개수이다.  $x_k$ ( $k=1, \dots, n$ )와  $f_u$ 는 입력변수 및 출력변수,  $n$ 과  $r$ 은 각각 입력 개수 및 퍼지 규칙 개수이며  $A_{kj}$ 와  $B_j$ 는 언어 변수이다. 상기의 퍼지 규칙으로부터 실제 제어량  $f_u$ 를 추론하기 위해 본 논문에서는 단순화된 추론방식을 사용한다. 단순화된 추론 방식은 다음과 같은 식에 의해 요약된다.

$$f_u = \sum_{j=1}^r w_j \phi_j \quad (2)$$

$$\phi_j = \frac{\prod_k C_{kj} \cdot \mu_{A_{kj}}(x_k)}{\sum_j (\prod_k C_{kj} \cdot \mu_{A_{kj}}(x_k))} \quad (3)$$

여기서,  $w_j$ 는 언어변수  $B_j$ 의 중심값으로  $\mu_{B_j}(w_j)=1$ 이다.  $\phi_j$ 는 퍼지 기준 함수로서 그림 1에서 중간층의  $j$ 번째 유니트의 출력이고  $C_{kj}$ ( $\in \{0, 1\}$ )은 소속 함수

$\mu_{A_{k_i}}(x_k)$ 와 중간층과의 연결성을 결정하는 매개 변수이다. 예로서,  $C_{k_i} = 0$ 이면  $\mu_{A_{k_i}}(x_k)$ 의 출력값에 관계 없이 중간층의 출력  $\phi_j$ 가 0이 되기 때문에 소속 함수  $\mu_{A_{k_i}}(x_k)$ 는 중간층의 출력에 영향을 주지 못하게 된다. 따라서  $C_{k_i} = 0$ 이면 이에 해당하는 소속 함수  $\mu_{A_{k_i}}(x_k)$ 는 설정되어 있는 값의 것과 같고, 소속 함수  $\mu_{A_{k_i}}(x_k)$ 와 연결된 기준 함수는 사용되지 않게 되므로  $C_{k_i}$ 를 조정함으로써 기준 함수의 개수를 조정하는 결과가 된다.

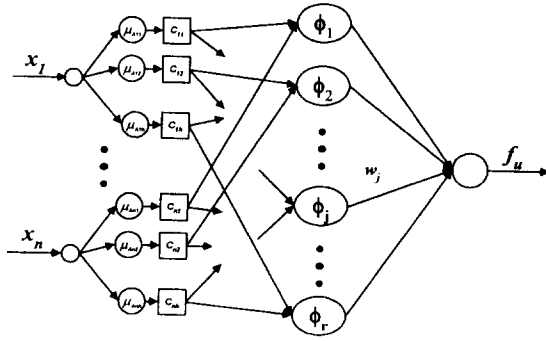


그림 1. 연결성 비트를 갖는 퍼지 논리 시스템  
Fig. 1. Fuzzy logic system with the connectivity bits.

상기의 식으로부터 퍼지 논리 시스템의 입출력 관계는 다음과 같은 행렬 형태로 간략하게 표현될 수 있다.

$$f_u = f_u(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{w}^T = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_r]$ 는 가중치 벡터,  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_r]^T$ . 상기의 식에서  $\Phi$ 는 일반적으로 기준 함수(basis function) 벡터<sup>[4]</sup>로 불리며 비선형 처리 소자인 퍼지 기준 함수  $\phi_j$ 에 의해 구성된다. 퍼지 기준 함수  $\phi_j$ 는 퍼지 규칙에서 언어 변수  $A_{k_i}$ 의 소속 함수  $\mu_{A_{k_i}}(x_k)$ 의 형태에 따라서 비선형 함수를 표현할 수 있는 임의의 함수가 될 수 있다. 언어 변수  $A_{k_i}$ 은 다음과 같은 소속 함수 형태로 표현될 수 있다.

$$\mu_{A_{k_i}}(x_k) = \exp \left[ -\frac{(x_k - \xi_{k_i})^2}{\sigma_{k_i}^2} \right] \quad (5)$$

여기서,  $\xi_{k_i}$ 는 소속 함수의 중심(center),  $\sigma_{k_i}$ 는 폭(width)을 표현하는 매개변수들이다. 기준 함수  $\phi_j$ 를 식 (5)와 같은 가우시안 함수(Gaussian function)로

구성될 경우 식 (4)는 방사형 함수망(RBFN)의 입출력 관계와 동일하다. 식 (4)의 형태는 임의의 비선형 함수를 근사화할 수 있는 것으로 증명되었다<sup>[5]</sup>. 즉 임의의 비선형 함수는 식 (4)의 형태와 같이 기준 함수  $\phi_j$ 의 선형 결합으로 표현될 수 있다. 그러나 임의의 비선형 함수  $f$ 에 대한 최소 근사화를 위한 기준 함수  $\phi_j$ 의 최적 개수나 형태에 대한 체계적인 설계 방식은 현재 연구 과제로 남아 있다. 기준 함수 개수에 대한 연구로는 복잡한 비선형 함수일수록 충분히 많아야 하는 것으로 연구되었다<sup>[2]</sup>. 그러나 이러한 연구 결과는 기준 함수의 다양한 형태를 고려하지 않았다. 또한, 기준 함수의 개수가 정해져 있을 때 기준 함수의 형태를 조정하는 방식은 오차 역전과 학습 알고리즘에 의한 방식이 대표적이다. 오차 역전과 알고리즘에 의한 방식은 신경망 이론에서 널리 사용되는 학습 알고리즘으로 지역 최솟치 수렴특성으로 인해 기준 함수의 최적 형태를 구성하기 힘들다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해서 기준 함수  $\phi_j$ 의 개수 및 최적 형태를 구성하기 위해서 유전 알고리즘을 이용한다. 그리고 기준 함수  $\phi_j$ 의 가중치를 결정하는  $w_j$ 의 조정은 3장에서 논의된다.

## 2. 유전 알고리즘(Genetic Algorithm : GA)의 적용

유전 알고리즘은 진화 메커니즘인 적자생존 원리를 모방하여 최적화를 목적으로 만들어진 알고리즘이다. 집단에 기초한 이 알고리즘은 확률적 최적화 기법으로 최적화 문제의 형태를 알지 못하는 상태에서 해를 구해나가는 것으로 기존의 고전적인 최적화 방법과 비교할 때, 복잡한 문제의 해결에 우수한 성능을 기대할 수 있다. 모의 진화형의 탐색 알고리즘의 성격을 갖고 있는 유전 알고리즘들은 다음과 같은 연산자들로 특징화될 수 있다.

$$GA = (N, S, C, M, FF)$$

여기서, N, S, C, M, 그리고 FF는 각각 해집단의 개수, 선택(Selection) 연산자, 교배(Crossover) 연산자, 돌연 변이(Mutation) 연산자 종류와 최적화 평가 함수(Fitness Function) 형태에 해당된다.

유전 알고리즘에서 선택, 교배와 돌연 변이 연산자들은 평가 함수 FF에 대한 해집단의 평균 적합도(fitness)를 점진적으로 증가시키는 기능을 수행하며, 해집단의

개수는 전역 최대치를 찾는데 결정적인 역할을 한다<sup>15)</sup> [16]. 본 논문에서의 유전 알고리즘은 연속 공간상에서 연속 연산자를 사용한다. 선택 연산자로 표준 roulette wheel 연산자를 사용하고, 교배 연산자는 교배 순서를 고려하지 않는 단순 교배 방식, 그리고 돌연 변이는 미세 조정을 가능케 하는 비정형 (non-uniform) 돌연 변이 연산자를 사용한다.

본 절에서는 퍼지 논리 시스템의 기준 함수의 개수와 형태(중심과 폭)를 결정짓는 조정 매개 변수들 ( $C_{kj}, \sigma_{kj}, \xi_{kj}$ )을 설정을 위하여 유전 알고리즘을 적용한다. 후진부 매개 변수인  $w_j$ 의 조정은 III장에서 상세히 서술된다. 먼저, 그림 1의 퍼지 논리 시스템의 각 입력  $x_k (k=1, \dots, n)$ 에 대한 퍼지 소속함수의 매개 변수들인  $\sigma_{kj}, \xi_{kj}$ 들과 소속 함수의 활성 정도를 결정하는  $C_{kj}$ 들로 구성된 실수 매개변수 벡터  $\mathbf{p}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{p} = [C_{11}, \sigma_{11}, \xi_{11}, \dots, C_{kj}, \sigma_{kj}, \xi_{kj}, \dots, C_{nl}, \sigma_{nl}, \xi_{nl}]^T \in \mathcal{E}_p \quad (6)$$

여기서,  $j_k \in \{1, \dots, h\}$ ,  $\mathcal{E}_p = [\mathbf{p}_{\min}, \mathbf{p}_{\max}]$ 는 실수 매개변수 벡터들의 미리 설정된 공간이다. 매개 변수 벡터  $\mathbf{p}$ 로부터 다음과 같은 평가함수  $FF$ 를 최대화하는 최적화 문제를 고려할 수 있다.

$$\arg \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{E}_p} FF(\mathbf{p}) \quad (7)$$

여기서,  $FF$ 는 해벡터  $\mathbf{p}$ 의 적합도를 계산하는 평가 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$FF(\mathbf{p}) = \frac{A}{e_{\max}(\mathbf{p})} \quad (8)$$

여기서,  $e_{\max}(\mathbf{p}) = \max |f - f_u(\mathbf{p}, x, \mathbf{w})|$ 로 임의의 비선형 함수와 퍼지 논리 시스템의 최대 근사화 오차이다. 식 (7)을 만족하는 매개변수 벡터  $\mathbf{p}$ 를 찾는 유전 알고리즘은 다음과 같이 요약될 수 있다.

**[단계 1] 초기 매개변수 구성:**

초기 시간  $k=0$ 에서 일정한 범위 내에서 임의로 선정된 부모 매개변수 벡터들의 집단  $\mathbf{p}_0^1, \mathbf{p}_0^2, \dots, \mathbf{p}_0^l, \dots, \mathbf{p}_0^N$ 을 구성한다. 이때 벡터 집단의 평가함수  $FF$ 의 초기 적합도는 매우 작은 값으로 동일하게 설정한다.

**[단계 2] 선택(selection):**

임의의 시간  $k$ 에서 각 부모 벡터  $\mathbf{p}_k^1, \mathbf{p}_k^2,$

$\dots, \mathbf{p}_k^l, \dots, \mathbf{p}_k^N$ 들이 주어졌을 때 다음과 같은 확률에 의해 매개변수 벡터  $\mathbf{p}'_k^1, \mathbf{p}'_k^2, \dots, \mathbf{p}'_k^l, \dots, \mathbf{p}'_k^N$ 를 선택한다.

$$\Pr \{ \mathbf{p}'_k^l = \mathbf{p}_k^{l_i} \mid \mathbf{p}_k^1, \mathbf{p}_k^2, \dots, \mathbf{p}_k^N \} = \frac{FF(\mathbf{p}_k^{l_i})}{\sum_{i=1}^N FF(\mathbf{p}_k^{l_i})}, \quad l = l_i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

**[단계 3] 교배(crossover):**

$\mathbf{p}'_k^1, \mathbf{p}'_k^2, \dots, \mathbf{p}'_k^l, \dots, \mathbf{p}'_k^N$ 로부터 같은 임의로 두 개의 벡터를 선택하고 교배를 수행하여 한 개의 매개변수  $\mathbf{p}''_k^l$  벡터를 생성한다.

**[단계 4] 돌연변이(mutation):**

매개 변수 벡터  $\mathbf{p}''_k^l$ 로부터 다음과 같은 비정형 돌연 변이 연산자에 의해 다음 세대를  $\mathbf{p}_{k+1}^l$ 를 생성한다.

$$\mathbf{p}_{k+1}^l = \mathbf{p}''_k^l + (1-\lambda) \cdot \Delta_k(\mathbf{p}_{\max} - \mathbf{p}''_k^l) - \lambda \cdot \Delta_k(\mathbf{p}''_k^l - \mathbf{p}_{\min}) \quad (10)$$

$$\Delta_k(\mathbf{y}) = \left(1 - r^{(1 - \frac{k}{K})^b}\right) \cdot \mathbf{y} \quad (11)$$

여기서,  $\lambda$ 는 0 또는 1인 임의의 랜덤수이며,  $r$ 은  $[0, 1]$  사이의 임의의 실수 랜덤수이고  $K$ 와  $b$ 는 각각 최대 진화시간, 비정형 정도를 결정하는 변수이다.  $\Delta_k(\mathbf{y})$ 는  $[0, \mathbf{y}]$  사이의 값을 발생시키며 시간  $k$ 가  $K$ 에 접근함에 따라  $\Delta_k(\mathbf{y}) \approx 0$ 이 된다.

**[단계 5]** 평가 함수  $FF(\mathbf{p}_{k+1})$ 에 의해 적합도를 계산한다.  $FF(\mathbf{p}_{k+1})$ 가 수렴할 때까지 위 [단계 2] ~ [단계 5]를 반복 실행한다.

**III. 유전 알고리즘과 퍼지 시스템을 이용한 비선형 시스템의 피드백 선형화 제어**

비선형 시스템을 피드백 선형화 기법을 이용하여 선형시스템으로 변환할 수 있다면 비선형 시스템을 제어 하는데 이미 잘 정의된 선형 시스템이론을 적용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 피드백 선형화는 정확한 비선형 피드백에 의해 이루어지는 것으로 실제 제어 대상의 정확한 수학적 모델링을 필요로 하게 된다. 따라서 수학적 모델링에 불확실성이 존재할 경우 정확한 피드백 선형화가 어렵고 강건성에 대한 문제가 발생된다. 이러한 문제점을 보완하기 위해서 본 절에서는 퍼

지 논리 시스템과 유전 알고리즘을 적용한다.

1. 퍼지 시스템을 이용한 비선형 시스템의 피드백 선형화 제어

다음과 같은  $n$ 차 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f_o(x) + b_o(x)u, \quad y = h(x) \quad (12)$$

여기서,  $x \in R^n$ 는 상태 벡터이고  $f_o$ 와  $b_o$ 는  $x$ 의 비선형 함수이다.  $y \in R$ 와  $u \in R$ 은 각각 시스템의 출력과 제어 입력이다. 식(12)에서  $y$ 의 도함수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f_o(x) + \frac{\partial h}{\partial x} b_o(x)u = f(x) + b(x)u \quad (13)$$

상기의 식(13)에서  $f$ 와  $b$ 를 알고 있다면 비선형 시스템을 피드백 선형화를 위해서 제어 입력  $u$ 를 식(14)와 같이 정의할 수 있다.

$$u = \frac{1}{b}(v - f), \quad b \neq 0, \quad \forall x \quad (14)$$

여기서,  $v$ 는 폐루프 안정성을 보장하는 새로운 입력이다.  $v$ 를 다음과 같이 정의하면

$$v = \dot{y}_d - ce \quad (15)$$

여기서,  $y_d$ 는  $y$ 의 목표 궤적,  $e (= y - y_d)$ 는 추종 오차이며  $c > 0$ 이다. 식(13), (14), (15)로부터 다음과 같은 오차 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{e} + ce = 0 \quad (16)$$

상기의 식은 오차가 0으로 수렴함을 의미한다. 식(14)에서  $f$ 와  $b$ 를 정확히 알 수 없을 때 이들을 추정하기 위해서 퍼지 논리 시스템을 적용한다.  $f$ 와  $b$ 를 추정하기 위한 퍼지 논리 시스템의 출력  $\hat{f}$ 와  $\hat{b}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{p}, x, \mathbf{w}_f) &= \mathbf{w}_f \Phi_f(\mathbf{p}_f, x) \\ \hat{b}(\mathbf{p}, x, \mathbf{w}_b) &= \mathbf{w}_b \Phi_b(\mathbf{p}_b, x) \end{aligned} \quad (17)$$

식(14)의  $u$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$u = \frac{1}{\hat{b}}(v - \hat{f}) \quad (18)$$

퍼지 논리 시스템의 매개변수들( $w_f, \Phi_f, w_b, \Phi_b$ )은 폐루프 안정성을 보장하도록 조정되어야 한다. 매개변

수들의 적응 규칙은 다음과 같은 가정하에서 유도된다.

**가정 1.** 다음과 같은 최소 근사화 오차를 만족하는 최적 매개변수  $w_f^*, w_b^*$ 가 존재한다.

$$\max |f - \hat{f}| \leq M_f, \quad \max |b - \hat{b}| \leq M_b$$

여기서,

$$\hat{f} = w_f^{*T} \Phi_f, \quad \hat{b} = w_b^{*T} \Phi_b, \quad M_f > 0, \quad M_b > 0.$$

**가정 2.** 임의의 입력  $x \in R^n$ 에 대해  $0 < b_{\min} \leq |b(x)|, |f| < M$ 을 만족한다.

일반적으로 가정 1은 퍼지 시스템 설계시 제한 요소에 해당된다. 퍼지 논리 시스템을 이용하여 비선형 함수를 근사화할때 복잡한 비선형 함수일수록 기준 함수의 개수는 증가하게 된다. 비선형 함수에 대한 기준 함수의 개수나 형태를 예비 지식에 의해 정확히 알 수 있다면 가정 2에서의  $M_f, M_b$ 는 매우 적은 값  $\varepsilon$ 가 될 수 있다. 그러나 예비지식에 의해 기준함수의 개수나 형태를 정확히 알 수 없을 때  $M_f, M_b \gg \varepsilon$ 가 될 수 있다. 따라서 모르는 비선형 함수  $f, b$ 와 퍼지 시스템의 출력  $\hat{f}, \hat{b}$ 와의 근사화 오차가 존재하게 된다. 식(18)을 식(13)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f + bu \\ &= v + (f - \hat{f}) + (b - \hat{b})u \\ &= v + (f - \hat{f} + \hat{f} - \hat{f}) + (b - \hat{b} + \hat{b} - \hat{b})u \end{aligned} \quad (19)$$

이다. 비선형 함수와 퍼지 시스템과의 최소 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\eta = (f - \hat{f}) + (b - \hat{b})u \quad (20)$$

식(20)로부터 식(19)는 다음과 같이 다시 정리된다.

$$\dot{y} = v + (\hat{f} - \hat{f}) + (\hat{b} - \hat{b})u + \eta = v + \tilde{w}_f^T \Phi_f + \tilde{w}_b^T \Phi_b u + \eta \quad (21)$$

여기서,  $\tilde{w}_f = w_f^* - w_f, \tilde{w}_b = w_b^* - w_b$ 이다. 식(21)에 식(15)의  $v$ 를 대입하면 다음과 같은 오차 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{e} = -ce + \tilde{w}_f^T \Phi_f + \tilde{w}_b^T \Phi_b u + \eta \quad (22)$$

$w_f$ 와  $w_b$ 의 적응 규칙을 유도하기 위해서 Lyapunov 안정성 이론을 도입한다. 먼저 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = e^2 + \tilde{w}_f^T \Gamma_1^{-1} \tilde{w}_f + \tilde{w}_b^T \Gamma_2^{-1} \tilde{w}_b \quad (23)$$

여기서  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 는 대각 행렬이다. V의 도함수는 식(22)을 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2ee + 2\tilde{w}_f^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{w}}_f + 2\tilde{w}_b^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{w}}_b \\ &\approx 2e(-ce + \tilde{w}_f^T \Phi_f + \tilde{w}_b^T \Phi_b u + \eta) + 2\tilde{w}_f^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{w}}_f + 2\tilde{w}_b^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{w}}_b \\ &= -2ce^2 + 2\tilde{w}_f^T (\Phi_f e + \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{w}}_f) + 2\tilde{w}_b^T (\Phi_b e u + \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{w}}_b) + 2e\eta \end{aligned} \quad (24)$$

$\dot{\tilde{w}}_f$ 와  $\dot{\tilde{w}}_b$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\dot{\tilde{w}}_f = -\Gamma_1 \Phi_f e, \quad \dot{\tilde{w}}_b = -\Gamma_2 \Phi_b e u \quad (25)$$

식(24)는 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{V} = -2ce^2 + 2e\eta \quad (26)$$

식(26)에서 오차 e가  $\eta$ 에 비해 상대적으로 클 때 즉, 다음 범위에 존재하게 되면

$$|e| > \frac{1}{c} |\eta| \quad (27)$$

,  $\dot{V} < 0$ 이다. 그러므로 V는 감소하게 되며 식(23)의 Lyapunov 함수 정의로부터 e는 감소하게 된다. 그리고 e가 다음 범위로 감소하게 되면

$$|e| \leq \frac{1}{c} |\eta| < e_{max} \quad (28)$$

$\dot{V}$ 는 양의 값을 가지게 되고 e가 증가하게 된다. 오차 e가 식(27)의 범위로 증가하게 되면 다시 V가 감소하게 되고 e는 감소된다. 따라서 근사화 오차  $\eta$ 항이 포함될 경우에도 오차 e가 식(28)의 범위로 한정되어 지는 것을 의미한다. 즉 e는 최대 한계  $e_{max}$  범위 내에 존재하게 된다<sup>18)</sup>.  $w_f$ 와  $w_b$ 의 적응 규칙은 식(25)으로부터  $\dot{\tilde{w}}_f = \dot{w}_f^* - \dot{w}_f = -\dot{w}_f$ 이고  $\dot{\tilde{w}}_b = \dot{w}_b^* - \dot{w}_b = -\dot{w}_b$ 이므로 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{w}_f = \Gamma_1 \Phi_f^T e, \quad \dot{w}_b = \Gamma_2 \Phi_b^T e u \quad (29)$$

상기의 식(28)로부터 한계 범위  $e_{max}$ 의 원인을 조사할 필요가 있다.  $e_{max}$ 는 크기는  $|\eta|$ 에 비례한다. 식(20)과 가정 1로부터  $|\eta|$ 는 다음과 같은 한계 범위를 갖는다.

$$\begin{aligned} |\eta| &\leq |f - \hat{f}| + |b - \hat{b}| |u| \\ &\leq M_f + M_b |u| \end{aligned} \quad (30)$$

상기의 식에서  $M_f$ 와  $M_b$ 는 모르는 비선형 함수  $f, b$

와 퍼지 시스템의 출력  $\hat{f}, \hat{b}$ 와의 최대 근사화 오차 범위이다. 이러한 오차는 퍼지 시스템의 근사화 능력에 의해 좌우된다. 퍼지 시스템에서 비선형 함수를 근사화할 수 있는 기준함수 벡터  $\phi$ 들을 정확히 알고 있다면 근사화 오차 범위  $M_f$ 와  $M_b$ 를 줄일 수 있고 최대 한계  $e_{max}$ 를 제한할 수 있다. 그러나  $\phi$ 들의 정확한 형태를 구하기 쉽지 않다. 이러한 어려움을 해결하기 위해서 유전 알고리즘을 이용하여  $e_{max}$ 의 크기를 최소화 하도록 기준 함수 벡터  $\phi$ 들을 추정한다.

2. 유전 알고리즘의 적용

1절에서 서술된 바와 같이 퍼지 논리 제어기의 구조적 특성에 의해 제어 오차의 최대 한계  $e_{max}$ 가 존재한다. 이러한  $e_{max}$ 를 줄이기 위해서 비선형 함수  $f, b$ 를 근사화하기 위한  $\phi_f, \phi_b$ 의 기준 함수 개수와 형태를 2장에서 서술된 유전 알고리즘을 이용하여 설계한다. 전체 제어 시스템의 구성은 그림 2와 같다.

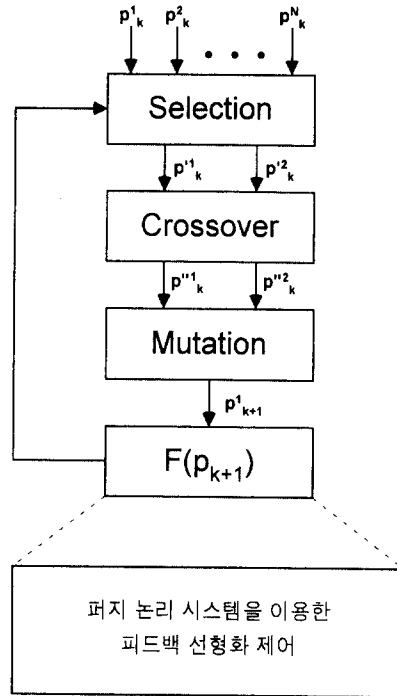


그림 2. 제어 시스템  
Fig. 2. The control system.

유전 알고리즘에 의한 매개변수 벡터  $p$ 의 진화 과정은 일정한 주기 T마다 일어난다. k 세대(k 번째 주기 T)에서 매개변수 벡터  $p_k$ 가 주어지면 주기 T동안 식(29)

의 적응 규칙에 의해 전체 페루프 시스템의 안정성을 보장하도록 제어된다. 퍼지 논리 시스템을 이용한 비선형 시스템의 온라인 제어 과정에서 최대 오차  $e_{max}$ 는 단순히 오차 측정으로 부터 구할 수 있고 식(8)에서 주어진 제어 성능 평가 함수  $FF(\mathbf{p}_k) = A / e_{max}(\mathbf{p}_k)$ 로 부터 적합도를 계산한다. 이러한 적합도의 계산으로부터 선택과 교배, 돌연 변이를 통해 1개의 다음 세대 매개변수 벡터  $\mathbf{p}_{k+1}$ 를 k+1번째 시각에 퍼지 논리 시스템에 적용한다. 이후 주기 T동안 2절에서 서술한 적응 제어 규칙 식(29)에 의해  $w_f$ 와  $w_b$ 를 제어 시스템의 안정성을 보장하도록 조정된다. 이러한 과정은 전체 진화 횟수 K 세대(generation)동안 반복된다.

IV. 모의 실험

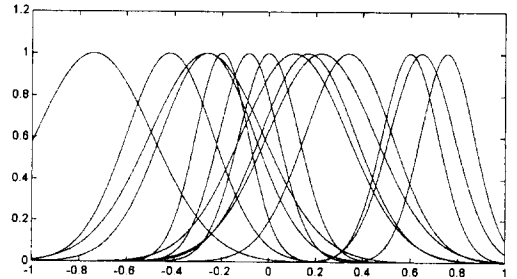
제안된 방식의 효용성을 검토하기 위해 다음과 같은 비선형 시스템을 이용하여 모의실험을 수행하였다.

$$\dot{y} = -0.5 \sin(2y) \cos(3y) - \frac{y}{1+y^2} + u \quad (31)$$

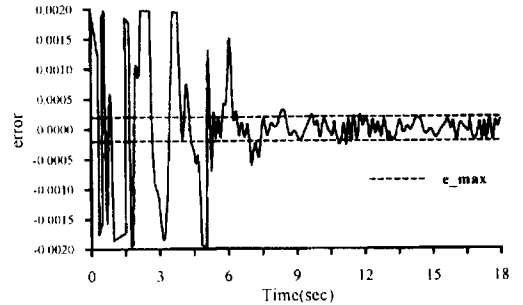
상기의 비선형 시스템은 식(13)과 비교할 때  $f = -0.5 \sin(2y) \cos(3y) - y/(1+y^2)$  이고  $b=1$ 인 경우에 해당된다. 여기서 비선형항  $f$ 는 모른다고 가정하고, 한계 범위  $M$ 은 추정 가능하다고 가정한다.  $|f| < M=0.5$ 로 두었다. 상기 비선형 시스템의 목표 궤적  $y_d = 0.5 \sin(\frac{2\pi}{3}t) + 0.5 \sin(\frac{2\pi}{2}t)$ 로 설정하였다. 그림 3은 제안된 방식인 유전 알고리즘을 이용하여 퍼지 논리 시스템의 조정 매개변수들( $C_{k_i}, \sigma_{k_i}, \xi_{k_i}$ )을 조정하였을 때의 제어 성능을 평가하였다.  $f$ 를 추정하기 위한 퍼지 시스템 구성에서 기준함수 벡터  $\phi_i$ 의 기준 함수 개수를 최대 21개로 정하였다. 그러므로 매개변수 벡터  $\mathbf{p}$ 의 조정 매개변수들( $C_{k_i}, \sigma_{k_i}, \xi_{k_i}$ )의 개수는  $21 \times 3$ 개로 구성되었다. 해집단 구성에서 매개변수 벡터  $\mathbf{p}$ 의 개수는 100개로 하였다. 유전 알고리즘에서의 매개변수 벡터  $\mathbf{p}$ 의 교배 점수와 돌연변이 개수는 각각 2, 3개로 두었다. 그리고 식(29)의 적응 규칙에서  $\Gamma$ 는 단위행렬로, 식(13)의  $c=10$ 으로 정의하였다. 이때 최대 진화횟수  $K=20000$ 으로, 진화 주기  $T=18\text{sec}$ 으로 정의하고 제어 성능평가 함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$FF = \frac{0.1}{e_{max}(\mathbf{p}_k)}$$

여기서,  $e_{max}(\mathbf{p}_k)$ 는 k번째 진화 과정의 진화 주기 T에서 마지막 6초간 동안 측정된 최대 오차이다. 그림 3(a)는 최대 진화 횟수 20000번을 실행한 후 최대 FF를 갖는 기준함수  $\phi_i$ 들을 보인다. 최종 기준 함수의 개수는 14개이고 이때의 추정 오차는 그림 3(b)에서 보인다. 한계 오차  $e_{max}=0.0002$ 로 매우 적음을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 3. 제안된 방식에 의한 실험결과  
(a) 소속함수형태 (b) 추종 오차  
Fig. 3. Simulation results by the proposed control scheme. (a) the shape of membership function (b) tracking error

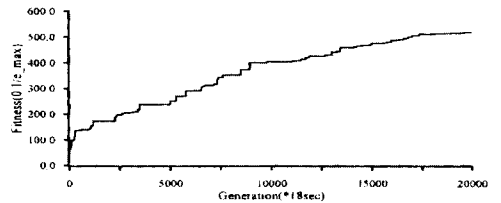


그림 4. FF의 추이  
Fig. 4. Evolution of the FF.

그림 4는 진화 과정동안의 FF의 추이를 보이고 있다. 그림 5는 퍼지 시스템에 의한 비선형 함수

$f = -0.5 \sin(2y) \cos(3y) - y/(1+y^2)$ 의 추정 결과를 보인다. 실험 결과로부터 퍼지 시스템은 모르는 비선형 함수를 매우 적은 근사화 오차로 추정할 수 있음을 알 수 있고 유전 알고리즘에 의해  $e_{max}$ 를 최소화하도록 퍼지 논리 시스템의 소속함수의 개수( $C_{k_i}$ )와 형태 즉, 중심( $\xi_{k_i}$ ) 및 폭( $\sigma_{k_i}$ )을 설정할 수 있었다.

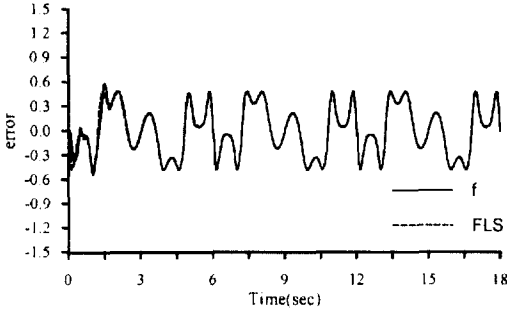
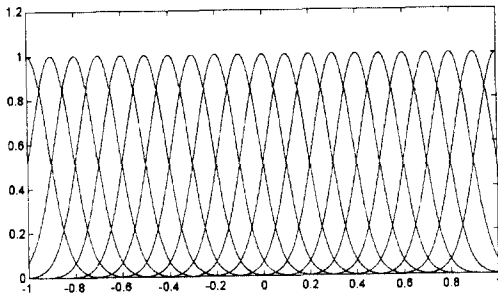
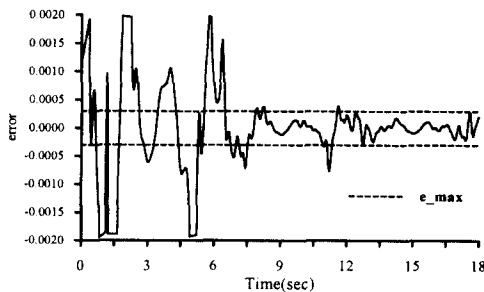


그림 5. 퍼지 논리 시스템 출력  
Fig. 5. The output of fuzzy system.



(a)



(b)

그림 6. 폭 조절에 의한 실험결과  
(a) 소속함수형태 (b) 추종 오차  
Fig. 6. Simulation results by tuning the width of membership functions.  
(a) the shape of membership function (b) tracking error

그림 6은 퍼지 소속 함수의 개수는  $C_{11} = C_{12} = \dots = C_{k_i} = \dots = 1$ 로 설정함으로 최대 개수인 21개로 두었다. 그리고 중심( $\xi_{k_i}$ )은 고정하고 GA에 의해 폭( $\sigma_{k_i}$ )만 조정하였을 때의 실험 결과이다. 이때 퍼지 소속함수의 개수를 최대 21로 설정하고 소속함수의 중심은 소속함수의 논의영역에서 0.1 간격상에 배치하였다. 이 모의 실험은 비선형 함수  $f$ 를 충분히 근사화할 수 있도록 소속함수의 개수를 정하고 소속함수를 일정한 간격상에 두었을 때 제어 성능을 평가하였다. 소속함수의 폭은 시행 착오법에 의해 설정할 수 있으나 여기서는 GA에 의해 설정하였다. 그림 3의 실험과 같이 후건부 매개변수들은 식(29)에 의해 온라인으로 조정되었다. 그림 6과 같이 오차의 최대한계  $e_{max} = 0.0003$ 으로 오차가 매우 적음을 알 수 있다. 그림 3과 그림 6의 모의실험 결과로부터 비선형 함수를 추정하기 위한 퍼지 시스템의 소속 함수 개수 및 형태는 주어진 비선형 함수의 형태에 의존한다는 것을 알 수 있다.

### V. 결 론

본 논문은 최적화 알고리즘인 유전 알고리즘과 퍼지 논리 시스템을 이용한 비선형 시스템의 피드백 선형화 제어 방식을 제안하였다. 제안되는 방식은 비선형 시스템의 모르는 비선형항을 퍼지 시스템에 의해 온라인으로 추정할 수 있었고 유전 알고리즘에 의해 퍼지 시스템의 전건부 소속함수의 개수와 형태는 제어 오차 범위를 최소화하도록 설정되었다. 이때 퍼지 규칙의 후건부 매개변수들은 전체 제어 시스템의 안정성을 보장하도록 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 얻어진 적응 규칙에 의해 조정되었으며 퍼지 시스템의 진화는 온라인 적응 제어 과정에서 이루어졌다.

### 참 고 문 헌

- [1] A. Isidori, Nonlinear Control Systems: An Introduction, Springer Verlag, 1989.
- [2] R. M. Sanner, J.-J. E. Slotine, "Gaussian networks for direct adaptive control," *IEEE Trans. on neural networks*, vol. 3, no. 6, pp. 837-863, Nov. 1992.
- [3] L. Jin, P. N. Nikiforuk, M. M. Gupta, "Direct Adaptive Output Tracking Control using



- Multilayered Neural Networks," *IEE Proceedings-D*, vol. 140, no. 6, pp. 393-398, 1993.
- [4] L. X. Wang, "Fuzzy systems are universal approximators," *Proc. IEEE Int. Conf., Fuzzy Systems*, San Diego, Mar. 1992.
- [5] J. Park, I. W. Sandberg, "Universal approximation using radial basis-function networks," *Neural Computation*, vol. 1, no. 2, pp. 246-257, 1991.
- [6] X. Qi, F. Palmieri, "Theoretical analysis of evolutionary algorithms with an infinite population size in continuous space-Part I: basic properties of selection and mutation," *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 5, no. 1, pp. 102-119, January 1994.
- [7] X. Qi, F. Palmieri, "Theoretical analysis of evolutionary algorithms with an infinite population size in continuous space-Part II: Analysis of the diversification role and crossover," *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 5, no. 1, pp. 120-129, January 1994.
- [8] J.J. Craig, P. Hsu, and S.S. Sastry, "Adaptive control of mechanical manipulators," *Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 2, pp.16-28, 1987.

---

 저 자 소 개
 

---

崔永吉(正會員) 第30卷 B編 第4號 參照  
 현재 중앙대학교 전자공학과 박사  
 과정

金成炫(正會員) 第30卷 B編 第4號 參照

沈貴寶(正會員) 第34卷 S編 第3號 參照  
 현재 중앙대학교 전기·전자·제  
 어공학부 부교수

全洪兌(正會員) 第31卷 B編 第4號 參照  
 현재 중앙대학교 전자공학과 교수