

論文97-34S-3-3

폐루프시스템의 성능을 보장하는 이산제어기 차수축소

(Discrete controller order reduction with the closed-loop performance guaranteed)

吳道昌*, 丁銀泰*, 朴烘培*

(Do Chang Oh, Eun Tae Jeung, and Hong Bae Park)

요 약

본 논문에서는 이산시간에서 폐루프시스템의 안정성과 성능을 보장하는 이산시간 제어기 축소방법을 제시한다. 이를 위하여 폐루프시스템에 대한 Lyapunov 부등식의 해를 구하고 제어기의 균형화구현(balanced realization)을 구한 후, 이 균형화시스템의 절단(balanced truncation: BT)과 특이 섭동 근사화(balanced singular perturbation approximation: BSPA) 기법들을 이용하여 저차의 제어기를 구한다. 또한 두 Lyapunov 부등식의 해가 존재할때, BT와 BSPA에 의하여 구해진 저차의 제어기들이 폐루프시스템을 안정하게 함을 보이고, 폐루프시스템의 성능저하를 나타내는 ∞ -노름(norm) 오차한계치를 구한다. 특히 BT 기법을 사용할때 고주파영역에서 오차가 작고, BSPA 기법을 사용할때는 정상상태오차가 '0'이 되게 하므로써 저주파 영역에서 오차가 작다. 마지막으로 제안된 이산제어기 축소방법의 타당성을 보이기 위한 예제를 다룬다.

Abstract

This paper is on a discrete controller order reduction with the closed-loop stability and performance guaranteed. To achieve this, after finding the solutions of two Lyapunov inequalities and balancing the full order controller system, we find the reduced order controllers using the balanced truncation(BT) and the balanced singular perturbation approximation(BSPA). When the solutions of the two Lyapunov inequalities exist, it is shown that the resulting controllers guarantee the closed-loop stability, and ∞ norm error bounds are derived for the closed-loop performance degradation. Especially, the error for closed-loop system is relatively small in high frequency region for the BT and in low frequency region for the BSPA. Finally, a numerical example is given to illustrate the validity of the proposed method.

I. 서 론

H^∞ , H^2 , μ -합성과 같은 현대 제어이론에 따르면, 표준플랜트(standard plant)를 구성하여 설계된 제어기는 최소한 표준플랜트보다 높은 차수를 가진다.^[1] 그리고 최근에는 이러한 이론들을 이산시스템으로 확장하려는 연구들이 이루어지고 있다.^[2] 복잡한 구현화(realization)와 계산량 증가 및 데이터 저장공간의 요

구 등의 실제적인 측면에서 이러한 고차의 제어기는 바람직하지 않다. 제어기 축소에서 고려하여야 할 가장 중요한 관건은 “원래 폐루프시스템의 안정성과 성능을 얼마나 보장해 줄 수 있는가?” 하는 문제이다. Anderson^[1]은 설계된 폐루프시스템의 안정성과 성능을 보장하는 저차의 제어기설계에 관한 중요성을 실제적인 측면에서 강조하였다. 최근 연속시간에서 폐루프시스템의 안정성과 성능을 고려한 많은 제어기 축소기법들이 제시되었다.^[3-6] 이러한 제어기 차수축소에서 성능을 고려하는 방법으로는, 폐루프시스템의 오차에 대해 ∞ -노름 혹은 2-노름을 취하여 최소화하는 방법과 원래 폐루프시스템의 ∞ -노름 혹은 2-노름을 그대

* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部

(School of Electrical and Electronics Eng., Kyungpook Nat'l Univ.)

接受日字: 1996年6月28日, 수정완료일: 1997年3月5日

로 유지하게 하는 방법 등이 있다. 특히 Zhou 등^[7]은 연속시간에서 페루프시스템의 안정성을 보장하고 페루프시스템 및 제어기에 대해 ∞ -노름 오차한계치를 미리 알 수 있는 연속제어기 축소방법을 제시하였다. 그러나 Zhou의 방법은 연속시간으로 제한되어 있고 Pernebo 등^[8]의 BT 기법을 이용하므로 고주파영역에서의 오차는 작으나 저주파영역에서의 오차는 상대적으로 크다.^{19,10}

따라서 본 논문에서는 Zhou의 방법을 이산시간으로 확장하여 페루프시스템의 안정성을 보장하고 ∞ -노름 오차한계치를 미리 알 수 있는 이산시간 제어기 축소방법을 제시한다. 특히 BT 기법을 사용할때 저주파영역에서 오차가 크다는 단점을 해소하기 위하여 Al-saggaf 등^[11]과 Liu 등^[9]의 BSPA 기법을 도입하여 정상상태오차가 '0'이 되게 하는 저차의 제어기를 구한다. 또한 BT와 BSPA에 의하여 구해진 저차의 제어기들이 페루프시스템을 안정하게 함을 보이고, 페루프시스템의 성능저하를 나타내는 ∞ -노름 오차한계치를 구한다. 마지막으로 제안된 이산제어기 축소방법의 타당성을 보이기 위한 예제를 다룬다.

II. 균형화시스템의 절단(BT)과 특이 섭동 근사화(BSPA)

n 차의 시불변 이산시스템에 대한 행렬 전달함수 $F(z)$ 는 상태공간에서

$$F(z) = H(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + E = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ H & E \end{bmatrix} \quad (1)$$

와 같이 표현한다. 여기서 $F(z)$ 는 개단위원 외부(open circle outside)에서 해석적이고 ∞ -노름 $\|F(z)\|_{\infty} \triangleq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \bar{\sigma}(F(\exp(j\theta)))$ 이 유한한 실유리 Hardy 공간인 RH_{∞}^0 공간에 속한다고 가정한다. 이때 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 는 최대특이치를 의미한다. Lyapunov 방정식

$$\Phi \Sigma \Phi^T - \Sigma + B B^T = 0 \quad (2)$$

$$\Phi^T \Sigma \Phi - \Sigma + C^T C = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2) \\ &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n) \geq 0, \quad \sigma_r > \sigma_{r+1} \end{aligned} \quad (4)$$

을 만족하는 양반정의(positive semidefinite)인 해 Σ 가 존재할때 (Φ, Γ, H, E) 는 균형화시스템(balanced

system)이라 한다. $\sigma_i (i=1, \dots, n)$ 는 $F(z)$ 의 i 번째 Hankel 특이치이고 Σ_1 과 Σ_2 는 각각 $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ 와 $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$ 로 둔다. 균형화시스템 (Φ, Γ, H, E) 를 $\text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 와 차원이 일치하도록 분리하면

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad H = [H_1 \ H_2] \quad (5)$$

로 표현되고 Φ_1 과 Σ_1 은 $r \times r$ 행렬들이다. 이때 BT와 BSPA에 의한 저차의 시스템 $\hat{F}(z)$ 와 $\tilde{F}(z)$ 는 각각

$$\hat{F}(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Gamma_1 \\ H_1 & E \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\tilde{F}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & \tilde{\Gamma} \\ \tilde{H} & \tilde{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 + \Phi_2(I - \Phi_4)^{-1}\Phi_3 & \Gamma_1 + \Phi_2(I - \Phi_4)^{-1}\Gamma_2 \\ H_1 + H_2(I - \Phi_4)^{-1}\Phi_3 & E + H_2(I - \Phi_4)^{-1}\Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이며 $(I - \Phi_4)$ 는 비특이행렬이라 가정한다. Al-saggaf 등^[11]과 Liu 등^[9]은 (Φ, Γ, H, E) 가 최소구현(minimal realization)일때 저차의 시스템 $(\Phi_1, \Gamma_1, H_1, E)$ 와 $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{H}, \tilde{E})$ 는 모두 RH_{∞}^0 에 속하고 최소구현이며 ∞ -노름 오차한계치가 각각

$$\|F(z) - \hat{F}(z)\|_{\infty} \leq 2\text{Tr}(\Sigma_2) \quad (8)$$

$$\|F(z) - \tilde{F}(z)\|_{\infty} \leq 2\text{Tr}(\Sigma_2) \quad (9)$$

임을 보였다.

III. 페루프시스템의 성능을 보장하는 이산제어기 차수축소

그림 1과 같은 페루프시스템에서 w 와 z 는 각각 외부입력과 제어될 출력이고, u 와 y 는 각각 제어입력과 측정출력이다.

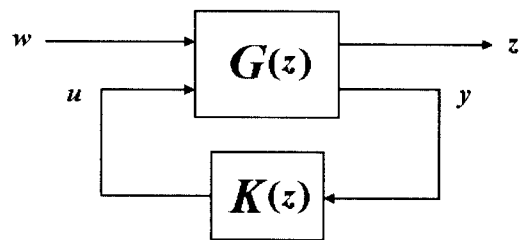


그림 1. 페루프시스템
Fig. 1. Closed loop system.

여기서 n 차의 이산 표준플랜트 $G(z)$ 와 m 차의 이산 제어기 $K(z)$ 는 각각

$$G(z) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad K(z) = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (10)$$

로 표현되고 $G(z)$ 의 입력과 출력은 각각 $[w^T \ u^T]^T$ 와 $[z^T \ y^T]^T$ 이며, w 에서 z 까지의 폐루프시스템은

$$T_{zw}(z) = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{B}{D} \\ A + B_2LD_KC_2 & B_2LC_K & B_1 + B_2LD_KD_{21} \\ B_KFC_2 & A_K + B_KFD_{22}C_K & B_KFD_{21} \\ C_1 + D_{12}D_KFC_2 & D_{12}LC_K & D_{11} + D_{12}D_KFD_{21} \end{bmatrix} \quad (11)$$

이다. 여기서 $L = (I - D_KD_{22})^{-1}$ 이고 $F = (I - D_{22}D_K)^{-1}$ 이며, $T_{zw}(z) \in RH_0^\infty$ 이고 $K(z)$ 는 폐루프시스템을 안정하게 하는 제어기이다. Lyapunov 부등식

$$\overline{A}P\overline{A}^T - P + \overline{B}\overline{B}^T \leq 0, \quad P = \text{diag}(P_1, P_2) \geq 0 \quad (12)$$

$$\overline{A}^TQ\overline{A} - Q + \overline{C}^T\overline{C} \leq 0, \quad Q = \text{diag}(Q_1, Q_2) \geq 0 \quad (13)$$

를 만족하는 블록대각행렬(block diagonal matrix) 형태의 해 P 와 Q 가 존재하면 유사변환(similarity transform)을 위한 비특이행렬 T_1 과 T_2 를 이용하여

$$T_1P_1T_1^T = T_1^{-T}Q_1T_1^{-1} = \text{diag}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \quad \zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_n \quad (14)$$

$$\begin{aligned} T_2P_2T_2^T &= T_2^{-T}Q_2T_2^{-1} \\ &= \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_m) =: \Sigma_k \\ &= \text{diag}(\Sigma_{k1}, \Sigma_{k2}), \quad \eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_r > \eta_{r+1} \geq \dots \geq \eta_m \end{aligned} \quad (15)$$

로 대각화할 수 있다.^[8,12] 여기서 $\Sigma_{k1} = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_r)$ 이고 $\Sigma_{k2} = \text{diag}(\eta_{r+1}, \dots, \eta_m)$ 이며 Σ_{k1} 과 Σ_{k2} 는 공통인 대각요소가 없다고 가정한다. 식 (11)과 같은 폐루프시스템의 구조로부터 T_2 에 의한 제어기 $K(z)$ 의 균형화구현을 구할 수 있으며, 이것을 (A_k, B_k, C_k, D_k) 로 표현할때

$$\begin{aligned} K(z) &= \begin{bmatrix} T_2A_KT_2^{-1} & T_2B_K \\ C_KT_2^{-1} & D_K \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & B_{k1} \\ A_{k3} & A_{k4} & B_{k2} \\ C_{k1} & C_{k2} & D_K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

와 같이 $\text{diag}(\Sigma_{k1}, \Sigma_{k2})$ 와 차원이 일치하도록 분리된다. 식 (11)의 폐루프시스템을 균형화시스템으로 변환하기 위하여 유사변환행렬을 $T_t =: \text{diag}(T_1, T_2)$ 로 정의하면

$$T_{zu}(z) = \begin{bmatrix} T_1\overline{A}T_1^{-1} & T_1\overline{B} \\ \overline{C}T_1^{-1} & \overline{D} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix} \quad (17)$$

와 같은 균형화 폐루프시스템을 얻을 수 있고 식 (12)와 (13)으로부터

$$A_t\Sigma_t A_t^T - \Sigma_t + B_t B_t^T \leq 0 \quad (18)$$

$$A_t^T \Sigma_t A_t - \Sigma_t + C_t^T C_t \leq 0 \quad (19)$$

을 만족한다. 여기서 $\Sigma_t = \text{diag}(\Sigma_{t1}, \Sigma_{t2}) \geq 0$ 이고 $\Sigma_{t1} = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)$ 이며 $\Sigma_{t2} = \Sigma_{k2} = \text{diag}(\eta_{r+1}, \dots, \eta_m)$ 이다. 또한 Σ_{t1} 과 Σ_{t2} 는 공통인 대각요소가 없다고 가정한다. 제어기와 폐루프시스템의 D -행렬은 유사변환에 아무런 영향을 받지 않으므로 $D_k = D_K$ 이고 $D_t = \overline{D}$ 이다. 균형화 폐루프시스템 (A_t, B_t, C_t, D_t) 를 $\text{diag}(\Sigma_{t1}, \Sigma_{t2})$ 와 차원이 일치하도록 분리하면

$$\begin{aligned} T_{zu}(z) &= \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{t1} & A_{t2} & B_{t1} \\ A_{t3} & A_{t4} & B_{t2} \\ C_{t1} & C_{t2} & \overline{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_1(A + B_1LD_KC_2)T_1^{-1} & T_1B_2LC_K & T_1B_2LC_K & T_1(B_1 + B_2LD_KD_{21}) \\ B_{11}FC_2T_1^{-1} & (A_{K1} + B_{K1}FD_{22}C_K) & (A_{K2} + B_{K2}FD_{22}C_K) & B_{K1}FD_{21} \\ B_{21}FC_2T_1^{-1} & (A_{K3} + B_{K3}FD_{22}C_K) & (A_{K4} + B_{K4}FD_{22}C_K) & B_{K2}FD_{21} \\ (C_1 + D_{12}D_KFC_2)T_1^{-1} & D_{12}LC_K & D_{12}LC_K & D_{11} + D_{12}D_KFD_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

이고 $D_t = D_{11} + D_{12}D_KFD_{21}$ 이다. 폐루프시스템 (A_t, B_t, C_t, D_t) 에 대하여 BT를 적용하여 구한 저차의 폐루프시스템 $(A_{t1}, B_{t1}, C_{t1}, D_t)$ 은

$$T_{zu}(z) = \begin{bmatrix} T_1(A + B_1LD_KC_2)T_1^{-1} & T_1B_2LC_K & T_1(B_1 + B_2LD_KD_{21}) \\ B_{11}FC_2T_1^{-1} & A_{K1} + B_{K1}FD_{22}C_K & B_{K1}FD_{21} \\ (C_1 + D_{12}D_KFC_2)T_1^{-1} & D_{12}LC_K & D_{11} + D_{12}D_KFD_{21} \end{bmatrix} \quad (21)$$

이고 '0'주파수에서 정확하게 원래의 시스템과 일치하게 하여 정상상태오차를 '0'이 되도록 보장하는 BSPA에 의한 저차의 폐루프시스템은

$$T_{zu}(z) = \begin{bmatrix} \hat{A}_t & \hat{B}_t \\ \hat{C}_t & \hat{D}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{t1} + A_{t2}(I - A_{t4})^{-1}A_{t3} & B_{t1} + A_{t2}(I - A_{t4})^{-1}B_{t2} \\ C_{t1} + C_{t2}(I - A_{t4})^{-1}A_{t3} & D_t + C_{t2}(I - A_{t4})^{-1}B_{t2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

이다. 여기서 $(I - A_{t4})$ 는 비특이행렬이라 가정하고 상

태공간표현 $(\tilde{A}_t, \tilde{B}_t, \tilde{C}_t, \tilde{D}_t)$ 의 각 요소들은 부록의 식 (43)~(46)에 나타나 있다.

보조정리 1에서는 $\hat{T}_{zu}(z)$ 와 $\tilde{T}_{zu}(z)$ 가 RH_D^∞ 에 속함을 증명하고 원래의 페루프시스템과의 ∞ -노름 오차한계치를 구한다.

보조정리 1

페루프시스템 $T_{zu}(z)$ 에 대한 저차의 페루프시스템 $\hat{T}_{zu}(z)$ 와 $\tilde{T}_{zu}(z)$ 는 RH_D^∞ 에 속하고 $\|T_{zu}(z) - \hat{T}_{zu}(z)\|_\infty \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 와 $\|T_{zu}(z) - \tilde{T}_{zu}(z)\|_\infty \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 를 만족한다.

(증명)

식 (18)과 (19)로부터

$$R_1 := -(A_t \Sigma_t A_t^T - \Sigma_t + B_t B_t^T), \quad R_2 := -(A_t^T \Sigma_t A_t - \Sigma_t + C_t^T C_t) \quad (23)$$

로 정의하고 식 (20)으로부터 확장된 시스템을 구성하면

$$T_{zwa} = \begin{bmatrix} A_{t1} & A_{t2} & B_{t1} & R_{11} \\ A_{t3} & A_{t4} & B_{t2} & R_{12} \\ C_{t1} & C_{t2} & \bar{D} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

이다. 여기서 $R_1^{1/2} = [R_{11}^T \ R_{12}^T]^T$ 이고 $R_2^{1/2} = [R_{21} \ R_{22}]$ 이며

$$A_t \Sigma_t A_t^T - \Sigma_t + [B_t \ R_1^{1/2}] [B_t^T \ R_1^{1/2}]^T = 0 \quad (25)$$

$$A_t^T \Sigma_t A_t - \Sigma_t + \begin{bmatrix} C_t \\ R_2^{1/2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_t \\ R_2^{1/2} \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

을 만족한다. BT와 BSPA에 의해서 식 (24)에 대한 저차시스템 $\hat{T}_{zwa}(z)$ 와 $\tilde{T}_{zwa}(z)$ 를 각각 구하면

$$\hat{T}_{zwa}(z) = \begin{bmatrix} A_{t1} & B_{t1} & R_{11} \\ C_{t1} & D_t & 0 \\ R_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$T_{zwa}(z) = \begin{bmatrix} A_{t1} + A_{t2}(I - A_{t4})^{-1}A_{t3} & B_{t1} + A_{t2}(I - A_{t4})^{-1}B_{t2} & R_{11} + A_{t2}(I - A_{t4})^{-1}R_{12} \\ C_{t1} + C_{t2}(I - A_{t4})^{-1}A_{t3} & D_t + C_{t2}(I - A_{t4})^{-1}B_{t2} & C_{t2}(I - A_{t4})^{-1}R_{12} \\ R_{21} + R_{22}(I - A_{t4})^{-1}A_{t3} & R_{22}(I - A_{t4})^{-1}B_{t2} & R_{22}(I - A_{t4})^{-1}R_{12} \end{bmatrix} \quad (28)$$

이다. 2장에서 논의된 BT와 BSPA의 성질에 의하면 $\hat{T}_{zwa}(z), \tilde{T}_{zwa}(z) \in RH_D^\infty$ 이고 $\|T_{zwa}(z) - \hat{T}_{zwa}(z)\|_\infty \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 와 $\|T_{zwa}(z) - \tilde{T}_{zwa}(z)\|_\infty \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 이다. 여기서

$$T_{zu}(z) - \hat{T}_{zu}(z) = [I \ 0] [T_{zwa}(z) - \hat{T}_{zwa}(z)] \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$T_{zu}(z) - \tilde{T}_{zu}(z) = [I \ 0] [T_{zwa}(z) - \tilde{T}_{zwa}(z)] \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

이므로 $\hat{T}_{zu}(z)$ 와 $\tilde{T}_{zu}(z)$ 도 RH_D^∞ 에 속하고 ∞ -노름 오차한계치는 $2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 이다. ■

지금까지는 Lyapunov 부등식을 가지는 이산 페루프시스템의 차수축소방법과 구해진 저차의 페루프시스템에 대한 안정성과 ∞ -노름 오차한계치를 다루었으나 페루프시스템의 성능을 보장하는 저차의 이산제어기를 구하는 방법이 제시되지는 않았다. 정리 1에서는 페루프시스템의 ∞ -노름 오차한계치를 보장하는 저차의 이산제어기를 구한다.

정리 1

식 (12)와 (13)의 해가 존재하면 유사변환행렬 T_2 를 이용하여 제어기 $K(z)$ 의 균형화구현 (A_k, B_k, C_k, D_k) 을 얻고 이 균형화구현을 식 (16)과 같이 분리하고, 이것으로부터 BT와 BSPA에 의한 저차의 제어기를

$$\hat{K}(z) = \begin{bmatrix} A_{k1} & B_{k1} \\ C_{k1} & D_k \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\tilde{K}(z) = \begin{bmatrix} A_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1}A_{k3} & B_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1}B_{k2} \\ C_{k1} + C_{k2}(I - A_{k4})^{-1}A_{k3} & D_k + C_{k2}(I - A_{k4})^{-1}B_{k2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

로 표현할때 다음의 i), ii), iii)이 만족된다.

- i) $\hat{K}(z)$ 와 $G(z)$ 로 이루어진 페루프시스템을 $\hat{T}_{zwb}(z)$ 라 하면 $\hat{T}_{zwb}(z) = \hat{T}_{zu}(z)$ 이다.
- ii) $\tilde{K}(z)$ 와 $G(z)$ 로 이루어진 페루프시스템을 $\tilde{T}_{zwb}(z)$ 라 하면 $\tilde{T}_{zwb}(z) = \tilde{T}_{zu}(z)$ 이다.
- iii) $D_{22} = 0$ 이면 제어기의 ∞ -노름 오차한계치는 $\|D_{12}(K(z) - \hat{K}(z))D_{21}\|_\infty \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 과 $\|D_{12}(K(z) - \tilde{K}(z))D_{21}\|_\infty \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 이다.

결과적으로 $\hat{K}(z)$ 와 $\tilde{K}(z)$ 는 페루프시스템의 안정성을 보장하고 ∞ -노름 오차한계치 $2\text{Tr}(\Sigma_{f2})$ 를 보장하는 저차의 제어기들이다.

(증명)

- i) 저차 제어기 $\hat{K}(z)$ 의 $(A_{k1}, B_{k1}, C_{k1}, D_K)$ 와 T_1 에 의해 유사변환된 표준플랜트 $G(z)$ 의 $(T_1 A T_1^{-1}, T_1 \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \ C_2] T_1^{-1}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix})$ 를 이용하여 페루프시스템을 구성하면 $\hat{T}_{zwb}(z) = \hat{T}_{zw}(z) = (A_{i1}, B_{i1}, C_{i1}, D_i)$ 임을 쉽게 알 수 있다.
- ii), iii) 부록참조 ■

정리 1에서 BT와 BSPA에 의한 저차의 제어기는 모두 페루프시스템의 안정성을 보장하고 같은 ∞ -노움 오차를 가진다. 그리고 BT와 BSPA는 각각 고주파영역과 저주파영역에서 각각 원래의 페루프시스템의 성능에 가까운 특성을 가진다.

IV. Lyapunov 부등식의 해법과 예제

식 (12)와 (13)의 Lyapunov 부등식은 선형 행렬부등식(linear matrix inequality: LMI)의 형태들이다. 이러한 부등식의 해가 존재할 충분조건을 찾는 것은 쉽지 않다. 따라서 식 (12)와 (13)을 만족하는 해 P 와 Q 가 존재할 필요조건으로부터 고려할 대상의 플랜트와 제어기를 가정한다. 식 (12)와 (13)을 만족하는 해들이 존재하면

$$\begin{aligned} & (A+B_2LD_KC_2)P_1(A+B_2LD_KC_2)^T - P_1 \\ & + (B_1+B_2LD_KD_{21})(B_1+B_2LD_KD_{21})^T \\ & \leq -B_2LC_KP_2C_K^TL^TB_2^T \leq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & (A+B_2LD_KC_2)^TQ_1(A+B_2LD_KC_2) - Q_1 \\ & + (C_1+D_{12}D_KFC_2)^T(C_1+D_{12}D_KFC_2) \\ & \leq -C_2^TF^TB_K^TQ_2B_KFC_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & (A_K+B_KFD_{22}C_K)P_2(A_K+B_KFD_{22}C_K)^T - P_2 \\ & + B_KFD_{21}D_{21}^TF^TB_K^T \\ & \leq -B_KFC_2P_1C_2^TF^TB_K^T \leq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & (A_K+B_KFD_{22}C_K)^TQ_2(A_K+B_KFD_{22}C_K) - Q_2 \\ & + C_K^TL^TD_{12}^TD_{12}LC_K \\ & \leq -C_K^TL^TB_2^TQ_1B_2LC_K \leq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

이므로 $(A+B_2LD_KC_2)$ 와 $(A_K+B_KFD_{22}C_K)$ 의 고유치들은 모두 복소평면의 폐단위원 내부에 존재함을 알 수 있다. 특별히 $D_{22} = 0$ 와 $D_K = 0$ 인 경우 플랜트와 제어기는 개단위원 외부에 어떠한 극점도 가지지 않으므로 불안정한 극점만을 가지는 플랜트나 제어기에 대해서는 Lyapunov 부등식의 해가 존재하지 않는다. 그러나 안정한 극점을 포함하는 불안정한 플랜트나 제어기에 대하여는 연속에서와 같이 제어기를 안정한 부시스템과 페루프시스템을 안정화하면서 그 자체는 불안정한 부시스템으로 분리하므로써 접근이 가능하다.¹⁷⁾

본 논문에서는 MATLAB의 LMI-LAB toolbox를 이용하여 식 (12)와 (13)의 해를 구한다. 그러나 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ 인 실수 α, β 에 대하여 식 (12)와 (13)으로부터

$$\bar{A}(\alpha P)\bar{A}^T - (\alpha P) + \bar{B}\bar{B}^T \leq -\alpha\bar{B}\bar{B}^T + \bar{B}\bar{B}^T \leq 0 \quad (37)$$

$$\bar{A}^T(\beta Q)\bar{A} - (\beta Q) + \bar{C}^T\bar{C} \leq -\beta\bar{C}^T\bar{C} + \bar{C}^T\bar{C} \leq 0 \quad (38)$$

이므로 무수히 많은 해들이 존재한다. 페루프시스템의 ∞ -노움 오차한계치를 고려할때 $\sum_{i=r+1}^m \lambda_i^{1/2}(P_2Q_2)$ 가 최소화되도록 P 와 Q 를 선택하여야 하나, 이러한 문제는 볼록최적화(convex optimization)가 아니므로 풀기가 어렵다.¹⁷⁾ 여기서 λ_i 는 i 번째 고유치를 의미한다. 따라서 4.1절에서 안정한 표준플랜트 $G(z)$ 와 제어기 $K(z)$ 에 대하여 준최적 방법을 제시한다.

1. 제어기 차수축소 알고리즘

- i) 식 (12)를 만족하고 $\sum_{i=1}^m \lambda_i(P_2) = \text{Tr}(P_2)$ 를 최소화하는 해 $P = \text{diag}(P_1, P_2)$ 와 식 (13)을 만족하

고 $\sum_{i=1}^m \lambda_i(Q_2) = \text{Tr}(Q_2)$ 를 최소화하는 해 $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2)$ 를 구한다.

- ii) 기존에 균형화 알고리즘^{18,12)}을 이용하여 식 (15)를 만족하는 T_2 를 구한다.

- iii) T_2 에 의한 원래 제어기의 균형화구현을 구하고 BT와 BSPA에 의해 식 (31)과 (32)와 같은 저차의 제어기를 구한다.

2. 예제

제시된 이산제어기 축소방법의 타당성을 보이기 위하여 식 (39)의 이산 표준플랜트와 식 (40)의 설계된 3

차의 제어를 고려한다.

4.1절의 과정 i)에서 MATLAB의 LMI-LAB을 이용하여 Lyapunov 부등식의 해 P 와 Q 를 구하고 이해와 기존의 균형화 알고리즘을 이용하여 제어기의 균형화구현을 구한다.

$$G(z) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9424 & -2.8861 & 0.9436 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & -0.0388 & 0.0189 & 0 & 0.01 \\ 0.02 & -0.0388 & 0.0189 & 1 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$K(z) = \frac{0.08913 z^3 - 0.08455 z^2 - 0.08908 z + 0.0846}{z^3 - 2.614 z^2 + 2.247 z - 0.6327} \quad (40)$$

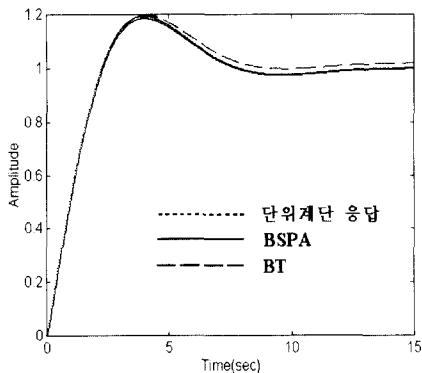
식 (31)의 BT에 의한 2차와 1차의 저차 제어기는 각각

$$\frac{0.08913 z^2 + 0.002335 z - 0.0868}{z^2 - 1.639 z + 0.649}, \quad \frac{0.08913 z + 0.08897}{z - 0.6637} \quad (41)$$

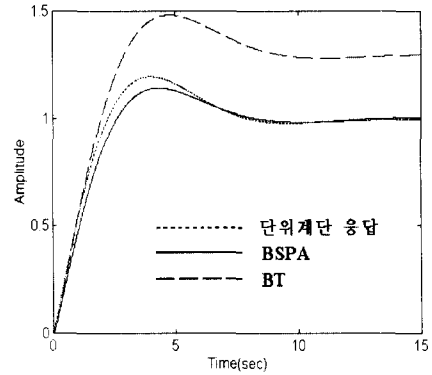
이고 식 (32)의 BSPA에 의한 2차와 1차의 저차 제어기는 각각

$$\frac{0.08938 z^2 + 0.002153 z + 0.08769}{z^2 - 1.641 z + 0.6497}, \quad \frac{0.1022 z + 0.08748}{z - 0.5943} \quad (42)$$

이다. 여기서 페루프시스템의 ∞ -노음 오차한계치는 BT와 BSPA 모두가 동일하게 나오며 2차로 축소할 경우 0.0344이고 1차로 축소할 경우 0.7132이다. 2차와 1차의 축소된 제어를 가지는 페루프시스템의 단위계단응답들을 그림 2에 각각 나타냈고 축소된 제어를 가지는 페루프시스템의 오차에 대한 주파수응답을 그림 3에 각각 나타내었다.



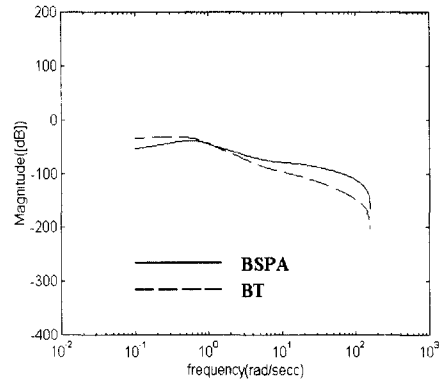
(a) 2차의 제어기



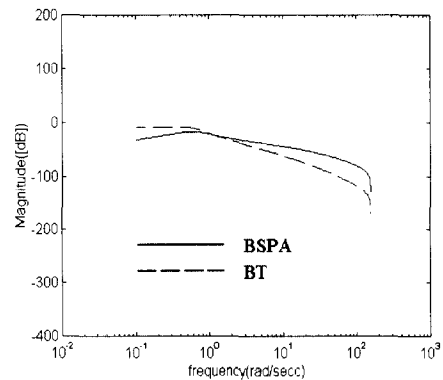
(b) 1차의 제어기

그림 2. 저차의 제어를 가지는 페루프시스템의 단위계단응답

Fig. 2. Unit step responses of closed loop systems with the reduced order controllers.



(a) 2차의 제어기



(b) 1차의 제어기

그림 3. 페루프시스템에 대한 오차의 주파수응답

Fig. 3. Frequency responses of the error for closed loop systems.

그림 3의 세로축은 $|T_{zu}(z) - \hat{T}_{zu}(z)|$ 와 $|T_{zw}(z) - \hat{T}_{zw}(z)|$ 를 [dB] 단위로 나타낸 것이며 표본화주파수를 20 [ms]로 하여 MATLAB의 BODE함수를 이용하였다.

그림 2와 3에서 알 수 있듯이 BSPA에 의한 저차의 제어기를 가지는 페루프시스템은 BT의 경우보다 더 좋은 저주파특성을 가지며 고주파특성은 비교적 BT의 경우가 비교적 좋음을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 Zhou의 방법을 이산시간으로 확장하여 페루프시스템의 안정성을 보장하고 ∞ 노음 오차한계치를 미리 알 수 있는 이산제어기 축소방법을 제시하였다. 특히 BT 기법을 사용하여 고주파영역에서 작은 오차를 가지는 저차의 이산제어기를 구하고, BSPA 기법을 도입하여 정상상태오차가 '0'이 되게 하는 저차의 이산제어기를 구하였다. 또한 페루프시스템에 대한 두 Lyapunov 부등식의 해가 존재할때, BT와 BSPA에 의하여 구하여진 저차의 제어기들이 페루프시스템을 안정하게 함을 보였고, 페루프시스템의 성능저하를 나타내는 ∞ -노음 오차한계치를 구하였다. 마지막으로 예제를 통하여 제안된 이산제어기 축소방법의 타당성을 보였다.

부 록

(정리 1의 ii) 증명)

식 (22)의 BSPA에 의한 저차의 페루프시스템 $\hat{T}_{zu}(z) = \hat{C}_t(zI - \hat{A}_t)^{-1} \hat{B}_t + \hat{D}_t$ 에 대하여 상태공간표현의 각 요소들은

$$A_t = \begin{bmatrix} T_1(A + B_2L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}F)C_2)T_1^{-1} & T_1B_2L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}\Omega) \\ (B_{k1} + \Pi A^{-1}B_{k2})FC_2T_1^{-1} & A_{k1} + B_{k1}FD_{22}C_{k1} + \Pi A^{-1}\Omega \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\hat{B}_t = \begin{bmatrix} T_1\{B_1 + B_2L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}F)D_{21}\} \\ (B_{k1} + \Pi A^{-1}B_{k2})FD_{21} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\hat{C}_t = \{(C_1 + D_{12}(D_K + LC_{k2}A^{-1}B_{k2})FC_2)T_1^{-1} \quad D_{12}L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}\Omega)\} \quad (45)$$

$$\hat{D}_t = D_{11} + D_{12}(D_K + LC_{k2}A^{-1}B_{k2})FD_{21} \quad (46)$$

이다. 여기서 Λ , Π , Ω 는 각각 $A = (I - A_{k1} - B_{k2}FD_{22}C_{k2})$ 로서 비특이행렬이고

$\Pi = (A_{k2} + B_{k1}FD_{22}C_{k2})$ 이며 $\Omega = (A_{k3} + B_{k2}FD_{22}C_{k1})$ 이다. 또한 $L = (I - D_K D_{22})^{-1}$ 이고 $F = (I - D_{22}D_K)^{-1}$ 이므로 $FD_{22} = D_{22}L$ 이고 $LD_K = D_K F$ 이다.

식 (14)에서 도입된 비특이행렬 T_1 에 의해 유사변환된 표준플랜트 $G(z)$ 의 $(T_1 A T_1^{-1}, T_1 \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \ C_2] T_1^{-1}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix})$ 와 BSPA에 의한 저차의 제어기 $\hat{K}(z)$ 의 $(\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k, \hat{D}_k)$ 로서 페루프시스템을 구성하여 $\hat{T}_{zu}(z) = \hat{C}_s(zI - \hat{A}_s)^{-1} \hat{B}_s + \hat{D}_s$ 로 표현하면 상태공간표현의 각 요소들은

$$\hat{A}_s = \begin{bmatrix} T_1(A + B_2\tilde{L}\tilde{D}_kC_2)T_1^{-1} & T_1B_2\tilde{L}\tilde{C}_k \\ \tilde{B}_k\tilde{F}C_2T_1^{-1} & \hat{A}_k + \tilde{B}_k\tilde{F}D_{22}\tilde{C}_k \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\hat{B}_s = \begin{bmatrix} T_1(B_1 + B_2\tilde{L}\tilde{D}_kD_{21}) \\ \tilde{B}_k\tilde{F}D_{21} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\hat{C}_s = [(C_1 + D_{12}\tilde{D}_k\tilde{F}C_2)T_1^{-1} \quad D_{12}\tilde{L}\tilde{C}_k] \quad (49)$$

$$\hat{D}_s = D_{11} + D_{12}\tilde{D}_k\tilde{F}D_{21} \quad (50)$$

이다. 여기서 $\tilde{L} = (I - \tilde{D}_k D_{22})^{-1}$ 이고 $\tilde{F} = (I - D_{22}\tilde{D}_k)^{-1}$ 이며 matrix inversion lemma를 이용하면

$$\tilde{L} = \{I - D_K D_{22} - C_{k2}(I - A_{k1})^{-1}B_{k2}D_{22}\}^{-1} = (L + LC_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}) \quad (51)$$

$$\tilde{F} = \{I - D_{22}D_K - D_{22}C_{k2}(I - A_{k1})^{-1}B_{k2}\}^{-1} = (F + FD_{22}C_{k2}A^{-1}B_{k2}F) \quad (52)$$

이다. 식 (43)~(46)과 식 (47)~(50)이 각각 같음을 보이면 증명은 완료된다. 이를 위하여 식 (53)~(57)과 같은 성질들을 보인다.

$$\begin{aligned} & \tilde{L}\tilde{D}_k - (L + LC_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22})(D_K + C_{k2}(I - A_{k1})^{-1}B_{k2}) \\ &= L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}D_K) + L(C_{k2} + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}C_{k2})(I - A_{k1})^{-1}B_{k2} \\ &= L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}D_K) + LC_{k2}A^{-1}(A + B_{k2}FD_{22}C_{k2})(I - A_{k1})^{-1}B_{k2} \\ &= L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}D_K) + LC_{k2}A^{-1}B_{k2} \\ &= L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}(FD_{22}D_K + I)) \\ &= L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}F) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\tilde{D}_k F = \tilde{L}\tilde{D}_k - L(D_K + C_{k2}A^{-1}B_{k2}F) = (D_K + LC_{k2}A^{-1}B_{k2})F \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{L}\tilde{C}_k = (L + LC_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22})(C_{k1} + C_{k2}(I - A_{k1})^{-1}A_{k3}) \\ &= L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}C_{k1}) + L(C_{k2} + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}C_{k2})(I - A_{k1})^{-1}A_{k3} \\ &= L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}C_{k1}) + LC_{k2}A^{-1}(A + B_{k2}FD_{22}C_{k2})(I - A_{k1})^{-1}A_{k3} \\ &= L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}B_{k2}FD_{22}C_{k1}) + LC_{k2}A^{-1}A_{k3} \\ &= L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}(A_{k3} + B_{k2}FD_{22}C_{k1})) \\ &= L(C_{k1} + C_{k2}A^{-1}\Omega) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_k \tilde{F} &= \{B_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} B_{k2}\} (F + FD_{22} C_{k2} \Lambda^{-1} B_{k2} F) \\
 &= (B_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k2} \Lambda^{-1} B_{k2}) F + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} (B_{k2} + B_{k2} F D_{22} C_{k2} \Lambda^{-1} B_{k2}) F \\
 &= (B_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k2} \Lambda^{-1} B_{k2}) F + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} (A + B_{k2} F D_{22} C_{k2}) \Lambda^{-1} B_{k2} F \\
 &= (B_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k2} \Lambda^{-1} B_{k2}) F + A_{k2} \Lambda^{-1} B_{k2} F \\
 &= \{B_{k1} + (A_{k2} + B_{k1} F D_{22} C_{k2}) \Lambda^{-1} B_{k2}\} F \\
 &= (B_{k1} + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2}) F
 \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_k + \tilde{B}_k F D_{22} \tilde{C}_k &= A_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} + \tilde{B}_k F D_{22} C_{k1} + C_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} \\
 &= A_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} + \tilde{B}_k F D_{22} C_{k1} + \tilde{B}_k F D_{22} C_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} \\
 &= A_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} + (B_{k1} + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2}) F D_{22} C_{k1} \\
 &\quad + (B_{k1} + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2}) F D_{22} C_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} \\
 &= A_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k1} + \Pi(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2} F D_{22} C_{k1} \\
 &\quad + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2} F D_{22} C_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} \\
 &= A_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k1} + \Pi(I + \Lambda^{-1} B_{k2} F D_{22} C_{k2})(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} \\
 &\quad + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2} F D_{22} C_{k1} \\
 &= A_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k1} + \Pi \Lambda^{-1} A_{k3} + \Pi \Lambda^{-1} B_{k2} F D_{22} C_{k1} \\
 &= A_{k1} + B_{k1} F D_{22} C_{k1} + \Pi \Lambda^{-1} \Omega
 \end{aligned} \tag{57}$$

식 (53)~(57)의 식들을 이용하면 $\tilde{A}_s = \tilde{A}_k$, $\tilde{B}_s = \tilde{B}_k$, $\tilde{C}_s = \tilde{C}_k$, $\tilde{D}_s = \tilde{D}_k$ 등이 만족되므로 $\hat{T}_{zms}(z) = \hat{T}_{zu}(z)$ 이다.

(정리 1의 iii) 증명)

만약 $D_{22} = 0$ 이면 식 (36)으로부터

$$A_K^T Q_2 A_K - Q_2 + C_K^T D_{12}^T D_{12} C_K \leq -C_K^T B_2^T Q_1 B_2 C_K \leq 0 \tag{58}$$

이고 T_2 에 의하여 유사변환하면

$$D_{12} K(z) D_{21} = \begin{bmatrix} T_2 A_K T_2^{-1} & T_2 B_K D_{21} \\ D_{12} C_K T_2^{-1} & D_{12} D_K D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & B_{k1} D_{21} \\ D_{12} C_{k1} & D_{12} C_{k2} & D_{12} \tilde{D}_K \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \tag{59}$$

이므로 $D_{12} K(z) D_{21}$ 의 BT는 $D_{12} \tilde{K}(z) D_{21}$ 임을 쉽게 알 수 있고

$$D_{12} \tilde{K}(z) D_{21} = \begin{bmatrix} A_{k1} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} & B_{k1} D_{21} + A_{k2}(I - A_{k4})^{-1} B_{k2} D_{21} \\ D_{12} C_{k1} + D_{12} C_{k2}(I - A_{k4})^{-1} A_{k3} & D_{12} D_K D_{21} + D_{12} C_{k2}(I - A_{k4})^{-1} B_{k2} D_{21} \end{bmatrix} \tag{60}$$

이므로 $D_{12} K(z) D_{21}$ 의 BSPA는 $D_{12} \tilde{K}(z) D_{21}$ 이다. 따라서 식 (15)와 보조정리 1에서 Lyapunov 부등식의 해를 이용한 BT와 BSPA의 ∞ -노름 오차한계치를 구하는 방법에 따르면 $\|D_{12}(K(z) - \tilde{K}(z))D_{21}\|_{\infty} \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{\tilde{r}_2})$ 과 $\|D_{12}(K(z) - \tilde{K}(z))D_{21}\|_{\infty} \leq 2\text{Tr}(\Sigma_{\tilde{r}_2})$ 이 만족된다.

참 고 문 헌

[1] B. D. O. Anderson, "Control design: Moving

from theory to practice," *IEEE Control Systems*, vol. 13, pp. 16-25, 1993.

[2] D. W. Gu, M. C. Tsai, S. D. O'Young, and I. Postlethwaite, "State-space formulae discrete-time H^∞ optimization," *Int. J. Contr.*, vol. 49, no. 5, pp. 1683-1723, May 1989.

[3] H. Rotstein, A. Desages, and J. A. Romagnoli, "Robustness consideration in reduced-order controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 4, pp. 457-459, April 1989.

[4] P. J. Goddard and K. Glover, "Performance preserving frequency weighted controller approximation: A coprime factorization approach," *Proc. 33th IEEE CDC*, Lake Buena Vista, pp. 2720-2725, Dec. 1994.

[5] D. E. Rivera and M. Morari, "Plant and controller reduction problems for closed-loop performance," *Proc. 27th IEEE CDC*, Austin Texas, pp. 1143-1148, Dec. 1988.

[6] Y. Liu, B. D. O. Anderson, and U. L. Ly "Coprime factorization controller reduction with Bezout identity induced frequency weighting," *Automatica*, vol. 26, no. 2, pp. 233-249, Feb. 1990.

[7] K. Zhou, C. D'Souza, and J. R. Cloutier, "Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed loop performance," *Systems and Control Lett.*, vol. 24, pp. 235-242, 1995.

[8] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 382-387, April 1982.

[9] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. Contr.*, vol. 50, no. 4, pp. 1379-1405, April 1989.

[10] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[11] U. M. Al-saggaf and G. F. Franklin, "Model reduction via balanced realizations: An

extention and frequency weighting techniques," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 7, pp. 687-692, July 1988.

[12] U. M. Al-saggaf, "On model reduction and

control of discrete time systems," Ph.D. Thesis, Dept. Elec. Eng., Stanford Univ., 1986.

저 자 소 개

吳道昌(正會員) 第33卷 B編 第5號 參照
 현재 창원대학교 공과대학
 국책교수

丁銀泰(正會員) 第33卷 B編 第5號 參照
 현재 창원대학교 제어계측공학과
 교수

朴烘培(正會員) 第33卷 B編 第2號 參照
 현재 경북대학교 전자전기공학부
 교수