

論文97-34S-2-9

무기억 균일 신호원에 대한 수리 형태론적인 불림과 등가 시스템의 통계적 비교

(Statistical Comparison of Morphological Dilation with Its Equivalent Linear Shift-Invariant System: Case of Memoryless Uniform Sources)

金柱明*, 羅相臣*, 崔太永*

(Ju-Myoung Kim, Sangsin Na, and Tae Young Choi)

요 약

본 논문은 무기억 균일 신호원을 수리 형태론적 불림 여파기를 통과시켰을 때, 그 결과 신호와 전력 밀도 면에서 등가적인 시스템을 구하고, 그것의 출력 신호를 불림의 출력 신호와 확률 밀도 측면에서 비교하였다. 이 등가 시스템은 선형 시불변 시스템으로서 전력 밀도 분해를 통하여 구할 수 있는데, 창의 크기가 L 인 불림에 대한 등가 시스템은 $L-1$ 개의 지연기와 L 개의 곱셈기, 그 외 3개의 덧셈기로 구성되는 유한 충격 응답 여파기이다. 그 각각의 등가 시스템 곱셈기의 계수는 표로 제시하였다. 불림의 출력 신호와 등가 시스템의 출력 신호를 비교하면, 두 출력 신호의 확률 분포는 확연히 다르다. 특히 단위 구간 $(0, 1)$ 에 분포한 균일 독립 동형 신호가 불림된 경우에 그것의 확률 밀도 분포는 1 근처에 큰 확률이 있는 반면, 선형 시불변 등가 시스템에 의한 확률 밀도 분포는 평균값 근처에 큰 확률을 가지며 이 평균에 대한 대칭 분포를 보인다. 이러한 차이는 등가 시스템은 선형 시불변 여파기에 해당하며, 불림은 비선형 시불변 여파기에 해당하기 때문에 발생한다. 불림이 주관적 성능 평가에서 선형 여파기보다 우수한 경우에는, 이러한 확률 분포의 차이가 큰 요인으로 작용함을 결론지을 수 있다.

Abstract

This paper presents a linear shift-invariant system equivalent to morphological dilation for a memoryless uniform source in the sense of the power spectral density function, and compares it with dilation. This equivalent LSI system is found through spectral decomposition and, for dilation and with window size L , it is shown to be a finite impulse response filter composed of $L-1$ delays, L multipliers and three adders. The coefficients of the equivalent systems are tabulated. The comparisons of dilation and its equivalent LSI system show that probability density functions of the output sequences of the two systems are quite different. In particular, the probability density function from dilation of an independent and identically distributed uniform source over the unit interval $(0, 1)$ shows heavy probability in around 1, while that from the equivalent LSI system shows probability concentration around the mean value and symmetry about it. This difference is due to the fact that dilation is a non-linear process while the equivalent system is linear and shift-invariant. In the case that dilation is favored over LSI filters in subjective performance tests, one of the factors can be traced to this difference in the probability distribution.

* 正會員, 亞洲大學校 電子工學科

(School of Electrical and Electronics Engineering

Ajou University)

接受日字:1996年9月23日, 수정완료일:1997年1月9日

I. 개 요

수리 형태론은 비선형 영상 처리 분야에서 영상 분할, 결함 검출, 형태 분석 등의 목적으로 많이 이용되고 있다. 수리 형태론적 여파기를 거친 신호에 대한 평가는 주관적인 방법과 통계적 분석 방법이 있는데, 통계적 분석 방법이 최근 연구 발표되어지고 있어 수리 형태론적 여파기에 대한 성능 평가가 이루어지고 있다.^[1,2] 이를 위해 수리 형태론적 여파기의 확률적 관계와 확률 밀도 함수에 대한 연구 결과도 발표되었다.^[3] 본 논문에서는 수리 형태론적 여파기의 하나인 불림(dilation)의 확률 밀도 함수와 전력 밀도를 이용하여 전력 밀도에 등가적인 선형 시불변 시스템을 구성하였다. 이러한 선형 시불변 시스템은 첫째, 수리 형태론적 불림 여파기를 통과한 출력 신호에 대한 전력 밀도 측면에서의 객관적인 평가 기준을 제공할 수 있고, 둘째, 수리 형태론적 불림 여파기와의 차이점을 연구 보완함으로써 수리 형태론적 여파기와 동일한 시스템을 구성하는 것 뿐만 아니라 더 나은 시스템을 제안할 기반이 될 수 있을 것이고, 셋째, 선형 시스템이므로 비선형 특성을 갖는 수리 형태론적 불림 여파기와는 달리 선형적인 특성을 이용할 수 있을 것이다. 이를 위하여 본 논문에서는 전력 밀도 분해를 통하여, 수리 형태론적 불림을 거친 무기억 균일(memoryless uniform) 신호원의 전력 밀도에 등가적인 시스템을 구성하였다. 수리 형태론적 불림과의 차이를 보기 위해, 두 여파기를 통과한 무기억 균일 신호원의 확률 밀도를 구하였다. 균일 신호원은, 화상신호의 가장 간단한 모형으로 쓰이기 때문에 선택되었다.

본 논문에서 제시한 등가 시스템은 선형 시불변 시스템으로서 창의 크기가 L 인 불림에 대해 $L-1$ 개의 지연기와 L 개의 곱셈기, 그리고 2개의 덧셈기로 구성되는데, 등가적으로 복잡도가 L 이 된다. 확률 분포의 비교는 창의 크기가 2일 때와 3일 때 각각에 대하여 1차원과 2차원 확률 밀도 함수를 비교하였다. 일반적인 L 의 경우에는 계산량의 엄청난 크기로 말미암아, 의미 있는 수식의 도출이 실제적으로 불가능하다. 불림과 등가 시스템의 출력 신호의 확률 밀도 상 차이점은 첫째, 대칭성인데, 등가 시스템 출력신호는 확률적으로 대칭인 반면, 불림의 경우는 그렇지 않고, 둘째, 확률 밀도의 경중에 따른 위치인데, 불림의 경우는 큰 값 쪽이 확률 밀도가 높는데 반하여, 등가 시스템의 경우는 평

균값 쪽이 확률 밀도가 높고, 셋째, 확률 밀도 분포의 전역성인데, 불림의 경우는 확률 변수가 가질 수 있는 모든 값에 대해 확률 밀도가 존재하는데 반해, 등가 시스템의 경우는 그렇지 않은 경우가 존재한다. 이 논문의 결과는 녹임(erosion)의 경우에도 거의 그대로 적용될 수 있다. 녹임의 경우에, 그 등가 시스템의 출력신호의 확률 밀도 분포는 불림의 등가 시스템 출력신호의 확률 밀도 분포와 모양에 있어서는 똑같고, 단지 평균값의 위치만 이동한다.

본 논문의 독창성은, 저자의 소견으로는 이 분야 최초로, 수리 형태론적 여파기의 전력 밀도에 등가적인 선형 시불변 시스템을 구하고, 그것을 비선형 여파기의 일종인 수리 형태론적 여파기와 확률 밀도 분포 측면에서 비교함으로써, 주관적 성능 평가에서 수리 형태론적 여파기의 우수성을 계량화하는 기초를 마련한 데 있다.

본 논문의 제 II절에서는 불림된 균일 신호의 전력 밀도와 그의 등가 시스템에 대해 다루었고, 제 III절에서는 불림 창의 크기 L 이 2와 3인 경우, 무기억 균일 신호원이 불림과 선형 시불변 시스템을 통과했을 때 각각의 결과신호에 대해 비교 분석하고, 제 IV절에서 결론을 제시하였다.

II. 불림된 균일 신호의 전력 밀도와 등가 시스템

1차원 불림 $D_L\{X\}$ 는 주어진 창 L 내에 있는 입력 신호원(source sample sequence) $(X_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ 중에서 가장 큰 값을 취하는 연산이라고 정의할 수 있다. 이렇게 불림된 신호원을 $\{U_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 라고 하면,

$$U_k = D_L\{X_k\} = \max\{X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+L-1}\} \quad (1)$$

라고 할 수 있다. 만일 입력 신호원 $(X_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ 가 무기억 균일 신호원이라고 하면, 이 신호에 대한 불림된 신호는 일정한 확률 분포 함수와 확률 밀도 함수를 갖는다.^[4,5] 그 중 2차원 확률 분포 함수는,

$$F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} F_X^{l-H}(u_1)F_X^{l-H-1}(\min(u_1, u_2))F_X^{l-H}(u_2), & \text{if } |l-H| = 1, \\ F_X^l(u_1)F_X^l(u_2), & \text{if } |l-H| > L-1 \end{cases} \quad (2)$$

이다. 또, 입력 신호원 $(X_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ 가 $(0, 1)$ 인 구간에서

균일하게 분포되어 있을 때, 확률 밀도 함수는 다음과 같이 표현된다.^[4,5]

$$f_{U_i, U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} L|l-k|u_1^{l-k-1}u_2^{L-1}I_{(0, u_1)}(u_2) \\ \quad + L|l-k|u_1^{L-1}u_2^{l-k-1}I_{(0, u_2)}(u_1) \\ \quad + (L-|l-k|)u_1^{L-|l-k|-1}\delta(u_2-u_1), & \text{if } |l-k| \leq L-1, \\ L^2u_1^{L-1}u_2^{L-1}, & \text{if } |l-k| > L-1. \end{cases} \quad (3)$$

여기서 U_k 와 U_l 은 각각 불림된 신호의 k 번째와 l 번째의 확률 변수이고, 함수 I 는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$I_{(0, u_1)}(u_2) = \begin{cases} 1, & 0 < u_2 < u_1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (4)$$

무기역 균일 입력 신호원 $\{X_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 가 구간 $(0, 1)$ 에서 균일하게 분포되어 있을 때, 출력 신호 $\{U_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{U_i, U_l}(u_1, u_2)$ 로부터 이 신호의 전력 밀도 함수 $S_U(e^{j\omega})$ 를 구할 수 있는데, 이는

$$S_U(e^{j\omega}) = \left(\frac{L}{L+1}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi k) + \frac{L}{(L+1)^2(L+2)} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \frac{L-|n|}{(L+1)^2(L+|n|+2)} \cos(n\omega) \quad (5)$$

로 보고되어 있다.^[4,5]

1. 전력 밀도의 분해)

전달 함수가 $H(e^{j\omega})$ 인 선형 시불변 시스템에 분산이 σ^2 인 무기역 균일 신호원 $\{X_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 가 입력으로 가해졌을 때, 출력 신호 $\{Y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 의 전력 밀도 $S_Y(e^{j\omega})$ 는

$$S_Y(e^{j\omega}) = \sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2 \quad (6)$$

으로 나타낼 수 있다. 역으로, 전력 밀도 $S_Y(e^{j\omega})$ 가 주어졌을 때, 분산이 σ^2 인 무기역 균일 입력 신호원 $\{X_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 으로 전력 밀도가 $S_Y(e^{j\omega})$ 인 출력 신호를 생성하도록 전달함수가 $H(e^{j\omega})$ 인 선형 시불변 시스템을 구성할 수 있는데, 이 방법이 전력 밀도의 분해이다.^[6, pp. 282-310]

전력 밀도의 분해를 위해서는 먼저 $S_Y(e^{j\omega})$ 를 z -변환식으로 표현한다. 그 다음 z -변환식으로 표현된 식 $S_Y(z)$ 를 인수분해하여 z 와 z^{-1} 에 대한 일차식들의 곱으로 나타낸다.

이렇게 나타낸 $S_Y(z)$ 의 인수 중에서 z^{-1} 에 대한 일차식들의 곱을 $H(z)$ 로 삼으면 목적한 시스템이 된다. 즉, 이렇게 구한 $H(z)$ 에 분산이 σ^2 인 무기역 균일 입력 신호원을 통과시키면 출력으로서 전력 밀도가 $S_Y(e^{j\omega})$ 인 출력 신호를 얻을 수 있다. 이 방법을, 불림을 거친 무기역 균일 신호 $\{U_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 의 전력 밀도 함수 $S_U(e^{j\omega})$ 에 적용하면 다음과 같다.

식 (5)의 불림의 전력 밀도 함수 $S_U(e^{j\omega})$ 에서 $\delta(\omega-2\pi k)$ 는 ω 가 2π 의 정수배인 곳에서만 값을 가지므로 $\omega=0$ 인 직류성분은 나중에 고려한다고 하면 ω 가 $(-\pi, \pi)$ 인 구간에서는,

$$S_{UA}(e^{j\omega}) = \frac{L}{(L+1)^2(L+2)} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \frac{L-|n|}{(L+1)^2(L+|n|+2)} \cos(n\omega) \quad (7)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 식 (5)와 대비하여 $S_{UA}(e^{j\omega})$ 의 첨자 A 는 $S_U(e^{j\omega})$ 에서 충격 신호항을 뺀, 말하자면 교류성분을 나타낸다. 그림 1은 전력 밀도의 분포를 세미로그 형식으로 나타낸 것이다. 그림 1에서 불림이 저역 통과 여파기 역할을 하고 있음을 알 수 있는데, 전력 밀도는 L 값이 증가함에 따라 점점 낮아진다.

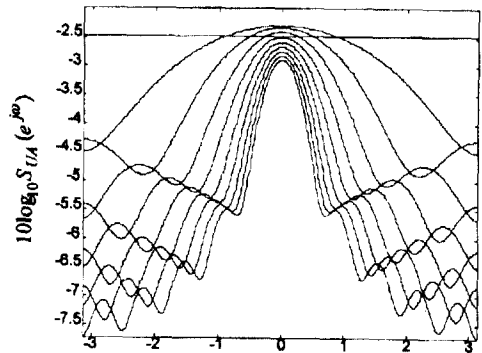


그림 1. 창 크기 $L=1$ 부터 10일 때 불림의 전력 밀도 함수 : 맨 위부터 아래로 L 이 1씩 증가한 것이다.

Fig. 1. Power spectral density functions of dilation for window size $L=1$ to 10, from the top to the bottom at $\omega=0$, respectively.

2. 등가 시스템

이제 그림 2의 구조를 갖는 선형 시불변 시스템을

고찰하여 보자. 이 고찰의 잠정적인 목표는 이 등가 시스템 출력신호의 전력 밀도가 불림된 균일신호의 $S_{UA}(e^{j\omega})$ 와 같도록 $H_A(e^{j\omega})$ 를 구하는데 있다. 평균이 0이고 $(-1/2, 1/2)$ 내에 분포된 무기역 균일 신호를 $\{E_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 라 할 때, 이 신호를 전달 함수가 $H_A(e^{j\omega})$ 인 여파기를 통과시키면, 식 (8)과 같은 전력 밀도를 갖는 출력 신호를 얻는다. 이것의 자기 상관 함수는 $R_E(n) = \delta(n)/12$ 이 된다. 따라서 분산이 $1/12$ 이므로,

$$S_{UA}(e^{j\omega}) = \frac{1}{12} |H_A(e^{j\omega})|^2 \quad (8)$$

이 때, $H_A(e^{j\omega})$ 의 첨자 A 도 교류성분을 나타낸다. 다음에 나오는 $H_A(z), H_A(z^{-1})$ 의 경우도 마찬가지이다. 식 (8)을 z -변환식으로 표시하면,

$$S_{UA}(z) = \frac{1}{12} H_A(z) H_A(z^{-1}) \quad (9)$$

가 된다. $S_{UA}(e^{j\omega})$ 는 불림 창 크기 L 값에 따라 각각 다른 값을 가지므로 $H_A(z)$ - 또한 L 값에 따라 다르게 나타날 것이다. 그러나, L 값이 커질수록 복잡하다는 것을 제외하고는 시스템을 구성하는 방법은 같으므로 모든 L 값에 대하여 일반화시킬 수 있다. 다음에 예로서 $L=2$ 인 경우와 $L=3$ 인 경우에 대해서 설명한다.

(A) 예 1: 불림 창의 크기 $L=2$ 인 경우 식 (7)에 의하여,

$$S_{UA}(e^{j\omega})|_{L=2} = \frac{1}{18} + \frac{2}{45} \cos \omega \quad (10)$$

가 되고 이것을 z -변환식으로 나타내면, 식 (9)와 $\cos \omega = (z + z^{-1})/2$ 에 의하여

$$S_{UA}(z)|_{L=2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{45} (z + z^{-1}) \quad (11)$$

$$= \frac{2}{45} \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2} z\right) \quad (12)$$

가 된다. 시스템이 안정하기 위해서는 식 (11)에서 z -평면상에서 단위원 내에 영점을 갖는 인수를 식 (9)의 $H_A(z)$ 에 포함시킨다. 따라서, 식 (11)과 (12)에 의해,

$$H_{A(z)} = \sqrt{\frac{8}{15}} \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right) \quad (13)$$

과 같이 여파기가 구성된다. 즉, $H_A(z)|_{z=e^{j\omega}} = H_A(e^{j\omega})$ 이므로 식 (8)과 식 (9)에 의하여 구하는 식이 된다.

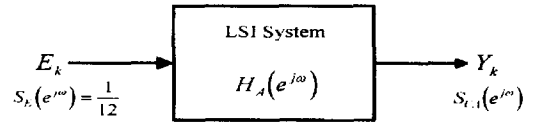


그림 2. 등가시스템
Fig. 2. Equivalent system.

(B) 예 2: 불림 창의 크기 $L=3$ 인 경우 창 크기 $L=2$ 인 경우와 마찬가지로 식 (7)에 의하여,

$$\begin{aligned} S_{UA}(e^{j\omega})|_{L=3} &= \frac{3}{80} + \frac{\cos \omega}{24} + \frac{\cos 2\omega}{56} \\ &= \frac{1}{1680} (60 \cos^2 \omega + 70 \cos \omega + 33) \quad (14) \\ &= \frac{1}{28} (\cos \omega - \alpha_1)(\cos \omega - \alpha_2) \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 α_1, α_2 는 $\cos \omega$ 에 대한 이차방정식 $60 \cos^2 \omega + 70 \cos \omega + 33 = 0$ 의 두 근으로, 각각

$$\alpha_1 = \frac{-35 + \sqrt{755}}{60}, \quad \alpha_2 = \frac{-35 - \sqrt{755}}{60} \quad (15)$$

이다. 식 (14)를 z -변환식으로 나타내면,

$$S_{UA}(z)|_{L=3} = \frac{1}{28} (2\beta_1)^{-1} (2\beta_1^*)^{-1} (1 - \beta_1 z^{-1})(1 - \beta_1^* z)(1 - \beta_1^{*2} z^{-1})(1 - \beta_1^2 z) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{12} H_{A(z)} H_A(z^{-1}) \quad (17)$$

이 된다. 여기서,

$$\begin{aligned} \cos \omega - \alpha_1 &= \frac{1}{2z} (z^2 - 2\alpha_{1z} + 1) \\ &= (-2\beta_{11}^{-1})(1 - \beta_{1z}^{-1})(1 - \beta_{1z}), \quad (18) \\ \cos \omega - \alpha_2 &= \frac{1}{2z} (z^2 - 2\alpha_{2z} + 1) \\ &= (-2\beta_1^*)^{-1} (1 - \beta_1^{*2} z^{-1})(1 - \beta_1^{*2} z) \end{aligned}$$

이다. 이것은 $\cos \omega = (z + z^{-1})/2$ 의 관계로부터 얻어지고, *는 켈레 복소수를 나타낸다. β_1 은 $z^2 - 2\alpha_1 z + 1 = 0$ 의 두 근 $-0.858144 + j1.43005, -0.308524 + j0.514138$ 중 하나이며, β_1^* 은 $\alpha_2 = \alpha_1^*$ 이므로 얻어지는 값이다. 이때, $z^2 - 2\alpha_{1z} + 1$ 의 두 근 β_1 과 β_1^{-1} 중에서 어느 것을 택해도 문제는 없으나 순방향 뿐만 아니라 역방향도 안정한 시스템이 되기 위해서는

절대값이 1보다 작은 $-0.308524 + j0.514138$ 을 택해야 한다. 그러므로, 식 (16)에서 z -평면상에서 β_1 과 β_1^* 을 영점으로 갖는 인수들을 $H_A(z)$ 에 포함시키고 나머지는 $H_A(z^{-1})$ 에 포함시킨다. 결과적으로,

$$H_A(z) = 0.545905(1 - \beta_1 z^{-1})(1 - \beta_1^* z^{-1}) = 0.545905 + 0.336849z^{-1} + 0.196267z^{-2}. \quad (19)$$

3. 시스템의 구성

시스템 함수 $H_A(z)$ 는 교류성분에 해당하는 값만 가지므로 $S_U(e^{j\omega})$ 에 등가적인 $H(z)$ 는 직류성분에 해당하는 식 (5) 우측 변의 첫 번째 항을 더해 주어야 한다. 이때 창 크기 L 에 대하여 직류성분 전력 밀도가 $[L/(L+1)]^2$ 이므로 신호에는 $L/(L+1)$ 을 더해 주어야 한다. 즉, 창 크기 $L=2$ 일 때와 $L=3$ 일 때의 등가 시스템은 그림 3(a), 그림 4(b)와 같다.

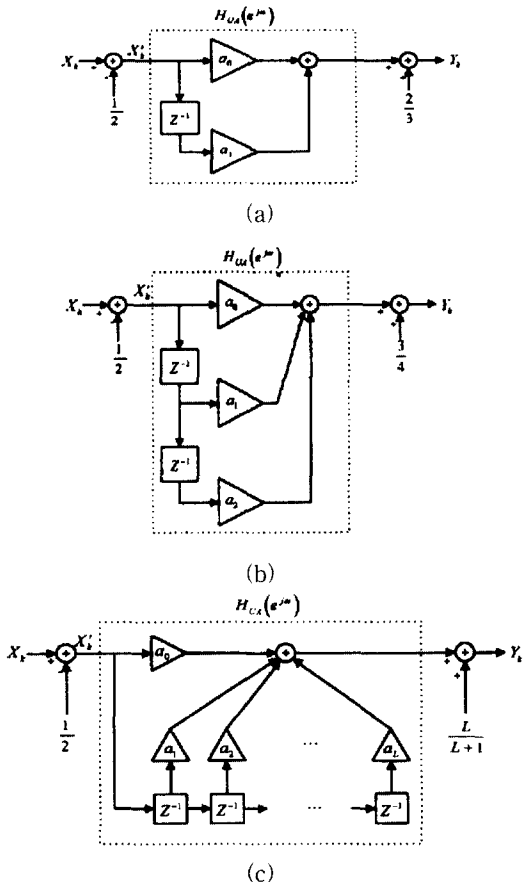
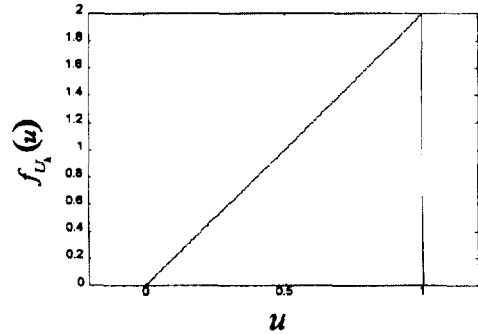
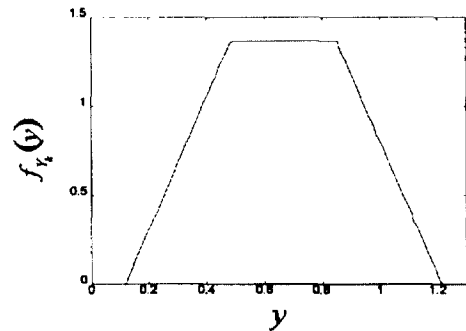


그림 3. 블림 창의 크기 L 에 따른 등가 시스템
Fig. 3. Equivalent systems for various window size L .



(a)



(b)

그림 4. 블림 창의 크기 $L=2$ 일 때 블림된 신호와 등가 시스템 출력 신호의 1차원 확률 밀도 분포
Fig. 4. First-order probability density functions of the outputs of dilation and its equivalent system for window size $L=2$.

그림 3(a), 그림 4(b)의 시스템 전단에서 $1/2$ 을 빼 주는 것은 시스템에 쓰이는 입력 $\{E_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 는 $(-1/2, 1/2)$ 사이의 값이고 $\{X_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 는 $(0, 1)$ 사이의 값이기 때문이다. 블림 창의 크기가 L 인 경우의

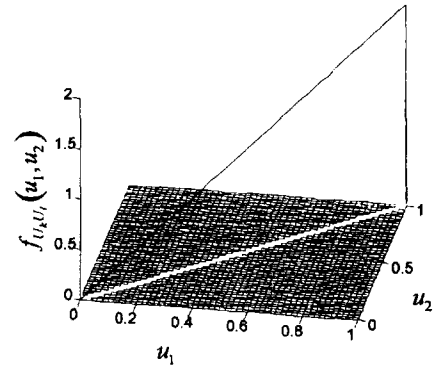
$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{L-1} z^{-L+1} \quad (20)$$

에 대해서도 이와 마찬가지로 구할 수 있다. 일반적인 경우에 대한 등가 시스템은 그림 5(c)와 같다. 이에 대한 z^{-1} 의 계수 a_k 를 표 1에 제시하였다. 이 표에서 k 는 각각의 L 에 대해서 0 부터 $L-1$ 까지 위에서부터 순서대로 나열되었다. 이 표를 통하여, k 값이 커짐에 따라 계수 a_k 는 점점 작아진다는 것을 관찰할 수 있다.

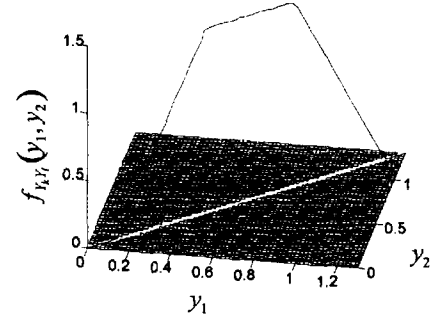
표 1. 창 크기 L에 따라 볼림된 독립 동형 신호의 등가 시스템 계수값

Table 1. Coefficients of equivalent systems for dilated iid source uniformly distributed over (0,1) with various window size L.

L	a_k	L	a_k	L	a_k	L	a_k
2	0.73029674	7	0.05218350	10	0.02968212	30	0.02909797
	0.36514837		0.20582246		0.05595750		0.02738012
3	0.54590459	8	0.16686022	20	0.06499222		0.02577369
	0.33684948		0.13559970		0.05924719		0.02426868
	0.19626663		0.11005183		0.05409784		0.02285625
4	0.42526559	9	0.08883397		0.04943313		0.02152851
	0.29139174		0.07094882		0.04521505		0.02027841
	0.19624449		0.05564794		0.04138024		0.01908963
	0.12541182		0.04234035		0.03787884		0.01798647
5	0.34267213	10	0.17931663		0.03467177		0.01693380
	0.25052442		0.14836491		0.03172490		0.01593697
	0.18224967		0.12308566		0.02900891		0.01499176
	0.12989793		0.10211349		0.02649841		0.01409433
	0.08843155		0.08447473		0.02417130		0.01324115
6	0.28332042	10	0.06945386		0.02209818		0.01242900
	0.21677024		0.05650883		0.01939190		0.01165492
	0.16568546		0.04521447		0.01810717		0.01091617
	0.12551781		0.03522143		0.01634022		0.01021019
7	0.09316150	30	0.15803929		0.01467848		0.00953462
	0.06644425		0.13295915		0.01311036		0.00888723
	0.23953930		0.11216369		0.01162493		0.00823593
	0.18929884		0.09468694		0.01021168		0.00766870
	0.14983841		0.07982442		0.03733297		0.00706365
	0.11815314		0.06704925		0.03504037		0.00653892
	0.09221379		0.04623132		0.03291442		0.00600271
0.07058314	0.03761250	0.03093346	0.00548321				



(a)



(b)

III. 확률 밀도의 분석

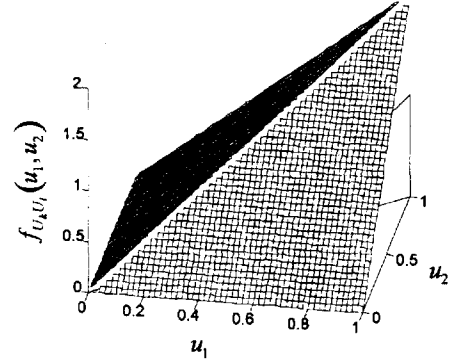
제 II절에서 구한 등가 선형 시불변 시스템은 전력 밀도의 관점에서 볼림과 등가적인 시스템이다. 그러나 그것을 제외한 다른 관점에서는 동등하지 않을 것이다. 실제로 등가 시스템은 선형 시불변 시스템임에 비해, 볼림은 비선형 시스템이므로, 다른 통계적 특성은 상당히 다를 것으로 결론지을 수 있다. 이 논문에서는, 확률 분포를 구하여, 이 두 시스템이 얼마나 다른지 비교하기로 하자. 제 II절에서 다른 L=2, L=3의 두 예에서 1차원 및 2차원 확률 밀도 함수를 구하였다. 본문에서는 구해진 확률 밀도 함수만을 제시하였으며, 이의 유도는 부록에 수록하기로 한다.

1. 볼림 창의 크기 L=2인 경우

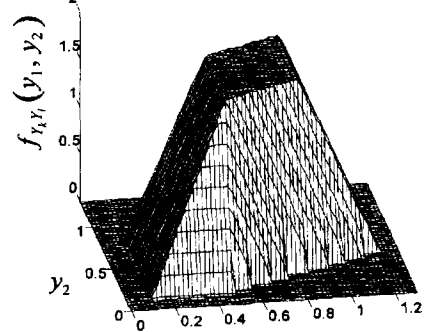
1) 1차원 확률 밀도 분포

볼림된 신호 U_k 의 1차원 확률 밀도 분포 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_{U_k}(u) &= P(U_k \leq u) \\
 &= P(\max\{X_k, \dots, X_{k+L-1}\} \leq u) \quad (21) \\
 &= F_X^L(u).
 \end{aligned}$$



(c)



(d)

한편 등가 선형 시불변 시스템의 출력 신호 Y_k 의 확률 밀도 함수는

$$f_{Y_k}(y) = \frac{1}{a_1} \int_0^1 f_X\left(\frac{1}{a_1}(y - c_1 - a_0x)\right) dx \quad (24)$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq c_1, \\ \frac{1}{a_0a_1}(y - c_1), & c_1 < y \leq c_1 + \frac{a_0}{2}, \\ \frac{1}{2a_1}, & c_1 + \frac{a_0}{2} < y \leq c_1 + a_0, \\ -\frac{1}{a_0a_1}(y - c_1 - \frac{3}{2}a_0), & c_1 + a_0 < y \leq c_1 + \frac{3}{2}a_0, \\ 0, & c_1 + \frac{3}{2}a_0 < y \end{cases}$$

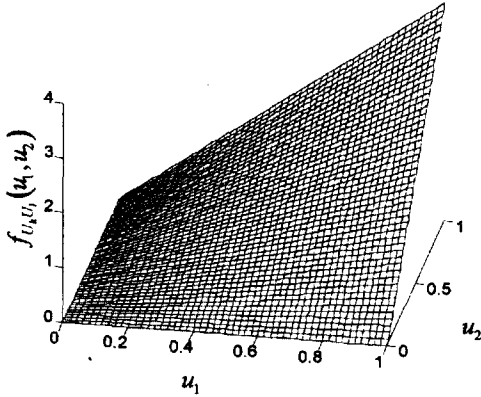
이 된다. 여기서 c_1 은 상수로서 $2/3 - (a_0 + a_1)/2$ 이고, a_0 과 a_1 은 표 1에서 나타낸 바와 같이 각각 0.7303과 0.3651이다.

(A) 고찰 그림 4(a)와 5(b)에 각각 불림된 신호 U_k 와 등가 시스템의 출력 Y_k 의 1차원 확률 밀도 함수를 도시하였다. 불림된 신호 U_k 의 경우 그림 4(a)에서 볼 수 있듯이 0부터 1까지 선형적으로 증가하여 1 근처일수록 큰 확률값을 가지나, 등가 시스템의 출력 Y_k 는 그림 5(b)에서와 같이 평균값 근처에서 큰 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 이것은 불림은 입력 중에서 최대 값을 취하는 과정이므로, (0, 1)에 분포하는 입력의 경우에, 입력의 가장 큰 값 1에 많은 확률을 갖는 정성적인 면에 부합한다. 그리고 구체적으로 확률이 (0, 1) 사이에서 선형 ($L-1=1$)으로 확률이 증가한다는 추가적인 면을 볼 수 있다. 이에 반하여 등가 시스템 출력 신호의 확률 밀도 분포는 등변 사다리꼴을 가지며 평균값 2/3에 대칭이다. 이 대칭축 좌우의 확률이 같다는 것은, 등가 시스템은 평균값을 중심으로 크거나 작은 값을 동일하게 취급한다는 것을 뜻한다. 이것은 불림의 경우에 큰 값에 가까울수록 비중이 크다는 것과 좋은 대조를 이룬다. 또 다른 점은 이 두 확률 밀도 분포가 3차 이상의 모멘트에서 차이를 나타내는데, 예를 들어, skewness의 경우 불림된 신호 U_k 는 -0.566이고 등가 시스템의 출력 신호 Y_k 는 0으로 상당히 큰 차이가 나는 것을 볼 수 있다.

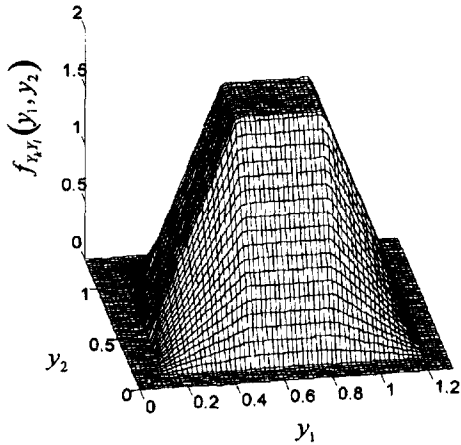
2) 2차원 확률 밀도 분포

출력 신호 인접 상호 간의 관계를 알기 위해서는 2차원 확률 밀도 분포가 필요하다. 다음에는 신호 간의 차이가 0, 1인 경우와 2 이상인 경우에 대하여 살펴본다.

(A) $|k-l|=0$ 일 때 불림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 식 (3)에 의해 다음과 같다.



(e)



(f)

그림 5. 불림 창 크기 $L=2$ 일 때, 임의의 두 신호의 간격 차 $|k-l|$ 에 따른 불림된 신호와 등가 시스템 출력신호의 2차원 확률 밀도 분포

Fig. 5. Second-order probability density functions of the outputs of dilations and its equivalent systems for various $|k-l|$ for window size $L=2$.

확률 밀도 함수는 확률 분포 함수를 미분하여 얻으므로 불림의 출력 신호 U_k 의 1차원 확률 밀도 함수는 다음과 같다.^[4,5]

$$f_{U_k}(u) = \frac{\partial}{\partial u} F_{U_k}(u) = LF_X^{L-1}(u) f_X(u). \quad (22)$$

그러므로 $L=2$ 일 때 불림의 출력 신호 U_k 의 1차원 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{U_k}(u) = 2F_X(u) f_X(u) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (23)$$

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 2u_1 \delta(u_2 - u_1), & 0 < u_1, u_2 < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (25)$$

등가 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_1} \delta(y_1 - y_2) \int_0^1 f_X \left(\frac{1}{a_1} (\min(y_1, y_2) - c_1 - a_0 x_0) \right) dx_0. \quad (26)$$

여기서 $|k-l|=0$ 일 때의 2차원 확률 밀도 분포는 $y_1 = y_2$ 일 때, 1차원 확률 밀도 분포와 같다는 것을 살펴 볼 수 있다.

(B) $|k-l|=1$ 일 때 불림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 식 (3)에 의해 다음과 같다.

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 2u_1 I_{(0, \infty)}(u_2) + 2u_1 I_{(0, u_1)}(u_1) + u_1^2 \delta(u_1 - u_2), & 0 < u_1, u_2 < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (27)$$

등가 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_0 a_1} \int_0^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_1 - a_1 x_1) \right) f_X \left(\frac{1}{a_1} (y_2 - c_1 - a_0 x_1) \right) dx_1. \quad (28)$$

이것을 구간별로 나타내면 다음과 같다.

(i) $y_1 \leq c_1$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = 0. \quad (29)$$

(ii) $c_1 < y_1 \leq c_1 + \frac{a_1}{2}$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq c_1, \\ \frac{1}{a_0^2 a_1} (y_2 - c_1), & c_1 < y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1, \\ \frac{1}{a_0 a_1^2} (y_1 - c_1), & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 < y_2 \leq c_1 + \frac{a_0}{2}, \\ \frac{1}{a_0 a_1} \left(\frac{y_1 - c_1}{a_1} - \frac{y_2 - c_1}{a_0} + \frac{1}{2} \right), & c_1 + \frac{a_0}{2} < y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 + \frac{a_0}{2}, \\ 0, & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 + \frac{a_0}{2} < y_2. \end{cases} \quad (30)$$

(iii) $c_1 + \frac{a_1}{2} < y_1 \leq c_1 + a_1$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq c_1, \\ \frac{1}{2a_0} (y_2 - c_1), & c_1 < y_2 \leq c_1 + \frac{a_0}{2}, \\ \frac{1}{2a_0 a_1}, & c_1 + \frac{a_0}{2} < y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1, \\ \frac{1}{a_0 a_1} \left(\frac{y_1 - c_1}{a_1} - \frac{y_2 - c_1}{a_0} + \frac{1}{2} \right), & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 < y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 + \frac{a_0}{2}, \\ 0, & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 + \frac{a_0}{2} < y_2. \end{cases} \quad (31)$$

(iv) $c_1 + a_1 < y_1 \leq c_1 + 2a_1$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq c_1, \\ \frac{1}{a_0^2 a_1} (y_2 - c_1), & c_1 < y_2 \leq c_1 + \frac{a_0}{2}, \\ \frac{1}{2} \frac{a_0 a_1}{a_0^2 a_1}, & c_1 + \frac{a_0}{2} < y_2 \leq c_1 + a_0, \\ -\frac{1}{a_0^2 a_1} (y_2 - c_1 - \frac{3}{2} a_0), & c_1 + a_0 < y_2 \leq c_1 + \frac{3}{2} a_0, \\ 0, & c_1 + \frac{3}{2} a_0 < y_2. \end{cases} \quad (32)$$

(v) $c_1 + 2a_1 < y_1 \leq c_1 + 5 - 2a_1$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - 2a_0, \\ \frac{1}{a_0 a_1} \left(\frac{y_2 - c_1}{a_0} - \frac{y_1 - c_1}{a_1} + 2 \right), & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - 2a_0 < y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - \frac{3}{2} a_0, \\ \frac{1}{2a_0 a_1}, & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - \frac{3}{2} a_0 < y_2 \leq c_1 + a_0, \\ -\frac{1}{a_0^2 a_1} (y_2 - c_1 - \frac{3}{2} a_0), & c_1 + a_0 < y_2 \leq c_1 + \frac{3}{2} a_0, \\ 0, & c_1 + \frac{3}{2} a_0 < y_2. \end{cases} \quad (33)$$

(vi) $c_1 + \frac{5}{2} a_1 < y_1 \leq c_1 + 3a_1$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - 2a_0, \\ \frac{1}{a_0 a_1} \left(\frac{y_2 - c_1}{a_0} - \frac{y_1 - c_1}{a_1} + 2 \right), & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - 2a_0 < y_2 \leq c_1 + a_0, \\ -\frac{1}{a_0^2 a_1} (y_2 - c_1 - \frac{3}{2} a_0), & c_1 + a_0 < y_2 \leq \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - \frac{3}{2} a_0, \\ 0, & \frac{a_0}{a_1} (y_1 - c_1) + c_1 - \frac{3}{2} a_0 < y_2. \end{cases} \quad (34)$$

(vii) $c_1 + 3a_1 < y_1$,

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = 0. \quad (35)$$

(C) $|k-l| \geq 2$ 일 때 불림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 식 (3)에 의해 다음과 같다.

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 4u_1 u_2, & 0 < u_1, u_2 < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (36)$$

등가 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_0^2} \int_{x_1=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_1 - a_1 x_1) \right) dx_1 \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_2 - c_1 - a_1 x_2) \right) dx_2. \quad (37)$$

(D) 고찰 그림 5(a)와 6(b)는 $|k-l|=0$ 인 경우의

2차원 확률 밀도 분포를 나타내고, 그림 7(c)와 8(d)는 $|k-l|=1$ 인 경우의 2차원 확률 밀도 분포를 나타낸다. 그림 5(a)와 6(b)에서 볼 수 있듯이, $|k-l|=0$ 일 때는 두 시스템 모두 $u_1 = u_2$ 와 $y_1 = y_2$ 에서만 0이 아닌데, 그 때의 함수 값은 델타함수의 크기를 의미한다. 이 값은 1차원 확률 밀도 분포와 같은데, $|k-l|=0$ 인 것은 $u_1 = u_2$ 와 $y_1 = y_2$ 에서 실제로는 1차원과 마찬가지로 나타내기 때문에 얻는 당연한 결과이다.

또한, $|k-l|=1$ 일 때는 그림 7(c)와 그림 8(d)에서 처럼, 상당히 다른 분포를 하고 있다. 첫째, 불림된 신호는 델타함수(그물면의 아래에 있는 실선 부분)를 포함하고 있지만, 등가 시스템의 출력 신호는 델타함수를 포함하고 있지 않다. 둘째, 불림된 신호는 U_k, U_l 이 각각 (0, 1)인 평면상에 모두 0이 아닌 확률 밀도를 갖지만 등가 시스템의 출력 신호는 확률 밀도가 0인 부분이 존재한다는 것이다. 예를 들어, 신호 Y_l 이 0인 경우 다음에 오는 신호 Y_k 는 0.3에서 0.6사이의 값을 취하지 않는다. 이로 1차원에서 얻은 것과 같은 결론을 얻는다. 불림의 출력은 큰 값 즉 1 근처에 더 치중되어 있으나, 등가 시스템의 출력은 평균값 근처에 치중되어 있다.

또, $|k-l| \geq 2$ 일 때는 그림 9(e)와 10(f)와 같은 분포를 한다. 이 때는 U_k, U_l 이 서로 독립이므로 1차 확률 밀도 함수의 곱으로 얻는다.

여기에서 살펴볼 수 있는 것은 첫째, 불림된 신호와 등가 시스템 출력 모두 확률 밀도 함수에 델타함수가 존재하지 않는다는 것이고, 둘째, 등가 시스템 출력 신호가 Y_k, Y_l 의 평균값을 중심으로 완벽하게 대칭이라는 것이다.

2. 불림 창 크기 $L=3$ 일 경우

1) 1차원 확률 밀도 분포

불림의 출력 신호 U_k 의 1차원 확률 밀도 함수는 식 (22)에 의해 다음과 같다.

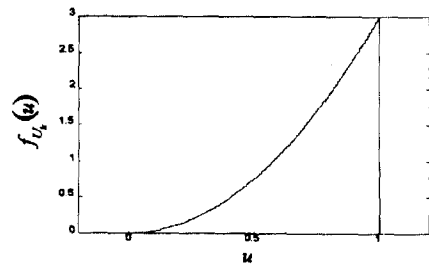
$$f_{U_k}(u) = 3F_X^2(u) f_X(u). \tag{38}$$

등가 시스템의 출력 신호 Y_k 의 1차원 확률 밀도 함수 $f_{Y_k}(y)$ 는 다음과 같다.

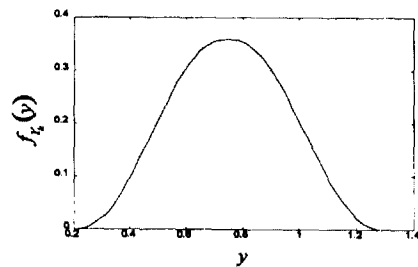
$$f_{Y_k}(y) = \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_2} (y - c_2 - a_0 x_0 - a_1 x_1) \right) dx_1 dx_0 \tag{241}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq c_2, \\ \frac{1}{2a_0 a_1 a_2} (y - c_2)^2, & c_2 < y \leq c_2 + a_2, \\ \frac{1}{2a_0 a_1} (2(y - c_2) - a_2), & c_2 + a_2 < y \leq c_2 + a_1, \\ \frac{1}{2a_0 a_1 a_2} (a_1(2y - 2c_2 - a_1) - (y - c_2 - a_2)^2), & c_2 + a_1 < y \leq c_2 + a_1 + a_2, \\ \frac{1}{a_0}, & c_2 + a_1 + a_2 < y \leq c_2 + a_0, \\ \frac{1}{2a_0 a_1 a_2} (2a_1 a_2 - (y - c_2 - a_0)^2), & c_2 + a_0 < y \leq c_2 + a_0 + a_2, \\ \frac{1}{2a_0 a_1} (2(c_2 + a_0 + a_1 - y) + a_2), & c_2 + a_0 + a_2 < y \leq c_2 + a_0 + a_1, \\ \frac{1}{2a_0 a_1 a_2} (y - c_2 - a_0 - a_1 - a_2)^2, & c_2 + a_0 + a_1 + a_2 < y \leq c_2 + a_0 + a_1 + a_2, \\ 0, & c_2 + a_0 + a_1 + a_2 < y. \end{cases} \tag{39}$$

여기서 c_2 는 상수로서 편의상 $3/4 - (a_0 + a_1 + a_2)/2$ 를 대신하여 쓴 것이고, a_0, a_1, a_2 는 표 1에 나타낸 바와 같이 각각 0.5459, 0.3368, 0.1963이다.



(a)



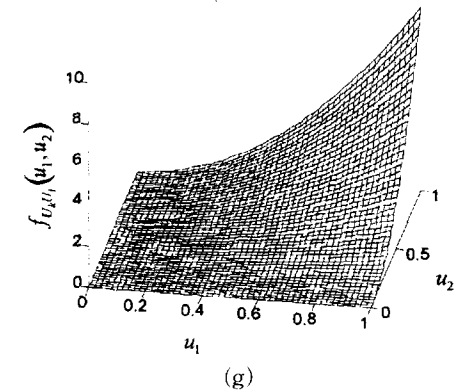
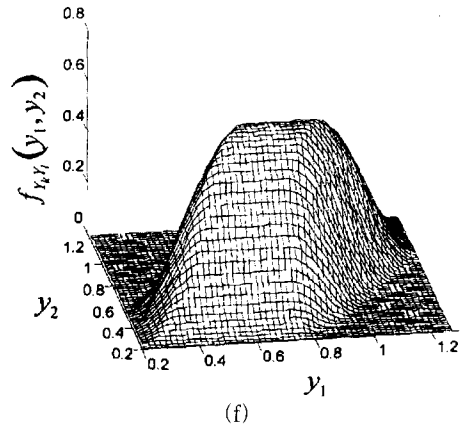
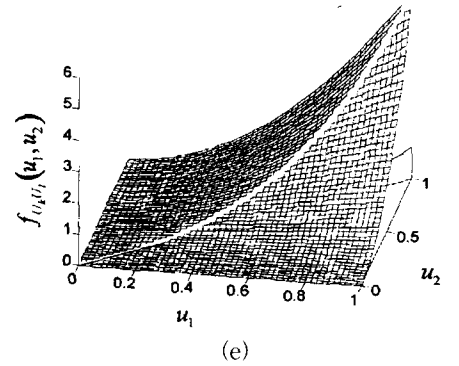
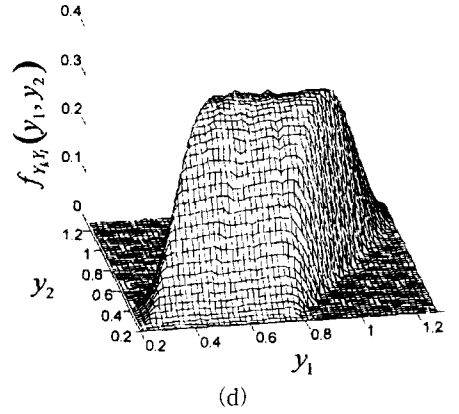
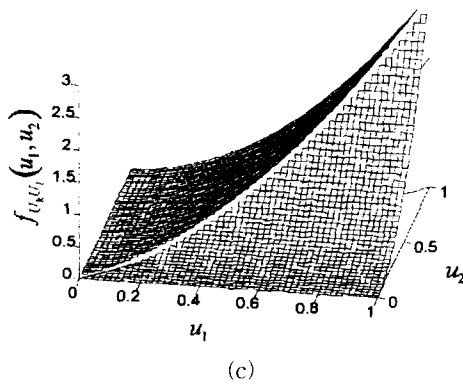
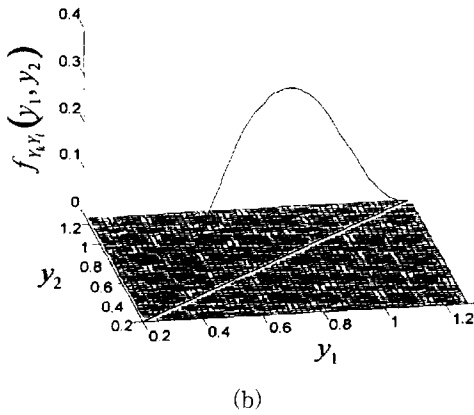
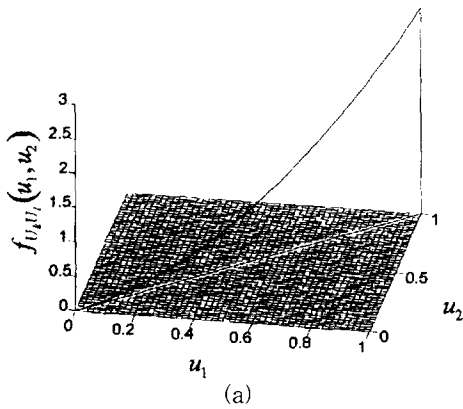
(b)

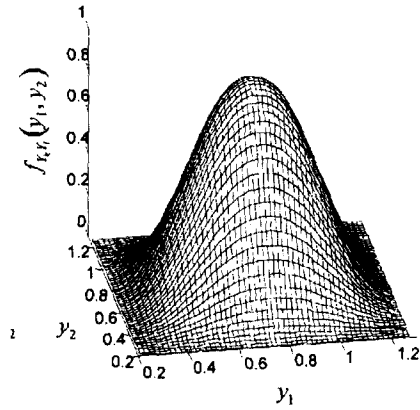
그림 6. 불림 창 크기 $L=3$ 일 때 불림된 신호와 등가 시스템 출력 신호의 1차원 확률 밀도 분포

Fig. 6. First-order probability density functions of the outputs of dilation and its equivalent system for window size $L=3$.

(A) 고찰 그림 6(a)와 그림 7(b)은 각각 불림의 출력 신호 U_k 와 등가 시스템의 출력 신호 Y_k 의 1차원 확률 밀도 함수를 보여준다. 이 신호들도 창 크기

$L=2$ 일 경우의 신호들과 마찬가지로 차이가 나는 것을 알 수 있다. 또한 이 경우는 $L=3$ 이므로, 불림된 신호는 제곱($L-1=2$)으로 증가하는 확률 밀도를 가지며 최대값은 입력 신호의 최대값인 1에서 얻어진다. 이것은 불림이 최대값에 치중된 비선형 여파기임을 단적으로 표현해 주는 것을 알 수 있다. 이에 비하여 등가 시스템의 경우 확률 밀도 분포는 $L=2$ 의 경우와 같이 평균값을 기준으로 대칭을 이루며, 평균값에서 최대 확률을 갖는 것을 관찰할 수 있다.





(h)

그림 7. 볼림 창 크기 $L=3$ 일 때, 임의의 두 신호의 간격 차 $|k-l|$ 에 따른 볼림된 신호와 등가 시스템 출력 신호의 2차원 확률 밀도 분포

Fig. 7. Second-order probability density functions of the outputs of dilations and its equivalent systems for various $|k-l|$ for window size $L=2$.

그러나 $L=2$ 인 경우에는 달리 확률 밀도 함수에 2차 함수로 표시되는 구간이 존재한다. Skewness의 경우, 볼림된 신호 U_k 는 -0.861 이고 등가 시스템의 출력 신호 Y_k 는 -2.296 으로서 역시 고차 모멘트에서 차이가 나는 것을 알 수 있다.

2) 2차원 확률 밀도 분포

(A) $|k-l|=0$ 일 때 볼림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{U_k U_l}(u_1, u_2)$ 는 식 (3)에 의해 다음과 같다.

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 3u_1^2 \delta(u_2 - u_1), & 0 < u_1, u_2 < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (40)$$

등가 선형 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2)$ 는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_2} \delta(y_1 - y_2) \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_2} (\min(y_1, y_2) - c_2 - a_0 x_0 - a_1 x_1) \right) dx_1 dx_0. \quad (41)$$

(B) $|k-l|=1$ 일 때 볼림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{U_k U_l}(u_1, u_2)$ 는 식 (3)에 의해 다음과 같다.

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 3u_1^2 I_{(0, u_1)}(u_2) + 3u_1^2 I_{(0, u_2)}(u_1) + 2u_1^2 \delta(u_2 - u_1), & 0 < u_1, u_2 < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (42)$$

등가 선형 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2)$ 는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_0 a_2} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) f_X \left(\frac{1}{a_2} (y_2 - c_2 - a_0 x_1 - a_1 x_2) \right) dx_1 dx_2. \quad (43)$$

이것의 구간에 따른 식은 III.1.2절의 2차원 확률 밀도 분포에서 $|k-l|=1$ 인 경우와 원리적으로는 마찬가지로 구할 수 있다. 그러나, 실제로 식을 유도하는 것은 대단히 번잡하다. 여기서는 그 결과만을 그림 10(d)에 도시하였다.

(C) $|k-l|=2$ 일 때 볼림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{U_k U_l}(u_1, u_2)$ 는 식 (3)에 의해 다음과 같다.

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 6u_1 u_2^2 I_{(0, u_1)}(u_2) + 6u_1^2 u_2 I_{(0, u_2)}(u_1) + u_1^4 \delta(u_2 - u_1), & 0 < u_1, u_2 < 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (44)$$

등가 선형 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수 $f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2)$ 는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_0 a_1} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) f_X \left(\frac{1}{a_1} (y_2 - c_2 - a_0 x_2 - a_2 x_1) \right) dx_1 dx_2. \quad (45)$$

이것을 그림으로 나타내면 그림 12(f)와 같다.

(D) $|k-l| \geq 3$ 일 때 볼림의 출력 신호 $U_k U_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 식 (3)에 의해 다음과 같다.

$$f_{U_k U_l}(u_1, u_2) = \begin{cases} 9u_1^2 u_2^2, & 0 \leq u_1, u_2 \leq 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases} \quad (46)$$

등가 시스템의 출력 신호 $Y_k Y_l$ 의 2차원 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{Y_k Y_l}(y_1, y_2) = \frac{1}{a_0^2} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_2 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) dx_1 dx_2. \quad (47)$$

이것을 그림으로 나타내면 그림 14(h)와 같다.

(E) 고찰 그림 7(a)부터 그림 14(h)는 볼림된 신호와 등가 시스템 출력 신호의 확률 밀도 분포를 각각 나타낸다. 볼림의 확률 밀도 함수는 $L=2$ 인 경우와 마찬가지로

가지로 $|k-l| < 3$ 인 그림 7(a), 9(c), 11(e)의 경우에는 델타함수(그림 7(a)에서는 그물면 위, 그림 9(c), 11(e)의 경우에는 그물면 아래쪽)가 존재한다. 또, $L=3$ 의 1차원 확률 밀도 함수로부터 추측할 수 있는 것처럼, 1부근으로 갈 수록 확률 밀도가 증가한다. 이 증가하는 추세는, $L=2$ 인 경우의 선형 증가와는 달리, 제곱으로 증가한다. 등가 시스템의 출력은 여전히 평균값에서 가장 큰 밀도값을 가지며, 대칭성을 갖고 있어서, 불림의 경우와 완전히 다른 분포를 갖고 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는, 불림된 무기억 균일 신호원과 동일한 전력 밀도를 갖는 출력신호를 생성하는 선형 시불변 시스템을 구하였다. 이 등가 선형 시불변 시스템은 전력 밀도의 분해를 통하여서 구하였다. 불림의 비선형 여파 성질이 선형 시불변 여파기와 다른 점을 규명하기 위해 불림 창 크기 L 이 2인 경우와 3인 경우 각각에 대하여 불림의 출력 신호와 등가 시스템의 출력 신호를, 확률 밀도 함수를 이용하여, 비교하였다. 등가 시스템은 출력 신호의 확률 밀도에 있어서 불림과 다른데, 1차원의 경우, 등가 시스템의 출력은 평균값에 대칭이며 평균값 근처에서 높은 확률을 갖는 반면, 불림된 신호는 큰 값 쪽으로 갈수록 $L=2$ 인 경우에는 선형적으로, $L=3$ 인 경우에는 제곱으로 확률 밀도가 증가하여 3차 이상의 고차 모멘트에서 큰 차이가 나는 것을 살펴 보았다. 또한, 2차원의 경우, 불림된 임의의 두 신호 U_k, U_l 사이에는 $|k-l|=1$ 일 때, 창 크기 $L=2, L=3$ 인 경우 모두, 확률 밀도 함수에 델타함수가 존재하지만, 등가 시스템의 임의의 두 출력 신호 Y_k, Y_l 의 경우에는 델타함수가 존재하지 않는다. 이것은 등가 시스템은 선형 시불변 시스템이므로, 델타함수가 없는 입력 신호에 의한 출력 신호에는 델타함수가 존재하지 않는 성질에서 연유한다. 또 불림의 경우에는 확률 밀도 함수가 0이 아닌 영역에, 등가 시스템의 경우에는 0인 영역이 존재하기도 한다. 이러한 확률 밀도 분포는 불림된 신호가 선형 여파 처리된 때보다 주관적인 평가에서 더 나은 판정을 받게 하는 역할을 하는 것으로 생각된다.

창 크기 $L=2$ 의 경우와 $L=3$ 의 경우를 종합하여 볼 때, 우리는 불림은 큰 값을 선호하는 것을 알 수 있다. 이 확률 밀도 함수들은 창 안에 들어오는 입력 중

에서 최대값을 출력하는 불림의 정성적인 측면이, 정량적으로 표현된 것이라 할 수 있다. 이에 반하여, 등가 선형 시불변 시스템은 평균값을 선호하며, 또 평균값 주위의 크거나 작은 값을 선호하는 정도가 같아서, 불림과 좋은 대조를 이룬다. 이러한 차이가, 불림이 주관적인 성능평가에서 선형 시불변 여파기보다 더 나은 평가를 받는 경우에, 요인으로 작용한다는 것을 결론지을 수 있다. 즉, 큰 값이 선호되는 불림의 출력이, 평균값이 선호되는 등가 선형 시불변 시스템의 미미한 출력보다, 인간의 감각기관에 더 큰 자극을 제공하는 것으로 생각할 수 있다.

부 록

부록에서는 제 III절에 제시한 등가 시스템 출력 신호의 확률 밀도 분포에 대한 유도를 실었다.

1. 불림 창 크기 $L=2$ 인 경우

1) 1차원 확률 밀도 분포

그림 3(a)과 같이 무기억 균일 신호원 E_k 를 X'_k 라 하고, 등가 선형 시불변 시스템의 출력 신호를 Y_k 라 하면, $Y_k = a_0 X'_k + a_1 X'_{k-1} + 2/3$, $X'_k = X_k - 1/2$ 이므로,

$$\begin{aligned} Y_k &= a_0 X'_k + a_1 X'_{k-1} + \frac{2}{3} \\ &= a_0 \left(X_k - \frac{1}{2} \right) + a_1 \left(X_{k-1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \\ &= a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + c_1 \end{aligned} \quad (48)$$

이 되고,

$$\begin{aligned} F_{Y_k}(y) &= P(Y_k \leq y) \\ &= P(a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + c_1 \leq y) \\ &= \int_{x_0 = -\infty}^{\infty} \int_{x_1 = -\infty}^{\frac{1}{a_1}(y - c_1 - a_0 x_0)} f_{X_k X_{k-1}}(x_0, x_1) dx_1 dx_0 \\ &= \int_0^1 F_X \left(\frac{1}{a_1}(y - c_1 - a_0 x_0) \right) dx_0 \end{aligned} \quad (49)$$

이 되는데 세번째 등호에서 X_k 와 X_{k-1} 은 각각 x_0, x_1 의 확률 변수이다. 네번째 등호는 X_k 와 X_{k-1} 이 무기억 신호원의 확률 변수이고 그에 따라 X_k 와 X_{k-1} 은 서로 독립인 확률 변수가 되는데, 각각 (0,1) 사이에 존재하고 균일하므로 성립하고 확률 분포가 서로 같으므로 두 확률 변수를 X 로 대표하여 나타내었다. 한편, 확률 밀도 함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f_{Y_i}(y) &= \frac{d}{dy} F_{Y_i}(y) \\
 &= \frac{d}{dy} \int_0^1 F_X\left(\frac{1}{a_1}(y-c_1-a_0x_0)\right) dx_0 \quad (50) \\
 &= \frac{1}{a_1} \int_0^1 f_X\left(\frac{1}{a_1}(y-c_1-a_0x_0)\right) dx_0.
 \end{aligned}$$

2) 2차원 확률 밀도 분포

(1) $|k-l|=0$ 일 때

$$\begin{aligned}
 F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
 &= P(Y_k \leq \min(y_1, y_2)) \\
 &= P(a_0X_k + a_1X_{k-1} + c_1 \leq \min(y_1, y_2)) \\
 &= \int_{x_0=-\infty}^{\infty} \int_{x_1=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(\min(y_1, y_2) - c_1 - a_0x_0)} f_{X, X_{k-1}}(x_0, x_1) dx_1 dx_0 \\
 &= \int_0^1 F_X\left(\frac{1}{a_1}(\min(y_1, y_2) - c_1 - a_0x_0)\right) dx_0. \quad (51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) \\
 &= \frac{1}{a_1} \delta(y_1 - y_2) \int_0^1 f_X\left(\frac{1}{a_1}(\min(y_1, y_2) - c_1 - a_0x_0)\right) dx_0. \quad (52)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 F_X(\min(y_1, y_2)) &= \int_{a=-\infty}^{y_1} \int_{\beta=-\infty}^{y_2} f_X(a) \delta(a-\beta) da d\beta, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_X(\min(y_1, y_2)) &= f_X(y_1) \delta(y_1 - y_2) \quad (53)
 \end{aligned}$$

이고 임의의 상수 $a > 0$, b 에 대하여,

$$\begin{aligned}
 F_X(a \min(y_1, y_2) - b) &= F_X(\min(ay_1 - b, ay_2 - b)) \\
 &= \int_{a=-\infty}^{ay_1-b} \int_{\beta=-\infty}^{ay_2-b} f_X(a) \delta(a-\beta) d\beta da, \quad (54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_X(a \min(y_1, y_2) - b) \\
 &= a^{2f_X}(ay_1 - b) \delta(ay_1 - ay_2) \quad (55) \\
 &= af_X(ay_1 - b) \delta(y_1 - y_2)
 \end{aligned}$$

가 된다.

(2) $|k-l|=1$ 일 때

$$\begin{aligned}
 F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
 &= P(a_0X_k + a_1X_{k-1} + c_1 \leq y_1, a_0X_{k-1} + a_1X_{k-2} + c_1 \leq y_2) \\
 &= \int_{x_1=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_1 - c_1 - a_0x_1)} \int_{x_2=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_2 - c_1 - a_0x_2)} f_{X, X_{k-1}, X_{k-2}}(x_0, x_1, x_2) dx_2 dx_1 dx_0 \\
 &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_1 - c_1 - a_0x_1)} f_X(x_0) f_X(x_2) dx_2 dx_0 dx_1 \\
 &= \int_0^1 F_X\left(\frac{1}{a_0}(y_1 - c_1 - a_1x_1)\right) F_X\left(\frac{1}{a_1}(y_2 - c_1 - a_0x_1)\right) dx_1, \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) \\
 &= \frac{1}{a_0 a_1} \int_0^1 f_X\left(\frac{1}{a_0}(y_1 - c_1 - a_1x_1)\right) f_X\left(\frac{1}{a_1}(y_2 - c_1 - a_0x_1)\right) dx_1. \quad (57)
 \end{aligned}$$

(3) $|k-l| \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
 &= P(a_0X_k + a_1X_{k-1} + c_1 \leq y_1, a_0X_{k-2} + a_1X_{k-3} + c_1 \leq y_2) \\
 &= \int_{x_1=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_1 - c_1 - a_0x_1)} \int_{x_2=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_2 - c_1 - a_0x_2)} f_{X, X_{k-1}, X_{k-2}}(x_0, x_1, x_2) dx_2 dx_1 dx_0 \\
 &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{\frac{1}{a_1}(y_1 - c_1 - a_0x_1)} f_X(x_0) f_X(x_1) dx_0 dx_1 \int_{x_2=0}^{\frac{1}{a_1}(y_2 - c_1 - a_0x_2)} f_X(x_2) dx_2 \\
 &= \int_{x_1=0}^1 F_X\left(\frac{1}{a_0}(y_1 - c_1 - a_0x_1)\right) F_X\left(\frac{1}{a_0}(y_2 - c_1 - a_0x_1)\right) dx_1. \quad (58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) \\
 &= \frac{1}{a_0^2} \int_{x_1=0}^1 f_X\left(\frac{1}{a_0}(y_1 - c_1 - a_1x_1)\right) \\
 &\quad dx_1 \int_{x_3=0}^1 f_X\left(\frac{1}{a_0}(y_2 - c_1 - a_0x_1)\right) dx_3. \quad (59)
 \end{aligned}$$

2. 불림 창의 크기 $L=3$ 인 경우

1) 1차원 확률 밀도 분포

그림 4(b)에서 식 (48)에서와 마찬가지로 방법으로, $Y_k = a_0X'_k + a_1X'_{k-1} + a_2X'_{k-2} + 3/4$, $X'_k = X_k - 1/2$ 이므로, $Y_k = a_0X'_k + a_1X'_{k-1} + a_2X'_{k-2} + c_2$ 가 된다. 그러므로,

$$\begin{aligned}
 F_{Y_i}(y) &= P(Y_k \leq y) \\
 &= P(a_0X_k + a_1X_{k-1} + a_2X_{k-2} + c_2 \leq y) \\
 &= \int_{x_2=-\infty}^{\infty} \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_0=-\infty}^{\frac{1}{a_2}(y - c_2 - a_0x_0 - a_1x_1)} f_{X, X_{k-1}, X_{k-2}}(x_0, x_1, x_2) dx_2 dx_1 dx_0 \\
 &= \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 F_X\left(\frac{1}{a_2}(y - c_2 - a_0x_0 - a_1x_1)\right) dx_1 dx_0. \quad (60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\
 &= \frac{d}{dy} \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 F_X\left(\frac{1}{a_2}(y - c_2 - a_0x_0 - a_1x_1)\right) dx_1 dx_0 \\
 &= \frac{1}{a_2} \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 f_X\left(\frac{1}{a_2}(y - c_2 - a_0x_0 - a_1x_1)\right) dx_1 dx_0. \quad (61)
 \end{aligned}$$

2) 2차원 확률 밀도 분포

(1) $|k-l|=0$ 일 때

$$\begin{aligned}
 F_{Y_i, Y_j}(y_1, y_2) &= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
 &= P(Y_k \leq \min(y_1, y_2)) \\
 &= P(a_0X_k + a_1X_{k-1} + a_2X_{k-2} + c_2 \leq \min(y_1, y_2)) \\
 &= \int_{x_0=-\infty}^{\infty} \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\frac{1}{a_2}(\min(y_1, y_2) - c_2 - a_0x_0 - a_1x_1)} f_{X, X_{k-1}, X_{k-2}}(x_0, x_1, x_2) dx_2 dx_1 dx_0 \\
 &= \int_{x_0=0}^1 \int_{x_1=0}^1 F_X\left(\frac{1}{a_2}(\min(y_1, y_2) - c_2 - a_0x_0 - a_1x_1)\right) dx_1 dx_0. \quad (62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_2} (\min(y_1, y_2) - c_2 - a_0 x_0 - a_1 x_1) \right) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{a_2} \delta(y_1 - y_2) \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_2} (\min(y_1, y_2) - c_2 - a_0 x_0 - a_1 x_1) \right) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{63}$$

(2) $|k-l|=1$ 일 때

$$\begin{aligned}
& F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
&= P(Y_k \leq y_1, Y_{k-1} \leq y_2) \\
&= P(a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + a_2 X_{k-2} + c_2 \leq y_1, a_0 X_{k-1} + a_1 X_{k-2} + a_2 X_{k-3} + c_2 \leq y_2) \\
&= \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} \int_{x_3=-\infty}^{\frac{1}{a_0}(y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2)} f_{X_k, X_{k-1}, X_{k-2}, X_{k-3}}(x_0, x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) \\
& \quad F_X \left(\frac{1}{a_2} (y_2 - c_2 - a_0 x_1 - a_1 x_2) \right) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
& f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) \\
& \quad F_X \left(\frac{1}{a_2} (y_2 - c_2 - a_0 x_1 - a_1 x_2) \right) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{a_0 a_2} \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) \\
& \quad f_X \left(\frac{1}{a_2} (y_2 - c_2 - a_0 x_1 - a_1 x_2) \right) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{65}$$

(3) $|k-l|=2$ 일 때

$$\begin{aligned}
& F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
&= P(Y_k \leq y_1, Y_{k-2} \leq y_2) \\
&= P(a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + a_2 X_{k-2} + c_2 \leq y_1, a_0 X_{k-2} + a_1 X_{k-3} + a_2 X_{k-4} + c_2 \leq y_2) \\
&= P(a_0 X_k + a_1 X_{k-1} \leq y_1 - a_2 X_{k-2} - c_2, a_1 X_{k-3} + a_2 X_{k-4} \leq y_2 - a_0 X_{k-2} - c_2) \\
&= \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \left[\int_{x_2=-\infty}^{\infty} \int_{x_3=-\infty}^{\frac{1}{a_0}(y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2)} f_{X_k, X_{k-1}}(x_0, x_1) dx_0 dx_1 \right. \\
& \quad \left. \int_{x_4=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_2 - c_2 - a_0 x_2 - a_1 x_3)} f_{X_{k-3}, X_{k-4}}(x_3, x_4) dx_3 dx_4 \right] dx_2 \\
&= \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \left[\int_{x_1=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) dx_1 \right. \\
& \quad \left. \int_{x_2=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_1} (y_2 - c_2 - a_0 x_2 - a_2 x_1) \right) dx_2 \right] dx_1.
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
& f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \left[\int_{x_1=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) dx_1 \right. \\
& \quad \left. \int_{x_2=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_1} (y_2 - c_2 - a_0 x_2 - a_2 x_1) \right) dx_2 \right] dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_0 a_1} \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \left[\int_{x_1=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) dx_1 \right. \\
& \quad \left. \int_{x_2=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_1} (y_2 - c_2 - a_0 x_2 - a_2 x_1) \right) dx_2 \right] dx_1.
\end{aligned} \tag{67}$$

(4) $|k-l| \geq 3$ 일 때

$$\begin{aligned}
& F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= P(Y_k \leq y_1, Y_l \leq y_2) \\
&= P(a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + a_2 X_{k-2} + c_2 \leq y_1, a_0 X_{k-3} + a_1 X_{k-4} + a_2 X_{k-5} + c_2 \leq y_2) \\
&= \int_{x_2=-\infty}^{\infty} \int_{x_3=-\infty}^{\infty} \int_{x_4=-\infty}^{\frac{1}{a_0}(y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2)} f_{X_k, X_{k-1}, X_{k-2}}(x_0, x_1, x_2) dx_0 dx_1 dx_2 \\
& \quad \int_{x_5=-\infty}^{\infty} \int_{x_6=-\infty}^{\infty} \int_{x_7=-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y_2 - c_2 - a_0 x_4 - a_1 x_5)} f_{X_{k-3}, X_{k-4}, X_{k-5}, X_{k-6}}(x_3, x_4, x_5) dx_3 dx_4 dx_5 \\
&= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^{\frac{1}{a_0}(y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2)} f_X(x_0) f_X(x_1) f_X(x_2) dx_0 dx_1 dx_2 \\
& \quad \int_{x_4=0}^1 \int_{x_5=0}^1 \int_{x_6=0}^{\frac{1}{a_1}(y_2 - c_2 - a_0 x_4 - a_1 x_5)} f_X(x_3) f_X(x_4) f_X(x_5) dx_3 dx_4 dx_5 \\
&= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) dx_1 dx_2 \\
& \quad \int_{x_3=0}^1 \int_{x_4=0}^1 F_X \left(\frac{1}{a_1} (y_2 - c_2 - a_0 x_4 - a_1 x_5) \right) dx_4 dx_5.
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
& f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{1}{a_0^2} \int_{x_2=0}^1 \int_{x_3=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_1 - c_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2) \right) dx_1 dx_2 \\
& \quad \int_{x_4=0}^1 \int_{x_5=0}^1 f_X \left(\frac{1}{a_0} (y_2 - c_1 - a_0 x_1) \right) dx_4 dx_5.
\end{aligned} \tag{69}$$

참고 문헌

- [1] R. L. Stevenson and G. R. Arce, "Morphological filters: Statistics and further syntactic properties," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-34, pp. 1292-1305, Nov. 1987.
- [2] J. Neejarvi, L. Koskinen, and Y. Neuvo, "Statistical Analysis of Median Type and Morphological Filters," *SPIE*, vol. 1818, pp. 366-375, Nov. 1992.
- [3] H. G. Kim, J. M. Youn, S. Na and T. Y. Choi, "The Statistical Analysis of Morphological Filters for a Continuous Stationary 1st Order Gauss-Markov Source," *전자공학회지*, vol. 32-B, pp. 79-88, 1995. 6.
- [4] S. Na and T. Y. Choi, "Second-Order Statistics of Morphological Dilation and Erosion of a Memoryless Source," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, pp. 2418-2422, Oct. 1995.
- [5] S. Na and T. Y. Choi, "Two-Dimensional

Probability Functions of Morphological Dilation and Erosion of a Memoryless Source," *Journal of Electrical Engineering and Information Science*, vol. 1, pp. 151-155,

March 1996.

[6] C. W. Helstrom, *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Maxwell Macmillan International, New York, 1991.

저 자 소 개



金 柱 明(正會員)

1968년 9월 13일생. 1995년 2월 아주대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1995년 3월 ~ 현재 아주대학교 전자공학과 대학원 석사과정 재학 중. 주요관심분야는 신호원 부호화임

羅 相 臣(正會員) 第 33卷 B編 第 12號 參照

崔 太 永(正會員) 第 33卷 B編 第 12號 參照