

論文97-34C-5-5

보상 퍼지 제어기를 이용한 비선형 시스템의 안정화

(Stabilization of Nonlinear Systems Using Compensated Fuzzy Controllers)

姜 成 勳 * , 朴 柱 榮 **

(Seonghoon Kang and Jooyoung Park)

요 약

본 논문은 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템을 대상으로 전역적 안정도(global stability)를 보장할 수 있는 퍼지 제어기를 설계하는 방법론을 제시하고, 이 방법론을 전형적인 비선형 제어 문제에 적용하는 것을 목적으로 한다. 제시된 방법론은 다음의 주요 과정을 통하여 보상 퍼지 제어기(compensated fuzzy controllers)를 제공한다: 먼저, 주어진 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템의 국소 선형 모델의 입력 행렬이 동일하지 않을 경우 입력단에 선형 보상기를 달아줌으로써 주어진 시스템이 공통 입력 행렬을 가지도록 확장한다. 다음에는, 공통 입력 행렬을 갖는 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템에 대해 선형 행렬 부등식(linear matrix inequalities)의 풀이를 통해 페루프의 전역적 안정도를 보장하는 Takagi-Sugeno 퍼지 제어기를 구한다. 기존의 PDC(parallel distributed compensation) 기법과 비교할 때, 제시된 방법론은 전역적 안정도의 판별을 위한 시행착오가 불필요한 장점을 지닌다. 제시된 방법론의 적용 가능성을 입증하기 위하여 도립 진자의 제어를 다루는 시뮬레이션을 수행하였다. 그 결과, 이 방법론을 통해 전역적 안정도와 강인성을 만족하는 제어기를 구할 수 있음을 알 수 있었다.

Abstract

The objective of this paper is to present a controller-design method that can guarantee the global stability for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models, and to apply the method to a typical nonlinear control problem. The presented method gives us a compensated fuzzy controller through the following major steps: First, if each local linear model of a given Takagi-Sugeno fuzzy system does not have the same input matrix, the method expands the system into the one with a common input matrix by inserting a linear compensator ahead of the input of the system. Next, the method finds a Takagi-Sugeno fuzzy controller guaranteeing the global stability of the closed loop via solving relevant linear matrix inequalities. Compared to the conventional PDC(parallel distributed compensation) technique, the presented method has an advantage that trial-and-errors to check the global stability are not necessary. An illustrative simulation on the control of inverted pendulum is performed to demonstrate the applicability of the presented method, and its results show that a controller satisfying the global stability and robustness can be obtained by the method.

I. 서 론

* 正會員, 高麗大學院 情報工學科

(Department of Information Engineering, Graduate School of Korea University)

** 正會員, 高麗大學校 制御計測工學科

(Department of Control and Instrumentation Engineering, Korea University)

接受日字:1996年8月23日, 수정완료일:1997年5月10日

퍼지 개념을 이용한 시스템의 제어는, 근래에 들어와 비약적인 발전을 거듭해 왔으며 그 응용 분야가 점차 확장되는 추세를 보여주고 있다. 이와 같은 발전과 함께, 퍼지 시스템의 해석 및 성능 평가 과정에 시스템 이론을 도입하여 안정도(stability) 등을 분석하고, 이러한 분석 결과를 바탕으로 체계적인 설계 방법론을

확립하고자 하는 노력이 점차 활발해지고 있다^[1-3]. 이러한 방향을 지향하는 연구들 중 최근에 주목을 받고 있는 방법 중 하나로, Tanaka, Wang 등에 의해 제안된 PDC 기법(parallel distributed compensation technique)을 들 수 있다^[4-8].

PDC 기법은 퍼지 모델링과 선형 제어 이론, 그리고 퍼지 결합(fuzzy blending)의 개념을 종합적으로 이용하는 체계적 퍼지 제어기 설계 이론이다^[4-8]. 이 기법을 적용하는 설계 방법론의 첫째 단계에서는, 제어하고자 하는 비선형 시스템의 동특성을 TS 퍼지 모델(Takagi-Sugeno type fuzzy model)^[9]로 표현한다. TS 퍼지 모델에서는, 모델을 구성하는 각 퍼지 IF-THEN 규칙의 전건부가 퍼지 규칙 고유의 형태를 띠는 반면에 후건부는 퍼지 개념이 배제된 선형 상태 방정식 형태를 갖는다. 따라서, 전체 시스템은 국소적 선형 시스템들(local linear systems)의 퍼지 결합(fuzzy blending)으로 설명될 수 있다. 다음 단계에서는 각 국소 선형 모델에 대하여 선형 상태 궤환 제어(linear state feedback control)를 구한 후 TS 모델을 이용한 퍼지 결합(fuzzy blending)을 통하여 전체 퍼지 제어기를 구성한다. 마지막 단계에서는 이상의 과정을 거쳐 구해진 퍼지 제어기가 안정도(stability) 등의 요건을 만족하는지를 확인하고 만족스러운 결과가 얻어질 때까지 “제어기 선택 + 안정도 확인”의 과정을 반복하게 된다. 이러한 설계 방법론은 궁극적으로 전체 시스템을 만족시키는 퍼지 제어기를 제공할 수 있기는 하지만, 일단 퍼지 제어기의 국소 이득들을 선택한 이후에 이들이 전역적 안정도를 보장하는지를 확인하는 시행착오를 거쳐야 한다는 단점을 갖는다. 그리고 보다 주요한 문제점으로 선택된 이득들에 의해 전체 시스템의 안정도가 보장되지 못했을 때 이들 중 어느 이득에 얼마만큼의 책임이 있는지를 판단하는 것이 어려움을 들 수 있다.

본 논문에서는 PDC 기법이 갖고 있는 이러한 단점들을 해결하기 위하여 보상 퍼지 제어기(compensated fuzzy controllers)의 사용과 선형 행렬 부등식(linear matrix inequality)을 이용한 문제 풀이를 제시한다. 제시된 방법론은 다음의 주요 과정을 통하여 보상 퍼지 제어기(compensated fuzzy controllers)를 제공한다: 먼저, 주어진 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템의 국소 선형 모델의 입력 행렬이 동일하지 않을 경우 입력단에 선형 보상을 달아줌으로써 주어진 시스템이 공

통 입력 행렬을 가지도록 확장한다. 다음에는, 공통 입력 행렬을 갖는 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템에 대해 선형 행렬 부등식(linear matrix inequalities)의 풀이를 통해 페루프의 전역적 안정도를 보장하는 Takagi-Sugeno 퍼지 제어기를 구한다. 기존의 PDC(parallel distributed compensation) 기법과 비교할 때, 제시된 방법론은 전역적 안정도의 판별을 위한 시행착오가 불필요한 장점을 지닌다. 제시된 방법론은 독립자의 제어를 다루는 시뮬레이션을 통하여 그 적용 가능성이 평가되었다. 시뮬레이션 결과, 이 방법론은 전역적 안정도와 강인성을 만족하는 제어기를 제공할 수 있음을 확인할 수 있었다.

본 논문의 구성은 다음과 같다: 2장에서는 기존의 PDC 방법을 이용한 시스템 모델링 및 제어기 설계 방법을 소개하고 이 방법이 갖는 한계를 간략하게 언급한다. 3장에서는 PDC 기법이 갖는 문제점을 극복하기 위한 대안으로 TS 퍼지 제어기의 출력단에 선형 보상기(linear compensator)를 직렬 연결하는 구조를 제안하고, 전체 시스템을 안정화시킬 수 있는 보상 퍼지 제어기(compensated fuzzy controllers)를 설계하는 절차를 확립한다. 그리고 4장에서는 제시된 방법론의 효과를 입증하기 위하여 독립자(inverted pendulum) 제어 문제를 고려한다. 마지막으로 5장에서는 결론을 제시한다.

II. TS 퍼지 모델과 PDC 기법

다음에서는, 본 논문에서 사용하는 주요 기호와 용어를 정의하고, 이론 전개 과정에서 필요한 기본 지식을 설명한다.

대칭인 행렬 $M \in R^{n \times n}$ 에 대하여, “ $M > 0$ ”은 M 이 양의 정부호(positive-definite)임을 의미하는데, 이는 M 의 모든 고유값(eigenvalue)이 양수임과 동치이다. 마찬가지로, “ $M < 0$ ”은 M 이 음의 정부호(negative-definite)임을 나타내고, M 의 모든 고유값이 음수임을 나타낸다. 집합 $\text{Co}\{A_1, \dots, A_n\}$ 은 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ 을 만족하는 원소 $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$ 들로 이루어지는 convex hull을 의미한다.

PDC 기법^[4-8]은 Tanaka, Wang 등에 의해 제안된 방법론으로써, 비선형 퍼지 시스템의 안정도를 보장하는 TS 퍼지 제어기를 제공할 수 있다. [4]에서 설명된 바와 같이, 이 방법은 그림 1에 보여진 설계 방법

론의 한 축을 형성한다. 이 방법론에 따르면, 제어 대상이 되는 비선형 시스템은 우선 시스템 모델링 과정을 거쳐 TS 퍼지 모델로 수식화 된다. TS 퍼지 모델은 “국소적 선형 모델(local linear model)의 퍼지 결합(fuzzy blending)”으로 설명될 수 있는데, 이를 이용한 비선형 시스템의 모델링은 일반적으로 다음과 같은 형태의 IF-THEN 규칙들로 구성된다:

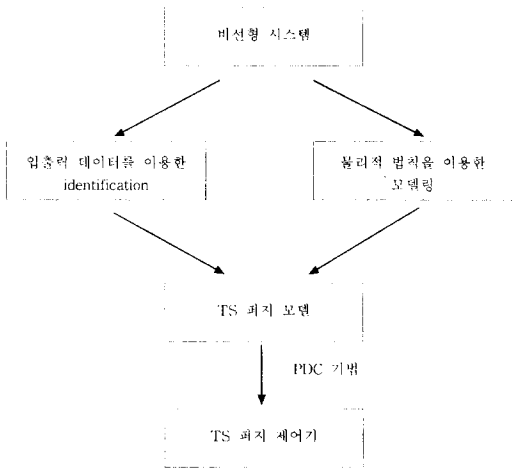


그림 1. TS 퍼지 모델을 기반으로 하는 퍼지 제어기 설계 과정
 Fig. 1. TS fuzzy model-based fuzzy control design.

규칙 i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and ... and $z_g(t)$ is M_{ig} ,

THEN $\frac{dx}{dt}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$. (1)

$i = 1, \dots, r$

여기서, M_{ij} 는 퍼지 집합, x 는 상태 벡터, u 는 입력 벡터, r 은 IF-THEN 규칙의 개수, $z_1 \dots z_g$ 는 전건부 변수이다. 그리고 각 벡터 및 행렬의 차원은 다음과 같다:

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}, i = 1, \dots, r.$$

위의 퍼지 규칙에 따르면, 시점 t 에서의 상태 벡터의 미분 $(dx/dt)(t)$ 는 다음과 같이 시점 t 에서의 상태 $x(t)$, 입력 $u(t)$ 및 전건부 변수 벡터 $z(t)$ 의 함수로 표현될 수 있다:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{W_s(t)} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, 각 국소 선형 모델에 대한 가중치 역할을 하는 w_i 는 $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(z_j(t))$ 의 식으로 얻어지는데, 이때 각 $M_{ij}(z_j(t))$ 는 전건부 변수 $z_j(t)$ 가 퍼지 집합 M_{ij} 에 속하는 정도(membership grade)를 나타낸다. 이하에서는 수식의 길이를 단축하기 위하여 $w_i(z(t))$ 를 $w_i(t)$ 로 표현하기로 한다. 그리고 $\sum_{i=1}^r w_i(t)$ 는 $W_s(t)$ 로 나타낸다. 본 논문의 이론 전개 과정에서는, $w_i(t) \geq 0$ 과 $\sum_{i=1}^r w_i(t) > 0$ 를 가정하는데, 이러한 가정은 일반적인 퍼지 시스템이 통상적으로 만족하는 조건이다. r 개의 선형 모델의 가중 평균(weighted average) 형태인 (2) 식은, 가중치 $w_i(t)$ 의 계산에 사용되는 전건부 변수 벡터 $z(t)$ 가 상태 벡터 $x(t)$ 와 긴밀한 상관 관계를 가지므로, 더 이상 선형일 수 없다. 이러한 형태의 비선형 시스템을 안정화시키기 위해서, [4-8]에서는 소위 PDC 기법을 제안하였다. 이 기법에서는, 우선 TS 퍼지 모델을 구성하는 각 IF-THEN 규칙에 등장하는 선형 상태 방정식 $(dx/dt)(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ 에 대하여 이를 안정화시킬 수 있는 선형 상태 궤환 제어기(linear state feedback controller) $u = K_i x$ 를 구한다. 그 후에, 이들에 대한 퍼지 결합(fuzzy blending)을 통하여 전체적인 제어기를 구성하게 된다. 따라서, 제어기의 수식적 표현은 다음의 (3) 식과 같아진다:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) \{K_i x(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(t)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) \{K_i x(t)\}}{W_s(t)} \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 식의 가중치 $w_i(t)$ 를 계산하는 데 사용되는 소속 함수들은 퍼지 시스템 (2)에 사용되었던 소속 함수들과 똑같은 것은 물론이다. 따라서 (3) 식을 (1) 식에 대입하면, 전체의 폐루프(closed-loop)를 묘사하는 상태 방정

식이 다음과 같이 얻어진다:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(t)w_j(t)\{A_i+B_iK_j\}\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(t)w_j(t)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t)^2(A_i+B_iK_i)\mathbf{x}(t) + 2\sum_{i < j} w_i(t)w_j(t)G_{ij}\mathbf{x}(t)}{W_{ss}(t)} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $W_{ss}(t)$ 와 G_{ij} 는 각각 다음의 (5), (6) 식으로 정의되는데, 장차의 이론 전개 과정에서 등장하는 수식들 중 (5), (6) 식으로 표현되는 항들은 앞으로도 각각 $W_{ss}(t)$ 와 G_{ij} 로 부르기로 한다:

$$W_{ss}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(t)w_j(t) \quad (5)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2} \quad (6)$$

비록 TS 퍼지 제어기 (3)이, 각 국소 선형 모델 (A_i, B_i) 를 안정화시킬 수 있는 국소 이득 K_i 의 퍼지 결합으로 구성되기는 하지만 이러한 구성이 반드시 전체 시스템 (4)의 안정도를 보장하는 것은 아니다^[4]. 각 국소 모델의 시스템 행렬 $A_i + B_i K_i$ 가 안정함을 보이는 것만으로는 불충분한 전체 페루프의 안정도 확보는, 오히려 이차식 형태의 리아푸노프 함수 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, $P > 0$ 의 존재성을 이용하면 훨씬 쉽게 해결될 수 있다. 즉, 상태 방정식 (4)의 해가 될 수 있는 모든 궤적 $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ 에 대하여 $dV(\mathbf{x})/dt \triangleq (\partial V / \partial \mathbf{x}) \cdot (d\mathbf{x}/dt) < 0$ 를 만족하는 $P > 0$ 가 존재할 경우, 시스템 (4)의 안정도는 선형 상태 방정식에 관한 리아푸노프 안정도 정리^[10-11] 로 부터 보장될 수 있다. 이러한 논리를 (4)식에 적용하여 얻어진 결과가 바로 참고문헌 [4]의 정리 3에 제시된 충분조건이다. 독자의 편의를 위하여, 이 정리를 본 논문에서 사용하는 범례에 따라 고쳐 써서 소개하면 다음과 같다:

정리 1. 조건 ①을 동시에 만족하는 행렬 $P > 0$ 가 존재하면, 퍼지 시스템 (4)의 평형점(equilibrium point) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 은 전역적 접근 안정(globally asymptotically stable)이다.

조건 ①:

$$(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (7)$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r \quad (8)$$

위의 정리는 주어진 퍼지 제어기가 퍼지 시스템 (4)를 안정화시킬 수를 있는가를 확인하는 작업에 효과적으로 활용될 수 있다. 실제로 [4]에서 제안하는 PDC 기법에서는, 먼저 퍼지 모델 (3)의 각 국소 선형 모델 (A_i, B_i) 에 대하여 이를 안정화시킬 수 있는 선형 상태 제환 이득 K_i 를 구한 후, 이들이 (7), (8) 식으로 표현되는 조건 ①을 만족하는지를 확인하는 과정을 따른다.

이러한 설계 방법론은 궁극적으로 전체 시스템을 안정화시키는 퍼지 제어를 제공할 수 있기는 하지만, 몇 가지 주요한 단점을 갖는다. 첫째, TS 퍼지 제어기의 각 국소 이득(local gain) K_i 를 구하는 시점에서는, 이 국소 이득이 전체 시스템을 안정화시킬 수 있는 선택인지를 확신할 수 없다. 따라서 일단 각 국소 이득을 선택한 후 충분조건 (7), (8)을 확인하는 시행착오를 되풀이해야만 한다. 그리고 보다 주요한 문제점으로, 선택된 이득 K_i 들에 의해 전체 시스템의 안정도 확보가 보장되지 못했을 때 이들 중 어느 이득에 얼마만큼의 책임이 있는지를 판단하는 것이 어렵다. 둘째, 충분조건 (7), (8)은 페루프의 안정도를 보장하는 데 있어서 필요 이상의 여유도를 요구할 가능성을 지닌다. 즉, 이 식들은 상태 방정식 $(d\mathbf{x}/dt)(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ 의 불확실한 시변 시스템 행렬(uncertain time-varying system matrix) $A(t)$ 가 $A_i + B_i K_i$ 와 G_{ij} 들을 정점(vertex)으로 갖는 콘벡스 집합에 속한 경우에 대한 충분조건을 제시하고 있지만, 실제 상태 방정식 (4)의 시스템 행렬 $[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(t)w_j(t)\{A_i + B_i K_j\}] / W_{ss}(t)$ 는 경우에 따라 G_{ij} 들 중 일부와는 전혀 무관할 수 있다. 이러한 단점은, 주어진 제어기 설계 문제를 필요 이상으로 어렵게 만들고 해를 구하는 과정에서 불가피하게 수많은 시행착오를 겪게 할 가능성의 원인이 된다.

시스템 및 퍼지 제어를 나타내는 (2), (3)식으로부터 알 수 있듯이, 제어기의 구성은 $w_i(t)$ 에 대한 정보를 필요로 하고 시스템 모델 역시 같은 정보를 필요로 한다. 이러한 사실을 효과적으로 활용하면, (4)식에 등장하는 교차항(cross-term)을 없앨 수 있고 이에 따라 (8)식이 포함하는 잉여 여유도를 완화시키는 것이 가능해진다. 또한, 안정도를 보장하는 제어기의 집합에 관한 유용한 정보를 손쉽게 얻어낼 수도 있다. 다음 장에서는 선형 행렬 부등식(linear matrix inequality, LMI)과 보상 퍼지 제어기(compensated fuzzy con-

troller)를 이용하여, 이상에서 설명한 PDC 기법의 단점을 극복할 수 있는 해결책을 제시한다.

III. 선형 행렬 부등식과 보상 퍼지 제어기

앞장에서 우리는 (4)식으로 표현되는 퍼지 제어 시스템의 안정도를 다루는 PDC 기법을 소개하고 이 방법론이 갖는 단점을 생각해 보았다. 참고문헌 [4]에서는, 국소 선형 상태 방정식의 입력 행렬 B_i 가 각각의 i 에 대해서 항상 같은 행렬 B 를 취할 경우에 대하여 매우 흥미로운 관찰을 제시하고 있다. 즉, $B_i = B, \forall i$ 가 성립할 때, 안정인 행렬 G 에 대하여 $A_i + BK_i = G, \forall i$ 가 되도록 국소 이득(local gain) K_i 들이 선택되면, G_{ij} 는 항상 G 와 같아지므로 정리 1과 리아푸노프 정리^[11]로부터 전체 시스템의 안정도가 보장된다. 이러한 안정도 판별은 앞장에서 소개한 일반적인 설계 방법론에 비하면 매우 단순하고 편리하다. 하지만 각 국소 모델에 같은 B 가 사용될 경우라 할지라도, 이러한 G 가 반드시 존재하는 것은 아니다. 예를 들어, A_1, A_2, B 가 다음과 같이 주어질 때에는 여하한 이득 행렬 K_1, K_2 로도 결코 $A_1 + BK_1$ 과 $A_2 + BK_2$ 을 같게 만들 수 없다:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

따라서 이러한 기법은 효과적이기는 하나, 특수한 경우에만 위력을 발휘할 수 있는 한정적 용도의 도구일 수밖에 없다.

반면에, 이상에서 고려한 “각 국소 모델의 입력 행렬이 같은 경우”를 잘 관찰하면 편리하면서도 범용인 설계 방법론을 도출해 낼 수 있다. 입력 행렬이 공통일 때, 즉 $B_i = B, \forall i$ 이 성립할 때, TS 퍼지 모델 (2)는 다음 식으로 단순화된다:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) \{A_i x(t) + B u(t)\}}{W_s(t)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) \{A_i x(t)\}}{W_s(t)} + B u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

따라서, TS 퍼지 제어기를 통한 피드백(feedback)이 존재하는 페루프는 다음과 같이 다루기 편리한 형태의 상태 방정식으로 표현될 수 있다:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} \{A_i x(t)\} + B \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} \{K_i x(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} \{A_i + BK_i\} x(t) \end{aligned} \quad (10)$$

이때 가중치 $w_i(t)$ 는 시스템과 제어기에 동시에 영향을 미치는 가변 파라메터이므로, 전체 시스템은 그림 2의 구조를 갖게 된다. 따라서, 우리가 다루는 시스템은 전전부 변수 벡터의 순시치(instantaneous value)가 가중치를 좌우하는 상태 궤환 선형 시스템들의 가중평균임을 알 수 있다. (10) 식에 등장하는 정규화된 가중치(normalized weighting factors) $w_i(t) / W_s(t)$ 들은 각각 음이 아닌 실수이고 전체의 합이 1이므로, (10)식의 상태 방정식이 갖는 시스템 행렬은 다음과 같이 불필요한 잉여 여유도가 완전히 배제된 형태로 표현 가능하다:

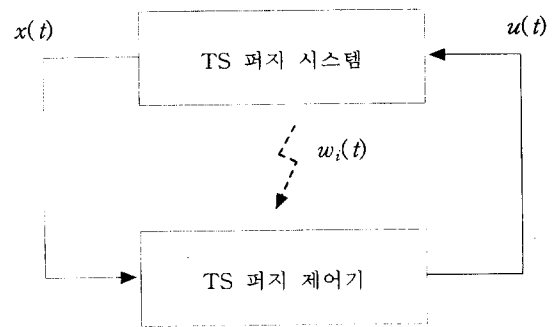


그림 2. TS 퍼지 제어 시스템의 개념도
Fig. 2. Schematic diagram of TS fuzzy control system.

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} \{A_i + BK_i\} \in \text{Co} \{A_1 + BK_1, \dots, A_r + BK_r\}$$

따라서, 다음에 소개하는 불확실한 시변 시스템의 안정도에 관한 정리^[10]의 적용이 가능하다:

정리 2: 불확실한 시변 상태 방정식 $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t)$, $A(t) \in \text{Co} \{A_1, \dots, A_r\}$ 에 대하여, 임의의 해 $x(t) \neq 0$ 의 궤적을 따라 항상 감소하는 이차식 함수 $V(\xi) = \xi^T P \xi$, $P > 0$ 가 존재함은 $A_i^T P + P A_i < 0, i = 1, \dots, r$ 를 만족하는 행렬 $P > 0$ 가 존재함과 동치이다.

이러한 이차식 함수가 존재할 때, 위의 불확실한 시스템은 이차 안정(quadratic stable)이라고 불린다. 그리고 불확실한 시변 상태 방정식으로 표현된 시스템이 이차 안정일 경우에는, 이 시스템은 리아푸노프 정리에

따라 일반적인 의미의 안정도를 소유하게 된다^[10]. 즉, 이차 안정이면 반드시 안정이다. 따라서 다음 식을 만족하는 P 및 $K_i, i = 1, \dots, r$ 이 존재하면, 이들 국소 이득 K_i 에 대한 퍼지 결합을 취함으로써 안정도를 보장하는 퍼지 제어기를 얻고자 하는 소기의 목적을 달성할 수 있게 된다:

$$P > 0 \quad (11)$$

$$(A_i + BK_i)^T P + P(A_i + BK_i) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (12)$$

널리 알려진 바와 같이, 위와 같은 형태의 행렬 부등식은 변수 P, K_i 에 대해 선형도 아니고 해집합이 콘벡스하지도 않기 때문에 과거에는 일반적인 해법으로 통하는 유용한 도구로 생각되지 못하였다^[10]. 그러나 Bernussou, Peres, Geromel 등이 제시한 변수 치환^[12]은 (11), (12)식을 이들과 동치인 선형 행렬 부등식으로 바꿔 줌으로써, 최근에 제어 분야에서 주목을 받고 있는 LMI 해법^[10,13]을 곧바로 적용할 수 있게 해주었다. 이에 관해 자세히 설명하면 다음과 같다:

행렬 $Q = Q^T \in R^{n \times n}$ 과 $Y_i \in R^{m \times n}$ 들을 다음과 같이 정의하자:

$$Q = P^{-1}, \quad Y_i = K_i Q, \quad i = 1, \dots, r. \quad (13)$$

이때, Q 는 양의 정부호인 P 의 역행렬이므로 $Q > 0$ 이 성립한다. 따라서 행렬 부등식 (12)는 그 좌우 측에 각각 Q 를 곱한 다음의 경우와 동치가 된다:

$$Q(A_i + BK_i)^T + (A_i + BK_i)Q < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (14)$$

이식을 구성하는 항들 중 $K_i Q$ 를 Y_i 로 치환하면, 다음과 같이 안정도 조건 (11), (12)와 동치가 되는 “ Q 와 $Y_i, i = 1, \dots, r$ 에 관한 선형 행렬 부등식”이 얻어진다:

$$Q > 0 \quad (15)$$

$$QA_i^T + Y_i^T B^T + A_i Q + B Y_i < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (16)$$

위의 부등식은 변수 Q, Y_i 에 관해서 선형이므로, 원래의 충분조건 (11), (12)와는 달리 Interior point method 등의 수치해법^[13] 또는 상용 LMI 소프트웨어^[14]로 직접 풀 수 있다. 그리고, 우리가 원하는 국소 이득 K_i 들은 위의 부등식의 해 Q, Y_i 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다:

$$K_i = Y_i Q^{-1}, \quad i = 1, \dots, r \quad (17)$$

이상에서 제안한 해법은, 주어진 비선형 시스템의 국소 모델이 공통 입력 행렬을 갖는 경우에만 적용이 가능하다. 이러한 문제점은 TS 퍼지 제어기의 출력단에 간단한 선형 보상기(linear compensator)를 연결함(그림 3 참조)으로써 해결할 수 있는데, 이러한 방법은 이득 스케줄링을 이용하는 제어(gain-scheduled control) 분야에서 발견할 수 있는 기술이다^[15]. 국소 모델의 입력 행렬이 서로 다른 경우에는, 그림 3과 같이 TS 퍼지 제어기와 시스템 사이에 다음 식으로 표현되는 선형 보상기를 삽입한다:

$$\frac{dx_c}{dt} = A_c x_c + B_c u$$

$$u_c = C_c x_c \quad (18)$$

이때, 삽입되는 선형 보상기에는 안정도 이외에는 특별한 제약조건이 붙지 않는다^[15]. 따라서 차수(order)가 너무 크지 않고 (SISO 시스템의 경우에는 차수 1로 충분함) 극점(pole)의 위치가 너무 허수축에 가깝지 않은 안정한 선형 시스템이라면, 공통 입력 행렬을 확보하기 위한 선형 보상기로 사용하는 데 전 지장이 없다. 제어기를 궁극적으로 샘플링에 의존하는 디지털 시스템으로 구현하기를 원한다면 제어기의 동특성이 너무 빨라지지 않도록 극점을 너무 왼쪽으로 잡지 않는 것도 도움이 된다. 그리고, 설계 과정에서 선형 보상기의 파라미터를 상태 궤환 이득과 함께 변수로 취급하여 선형 행렬 부등식을 푸는 것도 하나의 방법이 될 수 있다(부록 참조).

보상기가 삽입된 이후에, TS 퍼지 제어기 양단에서 바라보는 전체 시스템은 “TS 퍼지 시스템”과 “선형 보상기”의 직렬 연결이 되고 이들이 나타내는 전체 시스템의 상태 방정식은 다음과 같이진다.

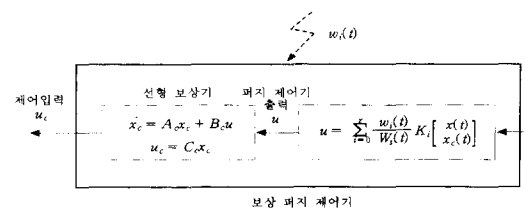


그림 3. 보상 퍼지 제어기

Fig. 3. Compensated fuzzy controller.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_i(t)} \{A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_i(t)} \{A_i \mathbf{x}(t) + B_i C_c \mathbf{x}_c(t)\}, \\ \frac{d\mathbf{x}_c}{dt} &= A_c \mathbf{x}_c(t) + B_c \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

위 식을 상태 벡터 $\mathbf{X}(t) \triangleq [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}_c^T(t)]^T$ 에 관한 식으로 고쳐 쓰면, 다음과 같은 “공통 입력 행렬을 갖는 TS 퍼지 모델”을 얻을 수 있다:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_i(t)} \left(\begin{bmatrix} A_i & B_i C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \right) \quad (19)$$

따라서, 앞에서 유도한 “공통 입력 행렬 문제”에 관한 해법을 (19)식에 적용함으로써, 주어진 퍼지 시스템 (1)을 안정화시키는 보상 퍼지 제어기를 구할 수 있다. 이상에서 설명한 설계 방법론을 요약하면 표 1과 같다.

표 1. 보상 퍼지 제어기의 설계 절차
Table 1. Design procedure for compensated fuzzy controllers.

- [1] 비선형 시스템을 TS 퍼지 시스템 형태로 모델링한다.
- [2] TS 퍼지 시스템의 각 국소 선형 모델의 입력 행렬이 동일하지 않으면, 시스템의 입력단에 선형 보상기를 달아 줌으로써 주어진 모델을 (19)식과 같이 “공통 입력 행렬을 갖는 TS 시스템”으로 확장한다.
- [3] 구해진 TS 퍼지 시스템의 국소 모델을 나타내는 파라미터 (A_i, B) , $i = 1, \dots, r$ 을 이용하여 선형 행렬 부등식 (15), (16)의 해 Q , Y_i , $i = 1, \dots, r$ 을 구한다.
- [4] TS 퍼지 제어기의 국소 이득을 식 “ $K_i = Y_i Q^{-1}$, $i = 1, \dots, r$ ”을 이용하여 구한 후, 그림 3의 보상 퍼지 제어기를 구성한다 (이때, 단계 [1]에서 다루었던 원래의 모델이 공통 입력 행렬을 가지는 경우에는 선형 보상기 부분이 불필요하다).

IV. 시뮬레이션

다음에서는 이상에서 확립한 보상 퍼지 제어기를 위한 설계 방법론의 타당성을 확인하기 위해 도립 진자의 제어 문제를 고려한다. 수레 위에 붙은 도립 진자의 운동은 다음과 같은 비선형 상태 방정식으로 묘사될 수 있다^[11]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)}. \quad (20)$$

여기서, x_1 은 진자가 수직 방향을 기준으로 몇 라디안(rad)만큼 기울었는지를 나타내고, x_2 는 x_1 에 대한 미분, 즉 진자의 위치에 대한 각속도이다. g 는 중력 가속도 상수 9.8 m/sec^2 이고, m 과 M 은 각각 진자와 수레의 질량이다. $2l$ 은 진자의 길이(단위는 m)이고, u 는 수레에 가해지는 힘의 크기(단위는 N)이다. 그리고 a 는 $1/(m+M)$ 으로 정의되는 상수이다. 본 논문의 시뮬레이션에는 [4]에서 사용된 것과 똑 같은 시스템을 사용한다. 이 시스템을 묘사하는 파라미터는 다음과 같다: $m = 2.0$ (kg), $M = 8.0$ (kg), $2l = 1.0$ (m).

진자의 초기 위치가 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 의 범위에 있을 때 수레에 적절한 힘 u 를 가하여 진자가 수직으로 설 수 있도록 평형을 잡는 제어 문제를 생각해 보자. 본 논문의 방법론을 이러한 제어 문제에 적용하기 위해서는, 우선 단계 [1]의 작업으로 (20)의 시스템을 충분히 가깝게 근사할 수 있는 TS 퍼지 모델을 구해야 한다. 이를 위해, 진자가 수직 위치 부근에 있는 경우와 수평 위치 부근에 있는 경우를 중심으로 각각 IF-THEN 규칙을 구성하면 다음과 같은 TS 퍼지 모델이 얻어진다^[4]:

규칙 1: IF x_1 is “about 0”,

$$\text{THEN } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \bar{A}_1 \mathbf{x} + \bar{B}_1 u.$$

규칙 2: IF x_1 is “about $\pm\pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$)”,

$$\text{THEN } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \bar{A}_2 \mathbf{x} + \bar{B}_2 u.$$

여기서, 각 국소 선형 모델의 시스템 행렬 A_i 와 입력 행렬 B_i 는 각각 아래와 같다:

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml \cos^2(88^\circ))} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \cos(88^\circ)}{4l/3 - aml \cos^2(88^\circ)} \end{bmatrix}.$$

그리고, IF-THEN 규칙의 전건부에 등장하는 퍼지 집합 "about 0"와 "about $\pm \pi/2$ "의 소속 함수는 그림 4와 같다.

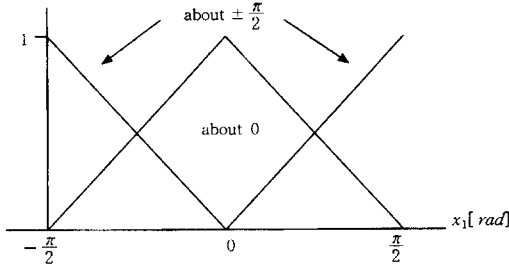


그림 4. TS 모델에 등장하는 퍼지 집합의 소속 함수

Fig. 4. Membership functions of fuzzy sets in the TS model.

도립 진자의 운동을 묘사하는 위의 TS 퍼지 시스템에서는 각 국소 선형 모델이 서로 다른 입력 행렬을 갖는다. 따라서, 단계 [2]에서는 시스템의 입력단에 선형 보상기 $G_c(s) = U_c(s)/U(s) = 20/(s+2)$ 를 삽입함으로써 "공통 입력 행렬을 갖는 TS 모델"을 얻는다. 이때, 삽입된 보상기는 다음의 상태 방정식으로 표현할 수 있다:

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= -2x_c + 2u, \\ u_c &= 10x_c \end{aligned} \quad (21)$$

이러한 과정을 거친 후, 도립 진자에 관한 TS 퍼지 시스템과 선형 보상기를 직렬로 연결한 모델을 하나의 상태 방정식으로 나타내면 다음 식을 얻는다:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t) &= w_1(t) \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 10\tilde{B}_1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) \\ &+ w_2(t) \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & 10\tilde{B}_2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 X 는 $[x_1, x_2, x_c]^T$ 로 구성되는 상태 벡터이고, $w_1(t)$ 과 $w_2(t)$ 는 각각 전건부 변수 $x_1(t)$ 이 퍼지 집합 "about 0"과 "about $\pm \pi/2$ "에 소속되는 정도를 나타내는데, 그림 4에서 보여진 바와 같이 이들은 항상 $w_1(t) + w_2(t) = 1$ 을 만족한다.

단계 [3]은, 다음에 보여진 확장된 행렬 A_1, A_2, B 를 이용하여 선형 행렬 부등식 (15), (16)을 푸는 과

정이다:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 10\tilde{B}_1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & 10\tilde{B}_2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

이때 조건 (15), (16)은 무수히 많은 수의 해를 갖는데, MATLAB LMI Toolbox^[13]를 이용하여 그 중의 하나를 구하면 다음과 같다(사용자로부터 별다른 지시가 없을 경우에 MATLAB LMI toolbox는, 선형 행렬 부등식 $A(x) < 0$ 의 해로써 $A(x) < \tau I$ 를 만족시키는 x 와 τ 들 중 τ 를 최소화시키는 x 를 제공한다. 본 논문에서 인용하고 있는 다음 결과는 MATLAB LMI toolbox가 이러한 과정을 거쳐 제공한 해이다. 주어진 선형 행렬 부등식을 만족시키는 수많은 해들 중, MATLAB이 제공하는 해를 선택하여 제어기 설계과정에서 활용하는 것은 특별히 피해야 할 필요가 없는 무난한 선택으로 사료된다).

$$Q = \begin{bmatrix} 2.0520 & -6.1765 & 9.9255 \\ -6.1765 & 18.6338 & -26.7893 \\ 9.9255 & -26.7893 & 399.2806 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = [23.3201 \quad 239.6909 \quad 372.5109],$$

$$Y_2 = [23.3201 \quad -62.7877 \quad 372.5109].$$

마지막 단계로, 국소 이득 $K_i = Y_i Q^{-1}$, $i = 1, 2$ 를 구하면 (23) 식의 TS 퍼지 제어기가 최종적으로 얻어진다:

$$\begin{aligned} u(t) &= w_1(t)[6.2736 \times 10^4, 2.0549 \times 10^4, -0.0180 \times 10^4] X(t) \\ &+ w_2(t)[1.0528 \times 10^3, 0.3424 \times 10^3, -0.0023 \times 10^3] X(t) \end{aligned} \quad (23)$$

이상의 과정을 통하여 얻은 보상 퍼지 제어기의 성능을 시험하기 위하여, 제어기를 시스템 (20)에 적용하여, [4]에서 고려한 시뮬레이션을 수행해 보았다. 그 결과, 이 제어기는 초기 조건이 유리한 경우 ($x_1 = 15, 30, 45^\circ$, $x_2 = 0$) 및 불리한 경우 ($x_1 = 65, 75, 85^\circ$, $x_2 = 0$) 모두에 대해 만족스러운 결과를 보여주었다(그림 5,6). 그리고, 제어기의 강인성(robustness)을 평가하기 위하여 시스템의 파라미터를 바꾼 후 위의 제어기를 그대로 적용시키는 시뮬레이션도 수행해 보았다. 그 결과, m 이 두배로 무거워진 경우(그림 7), M 이 절반으로 가벼워진 경우(그림 8) 및 진자의 길이가 절반으로 짧아진 경우(그림 9) 모두 다 진자는 주어

진 초기 조건 ($x_1 = 45, 85^\circ, x_2 = 0$)에서 평형점으로 매끄럽게 이동할 수 있었다. 이러한 사실은, 본 논문의 방법론이 전역적 안정도를 보장하는 제어를 성공적으로 설계할 수 있음을 보여준다. 참고로, 그림 5와 6에서 다룬 초기조건에 대해 PDC 기법을 적용한 결과와 본 논문의 결과를 그림 10과 11에서 비교해 보았다. 그림을 통해 관찰할 수 있듯이 두 방법론의 결과는 거의 차이를 보이지 않는다. 다만, 이러한 결과를 얻기까지, PDC 기법은 각 국소 이득을 구한 후 이들이 조건 (7)과 (8)를 만족하는지 확인하는 시행착오 과정을 계속 되풀이해야 하는 반면에, 본 논문의 경우에는 (15)와 (16)의 선형 행렬 부등식의 풀이를 통해 정확한 해를 신뢰성 있게 구할 수 있는 차이가 있다.

두 방법론에 관한 비교에 있어서 보다 중요한 의미는, 이들이 얼마나 쉽게 여타의 요건을 고려할 수 있도록 확장될 수 있느냐 하는 데에서 찾을 수 있다. 이러한 측면에서 본 논문의 방법론은 큰 잠재력을 갖는다. PDC 기법은 일단 국소 안정도를 보장하는 이득을 고른 후 선택된 제어가 안정도를 위한 충분 조건 (7), (8)을 만족하는지 확인하는 작업을 반복하는 형태로 이루어졌기 때문에, 성능 및 강인성에 관한 여타의 요건이 추가될수록 이득의 선택은 더욱 어려운 작업이 된다. 반면에 본 논문의 방법론에서는 안정도 요건이 쉽게 풀릴 수 있는 선형 행렬 부등식 (15), (16)에 완전히 반영되어 있기 때문에 추가적 요건의 고려가 용이하다. 예를 들어, 외란 제거(disturbance rejection), 강인 안정도(robust stability) 등에 관한 요건은 때때로 시스템의 RMS 이득(선형 시스템의 경우에는 H_∞ 노음)의 제한으로 나타내진다. 본 논문에서 고려하는 TS 퍼지 시스템에 대해 이러한 H_∞ 노음 제한 조건을 부과하면 다음과 같은 형태의 수학적 형식화(mathematical formulation)이 얻어진다:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} (A_i x + B_i u) + B_w w,$$

$$z = C_z x + D_{zu} u + D_{zw} w,$$

$$\|z\|_2 / \|w\|_2 < \gamma, \forall w \in L_2(R_+).$$

여기서, $L_2(R_+)$ 는 양의 시간 축 위에서 자승 적분 가능한 측도가능(measurable) 함수들을 모두 모은 공간을 의미하고 $\|\cdot\|_2$ 는 이 공간 위에 정의되는 L_2 노음이다. 시행착오에 의존하는 PDC 기법을 이용하여 이

러한 요건을 만족시키는 TS 퍼지 제어를 구하는 것은 대단히 어려운 작업이 된다. 반면에 본 논문의 방법론을 사용할 경우에는, 전체의 페루프가

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} (A_i + B K_i) X + B_w w,$$

$$z = \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} (C_z + D_{zu} K_i) X + D_{zw} w$$

와 같은 형태의 다각형(polytope) 시변 시스템이 되므로 BRL(bounded real lemma) [10]을 적용하여 새로운 형태의 선형 행렬 부등식을 얻을 수 있다. 따라서, 이들 요건을 추가로 고려하는 작업은 매우 자연스럽게 이루어질 수 있다. 이러한 의미에서, 본 논문의 방법론은 기존의 PDC 기법보다 우수한 확장성을 가지며, 퍼지 이론에 H_∞ 제어 이론을 접목할 수 있는 주요한 수단이 될 수 있다.

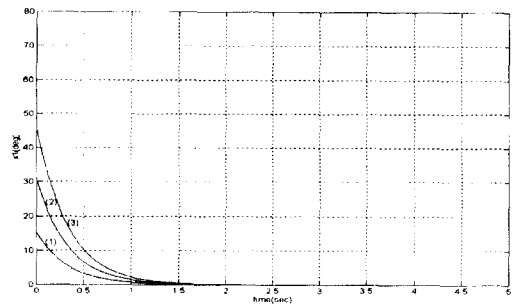


그림 5. 보상 퍼지 제어를 사용했을 때의 응답
(1): 초기치 (1)=15°, (2)=30°, (3)=45°
Fig. 5. Response using compensated fuzzy control (1): Initial conditions (1)=15°, (2)=30°, (3)=45°.

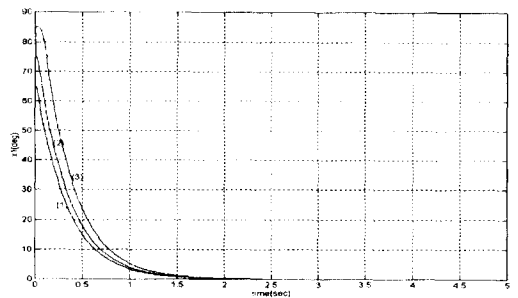


그림 6. 보상 퍼지 제어를 사용했을 때의 응답
(2): 초기치 (1)=65°, (2)=75°, (3)=86°
Fig. 6. Response using compensated fuzzy control (2): Initial conditions (1)=65°, (2)=75°, (3)=86°.

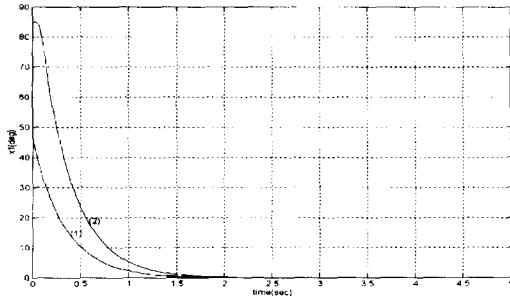


그림 7. m 을 변화시켰을 때의 응답: 초기치 (1)= 45° , (2)= 85°

Fig. 7. Response with m changed: Initial conditions (1)= 45° , (2)= 85° .

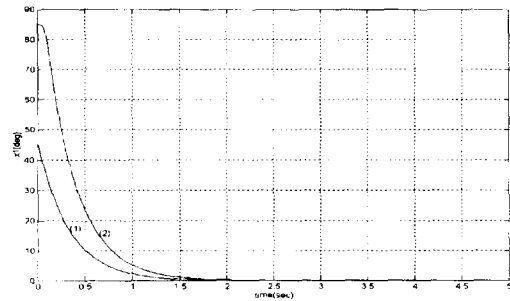


그림 8. M 을 변화시켰을 때의 응답: 초기치 (1)= 45° , (2)= 85°

Fig. 8. Response with M changed: Initial conditions (1)= 45° , (2)= 85° .

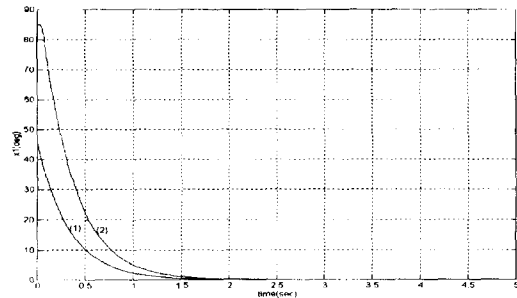


그림 9. l 을 변화시켰을 때의 응답: 초기치 (1)= 45° , (2)= 85°

Fig. 9. Response with l changed: Initial conditions (1)= 45° , (2)= 85° .

V. 결론

제어기를 설계하는 과정에서 시스템의 안정도를 보장하는 것은 가장 주요하면서도 기본적인 요건 중 하나

이다.

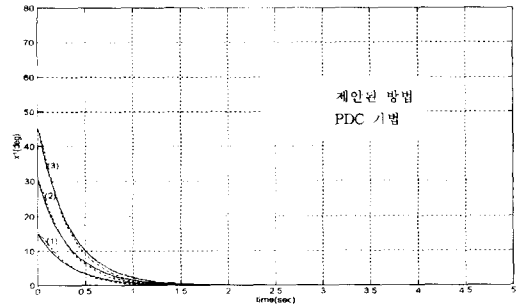


그림 10. 본 논문의 결과와 PDC기법의 결과와의 비교 (1): 초기치 (1)= 15° , (2)= 30° , (3)= 45°

Fig. 10. Comparison of the results of this paper with those of PDC technique (1): Initial conditions (1)= 15° , (2)= 30° , (3)= 45°

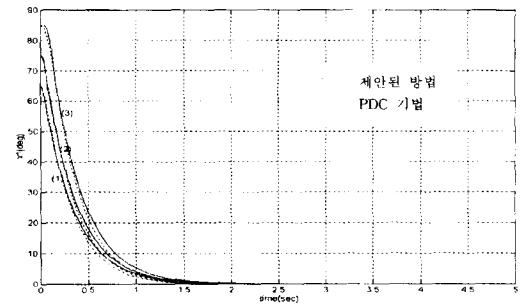


그림 11. 본 논문의 결과와 PDC기법의 결과와의 비교 (2): 초기치 (1)= 65° , (2)= 75° , (3)= 85°

Fig. 11. Comparison of the results of this paper with those of PDC technique (2): Initial conditions (1)= 65° , (2)= 75° , (3)= 85° .

여러 가지 성능 면에서 우수함이 밝혀진 퍼지 제어기의 경우에도 이러한 사실은 예외일 수 없다. 본 논문에서는 기존의 PDC 기법에 대한 건설적 비판을 통하여 선형 보상기와 TS 퍼지 제어기가 직렬 연결된 새로운 구조의 제어기를 제안하고, 전체 시스템의 안정도를 보장하는 보상 퍼지 제어기의 설계 방법론을 확립하였다. 확립된 방법론은 선형 행렬 부등식의 풀이를 요구하는데, 이는 Interior point method 등의 수치해법 또는 상용 LMI 소프트웨어를 이용하면 정확한 해를 신뢰성 있게 구할 수 있는 장점을 지닌다. 이러한 장점은 도립 전자 제어 문제에 대한 시뮬레이션을 통하여 실험적으로 확인할 수 있었다. 추후 연구 과제로는 본 논문의 설계 방법론을 안정도뿐만 아니라 성능 및 강인성까지 체계적으로 고려할 수 있도록 확장하는 작업을 들 수

있다.

참 고 문 헌

- [1] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [2] L. X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [3] S. S. Farinwata and G. Vachtsevanos, "Robust stability of fuzzy logic control systems," in *Proc. 1995 Amer. Contr. Conf.*, pp. 2267-2271, Seattle, WA, 1995.
- [4] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, 1996.
- [5] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model," in *Proc. Fuzz. IEEE/IFES '95*, pp. 531-538, 1995.
- [6] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems: Stability and design issues," in *Proc. 1995 Amer. Contr. Conf.*, pp. 2272-2276, Seattle, WA, 1995.
- [7] K. Tanaka and M. Sugeno, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-134, 1994.
- [8] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, 1996.
- [9] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to

modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.

- [10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [11] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [12] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems," *Syst. Control Letters*, vol. 13, pp. 65-72, 1989.
- [13] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The MathWorks Inc. Natick, MA, 1994.
- [14] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [15] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker, "Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example," *Automatica*, vol. 31, no. 9, pp. 1251-1261, 1995.

부록: 선형 보상기의 파라미터를 고려한 설계 방법론

본문의 (19)식에서 보여진 바와 같이, 선형 보상기가 입력단에 삽입되면 다음과 같은 "공통 입력 행렬을 갖는 TS 퍼지 모델"이 구해진다:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} u(t) \right\}.$$

이때, 상태 궤환의 퍼지 결합, 즉

$$u_c(t) = \sum_{i=1}^r \frac{w_i(t)}{W_s(t)} [K_{i1} \ K_{i2}] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$$

와 같은 형태의 제어를 사용하면, 페루프의 상태 방정식은 다음과 같아진다:

$$\frac{d}{dt} X(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) A_{cl,i} X(t). \quad (A1)$$

이식에서는 간편한 표현을 위하여,

$$X(t) = [x^T(t) \ x_c^T(t)]^T,$$

$$h_i(t) = w_i(t)/W_s(t),$$

$$A_{cl,i} = \begin{bmatrix} A_i & B_i C_c \\ B_c K_{i1} & A_c + B_c K_{i2} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r$$

등의 새로운 정의가 사용되었다. $A_{cl,i}$ 의 정의에 있어서 $B_c K_{i1}$ 과 $(A_c + B_c K_{i2})$ 는 장차 구해야 할 파라미터들로만 구성되어 있으므로 편의상 새로운 파라미터 \tilde{B}_i 와 \tilde{A}_i 로 대치한다. 즉,

$$A_{cl,i} = \begin{bmatrix} A_i & B_i C_c \\ \tilde{B}_i & \tilde{A}_i \end{bmatrix}. \quad (A2)$$

페루프의 상태 방정식 (A1)에서 $h_i(t)$ 는 각각이 음이 아닌 실수이고 그 합이 1이므로, 다각형 시스템(polytopic system)에 관한 리아푸노프 정리¹⁰⁾로부터 다음을 만족하는 행렬 Q 가 존재하면 시스템 (A1)은 전역적 안정임을 알 수 있다.

$$Q > 0,$$

$$\mathcal{E}\{A_{cl,i}Q\} = \mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} A_i & B_i C_c \\ \tilde{B}_i & \tilde{A}_i \end{bmatrix}Q\right\} < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (A3)$$

여기에서, \mathcal{E} 는 $\mathcal{E}(A) = A + A^T$ 로 정의되는 대칭화 연산자이다. (A3)식을 선형 행렬 부등식 형태로 치환하기 위하여 다음과 같이 정의되는 새로운 변수 Y_i 를

도입한다:

$$Y_i = [\tilde{B}_i \ \tilde{A}_i] Q, \quad i = 1, \dots, r. \quad (A4)$$

그러하면 (A3)식은 다음 식과 동치가 된다:

$$Q > 0, \quad \mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} A_i & B_i C_c \\ Y_i \end{bmatrix}\right\} < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (A5)$$

따라서, C_c 부분을 미리 선택하면 (A5)식은 Q 와 $Y_i, i = 1, \dots, r$ 에 관한 선형 행렬 부등식이 되므로 MATLAB LMI Toolbox를 이용한 풀이가 가능해진다. 이상의 과정을 통하여 얻어진 설계 방법론을 요약하면 다음과 같다:

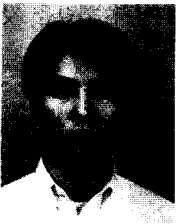
- ① 적절한 C_c 를 택한다 (0이 아닌 실수 행렬이면 충분함).
- ② 선형 행렬 부등식 (A5)의 해 $Q, Y_i, i = 1, \dots, r$ 를 구한다.
- ③ 다음 식을 이용하여 \tilde{B}_i, \tilde{A}_i 를 구한다:

$$[\tilde{B}_i \ \tilde{A}_i] = Y_i Q^{-1}, \quad i = 1, \dots, r.$$

- ④ 다음 식을 만족하는 $A_c, B_c, K_{i1}, K_{i2}, i = 1, \dots, r$ 를 구한다 (많은 해가 존재할 수 있음에 유의하자):

$$B_c K_{i1} = \tilde{B}_i, \quad A_c + B_c K_{i2} = \tilde{A}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

저 자 소 개



姜 成 勳(正會員)

1973년 2월 6일생. 1995년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 현재 고려대학교 대학원 정보공학과 제어계측전공 석사과정 재학중. 주관심분야는 제어공학, 퍼지이론, 유전자 알고리즘 등



朴 柱 榮(正會員)

1961년 2월 13일생. 1983년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1992년 University of Texas at Austin 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(Ph.D.). 1993년 ~ 현재 고려대학교 제어계측공학과 부교수. 주관심분야는 제어 및 시스템 이론, 신경망 이론 등.