

김근범*

*연세대 공대 전기공학과 석사과정

1. 서론

결정론적 시스템에 대한 고전적 견해에서는 인과 관계가 불명료한 불규칙한 현상을 랜덤 요소로 간주하여 명확한 인과 관계를 바탕으로 과거치에서 미래치까지 정확히 예측 가능하다는 믿음을 갖고 있었다. 이런 견해를 부정하는 현상이 바로 혼돈 현상이다. 혼돈(chaos) 현상은 결정론적 시스템내의 상태 변수들이 비선형적 관계에 의해 지배되는 현상으로 혼돈 현상을 갖는 비선형 시스템은 특정한 파라미터값과 초기치에의 민감함에 의해 외부적으로 예측 불가능한 불규칙한 동태를 보이는 독특한 특성을 갖고 있다.

전기/전자 공학, 기계 공학, 물리학 및 생물학과 같은 다양한 분야에서의 물리적 시스템은 각기 다른 형태의 혼돈 현상을 나타내며, 특히 기상 현상과 같은 무질서하게 보이는 현상들중의 상당 부분이 결정론적 비선형 특성을 갖는 혼돈 현상임이 밝혀졌으며[1] 이런 혼돈 현상의 식별 및 분석을 위한 정성적, 정량적 방법들에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 특히 산업계에서는 예측 불가능하여 외란이나 잡음 등으로 간주되던 신호들이 혼돈 특성을 갖는 것으로 밝혀져 시스템의 안정되고 강인한 동작을 위해 혼돈 현상을 효율적으로 제어 및 억제할 수 있는 제어 방법의 필요성이 제기되었다[2].

현재 알려진 대표적인 혼돈 현상 제어 방법의 하나는 E. Ott, C. Grebogi와 J. A. Yoke 등에 의해 제안된 OGY 방법이다[3]. OGY 방법은 혼돈 현상의 초기치 민감성을 이용하여 피드백을 통한 시스템의 파라미터의 섭동에 의해 시스템의 동태를 불안정한 주기 궤도로 수렴시킨 최초의 제어 방법이며 현재 산업계에 많이 응용되어 사용되고 있다. 이후 G. Chen 과 X. Dong은 전통적인 선형 피드백 제어[4,5]를 Chua 회로에 적용하여 시스템의 상태를 평형 상태로 수렴시킬 수 있음을 보였다[6,7].

그러나 기존에 제시된 방법들은 시스템의 정확한 모델이나 비선형 방정식을 필요로 하는 반면 실제로 이를 구하기가 어렵기 때문에 제어 방법의 실제 적용 가능성에 문제점이 있었다. 따라서 이러한 모델이 불확실한 혼돈 비선형 시스템에 대한 모델링 혹은 동적 및 제어를 위해 전통적인 제어방법의 하나인 적응 제어 기법[11-13]과, 비선형성과 불확실성에 강인한 특성을 지니는 지능 제어 기법을 이용한 시도으로써 신경 회로망을 이용한 방법[16-18]들이 제시되고 있다. 본 논문에서는 혼돈 시스템의 종류 및 특성을 살펴보고 이의 효율적인 제어를 위해 새로이 등장하고 있는 방법들중 적응 제어 기법과 신경 회로망을 이용한 지능 제어 기법을 중심으로 알아보려고 한다.

2. 혼돈 비선형 시스템

현재 알려진 대표적인 혼돈 시스템은 크게 연속치 혼돈 시스템과 이산치 혼돈 시스템으로 구분된다. 이들 혼돈 시스템들은 혼돈 현상이 갖는 고유 특성인 초기치 민감성(initial value sensitivity)과 스트레인지 어트랙터(strange attractor)를 갖는다[15]. 초기치 민감성은 초기치의 미세한 차이가 일정 시간이후에는 예측 불가능할 정도로 상이한 시스템의 동태를 보이게 하는 특성을 뜻한다.

또한 스트레인지 어트랙터는 위상 공간상에서 혼돈 시스템의 상태 변수들의 궤적들을 나타내었을 때 일정 영역을 벗어나지 않으면서 비슷하긴 하지만 결코 같은 궤적을 지나지 않는 프랙탈(fractal)한 특성을 갖는 어트랙터를 의미한다.

2.1 연속치 혼돈 비선형 시스템

2.1.1 Duffing 방정식

1918년 Duffing에 의해 발견된 Duffing 방정식은 많은 기계적인 문제에서 발생하는 강력 스프링 효과(hardening spring effects)를 설명하기 위한 것으로서[5] 이는 식 (1)과 같은 2차 비선형 미분 방정식으로 표현된다.

$$\ddot{x} + p\dot{x} + p_1x + p_2x^3 = q \cos(ut) \quad (1)$$

여기서 t 는 시간을 나타내는 변수이고 p, p_1, p_2, q, w 는 시스템의 특성을 결정짓는 실수 파라미터들이다.

Duffing 방정식은 이러한 파라미터 값들에 따라서 주기적인 해를 가지기도 하고 혼돈 현상을 보이기도 한다. 식 (1)에 대해 혼돈 현상을 일으키는 파라미터 집합의 하나인 $\{p, p_1, p_2, q, w\} = \{0.4, -1.1, 0, 1.8, 1.8\}$ 에 대한 상태 x 의 궤적과 위상 공간(phase space)에서의

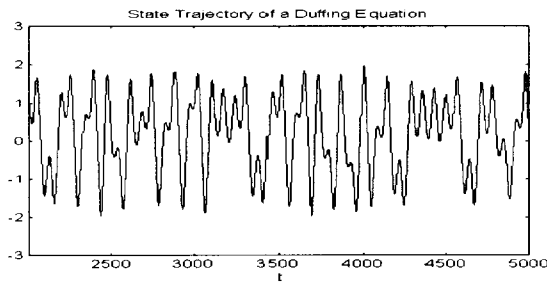


그림 1. Duffing 방정식의 상태 궤적

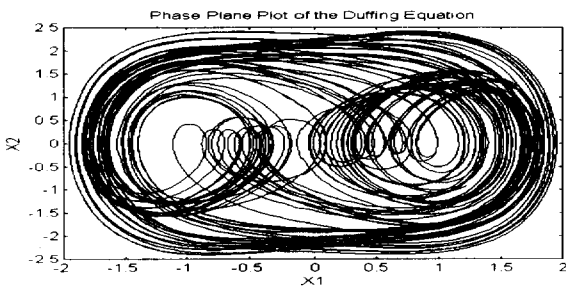


그림 2. Duffing 방정식의 스트레인지 어트랙터

동태는 각각 그림 1, 그림 2와 같다.

그림 1과 그림 2를 통해 알 수 있듯이 Duffing 방정식은 그 상태 궤적이 몹시 불규칙하면서도 위상 공간상에서는 일정한 영역을 벗어나지 않는 strange attractor를 형성함으로써 혼돈 현상을 보이게 된다.

2.1.2 Lorenz 방정식

역시 널리 알려진 연속 시간 혼돈 시스템 중 하나인 Lorenz 시스템은 대기 중에서 발생하는 대류 현상의 간략화 모델로서 Ed Lorenz에 의해 제시되었다[15]. 식 (2)는

Lorenz 방정식을 나타내는 3차 비선형 미분 방정식이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 x, y, z 는 Lorenz 시스템의 세 상태 변수이고, σ, r, b 는 시스템의 특성을 결정짓는 파라미터들이다.

Lorenz 시스템 역시 파라미터들의 값에 따라 평형 해(equilibrium solution)를 가지기도 하고 혼돈 현상을 보이기도 한다.

파라미터 집합 $\{\sigma, r, b\} = \{10, 8/3, 28\}$ 에 대해 시스템은 혼돈 현상을 일으키게 되고 이 경우의 위상 공간에서의 스트레인지 어트랙터는 그림 3과 같다. 역시 불규칙하지만 스트레인지 어트랙터를 벗어나지 않는 혼돈 궤적을 형성한다.

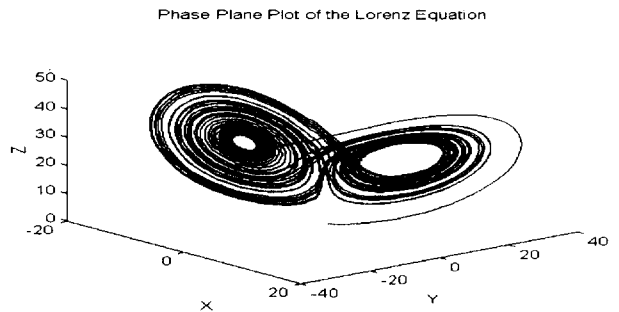


그림 3. Lorenz 방정식의 스트레인지 어트랙터

2.2 이산치 혼돈 비선형 시스템

현재 알려진 대표적인 이산치 혼돈 시스템으로는 Henon 맵(map)과 Lozi 시스템 등이 있다. 이중 Henon 맵은 연속치 혼돈 시스템인 Lorenz 시스템의 혼돈 특성을 나타내기 위해 Henon에 의해 제안되었다[15]. 식 (3)은 상태 변수로 표현한 Henon 맵의 상태 방정식이다.

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a(1.0 - x_1(t)^2) + b x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 a, b 는 Henon 맵의 파라미터들이다.

이러한 Henon 맵에 대한 스트레인지 어트랙터는 그림 4와 같다.

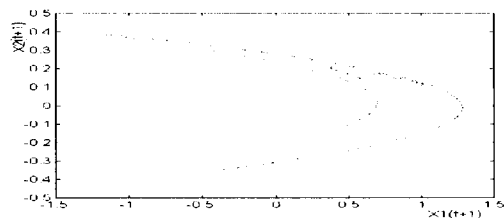


그림 4. Henon 맵의 스트레인지 어트랙터

3. 혼돈 시스템의 모델링

자연계에는 앞서 언급한 혼돈 시스템 외에 다양한 혼돈 특성을 갖고 있는 현상들이 존재한다. 기존의 제어방법들은 시스템의 정확한 모델을 필요로 하기 때문에 실제 적용하기에는 어려운 단점들이 있다. 이러한 모델링 문제를 해결하기 위해 비선형 모델을 이용한 방법과 신경회로망을 이용한 혼돈 시스템의 모델링에 관한 연구가 이루어지고 있고 본 장에서는 그 개략적인 내용을 살펴 본다.

3.1 NARMAX 모델

혼돈 시스템은 초기치에 매우 민감한 비선형 시스템으로서, 식 (4)과 같은 일반적인 비선형 시스템에 대한 모델식으로 표현할 수 있다.

$$y_{t+1} = F^n[y_t, \dots, y_{t-\eta}, u_{t-d}, \dots, u_{t-d-\eta-1}] \quad (4)$$

$$\equiv F^n[V_1, \dots, V_s]$$

여기서 d 는 프로세스 지연 상수, η 는 비선형도, η_y 는 출력 지연도, η_u 는 입력 지연도이고 s 는 $\eta_u + \eta_y$ 이다.

Leontaritis 등[9]에 의해 제안된 NARMAX(Nonlinear Autoregressive Moving Average models with eXogenous inputs) 모델을 이용하면 식 (4)의 비선형 시스템을 다음의 식 (5)와 같은 모델식으로 표현할 수 있다.

$$y_{t+1} = \sum_{i=1}^s c_i V_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} V_i V_j + \dots \quad (5)$$

$$+ \sum_{i=1}^s \dots \sum_{m=1}^s \sum_{n=p}^s c_{i\dots mn} V_i \dots V_m V_n$$

표 1은 일반적인 NARMAX 모델 중 선형과 자승 및 삼승 모델을 나타낸 것이다.

표 1. NARMAX 모델

모델	일반적인 선형 모델식
L_1	$y_{t+1} = c_1 y_t + c_2 + u_t$
Q_1	$y_{t+1} = c_1 y_t + c_2 y_t^2 + c_3 + u_t$
C_1	$y_{t+1} = c_1 y_t + c_2 y_t^2 + c_3 y_t^3 + c_4 + u_t$

식 (5)의 시스템 모델에서 출력값은 각각의 파라미터들과 선형 관계가 있으며 이는 식 (6)으로 표현할 수 있다.

$$y_{t+1} = \phi_t^T \theta_t \quad (6)$$

여기서 θ_t 는 파라미터 $c_{i\dots mn}$ 의 벡터이고 ϕ_t 는 과거 입력값과 출력값들에 대한 함수들의 벡터이다.

식 (6)으로부터 일반적인 시스템 동정 방법인 순환 최소자승법(Recursive least square)을 이용하여 각 시스템 모델의 파라미터값을 추정할 수 있다. NARMAX 모델중 하나인 C_3 를 이용하여 Henon 맵을 모델링 했을 경우에 파라미터를 추정한 예는 그림 5와 같다.

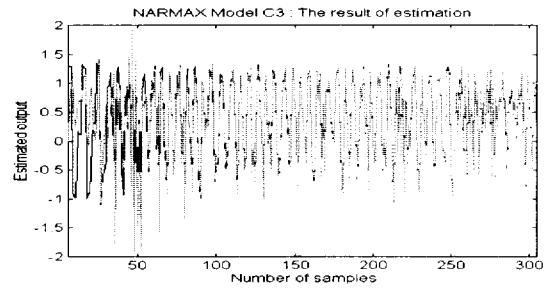


그림 5. C_3 모델에 대한 파라미터 추정 결과

3.2 신경 회로망을 이용한 모델링

한편 신경 회로망의 비선형 함수 근사화 기능을 이용하여 혼돈 시스템을 모델링할 수 있다[16].

그림 6은 신경 회로망을 이용한 혼돈 시스템의 동정 구조이다. 즉 실제 혼돈 시스템과 초기화된 신경 회로망 동정기(neural network identifier)에 동정 입력($u(k)$)을 인가하여 시스템의 출력($y_p(k)$)과 동정기의 출력($y_m(k)$)사이의 오차($e(k)$)를 구한 후 이 오차가 0이 되도록 동정기의 파라미터를 갱신한다.

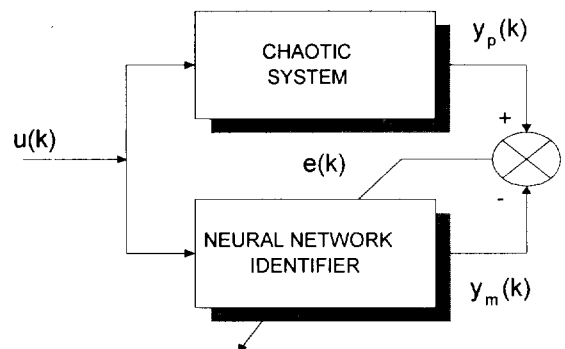


그림 6. 신경 회로망을 이용한 동정 구조

그림 6의 동정기를 이용하여 2.1의 Duffing 시스템을 동정한 예는 그림 7과 같고 회로망의 구조와 파라미터를 적절히 조정할 경우 매우 정확한 동정이 가능함을 알 수 있다.

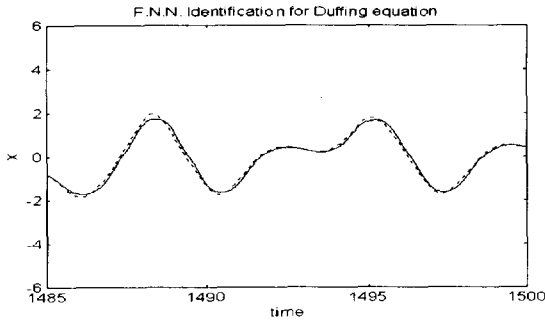


그림 7. 신경 회로망을 이용한 Duffing 시스템의 동정 결과

이러한 신경 회로망을 이용한 혼돈 시스템의 모델링은 시스템에 대해 수학적 표현 및 그에 대한 해석이 필요 없고 신경 회로망으로 하여금 자기 발견적(heuristic)으로 혼돈 시스템을 학습할 수 있게 함으로써 적은 계산량으로 정확한 모델링을 할 수 있는 장점이 있다. 그러나 대부분의 신경 회로망 응용 시스템이 그러하듯 모델링 역시 적절한 구조나 파라미터 설정에 있어서 여러번의 시행 착오 과정을 거칠 수밖에 없고 실험 의존적인 경향이 크다는 문제가 있다.

4. 혼돈 비선형 시스템의 제어

혼돈 시스템에 대한 제어 목적은 어트랙터 내의 초기치에서 시작한 혼돈 시스템이 어트랙터내의 불안정한 평형점이나 제한 주기(limit cycle)로 수렴하도록 하는 것이며, 결정론적 비선형 법칙에 지배되는 혼돈 시스템은 초기치에 따라 혼돈 특성이 크게 영향 받기 때문에 초기치의 선정은 혼돈 시스템의 제어에 큰 영향을 미친다.

4.1 모델 기준 제어(model reference control)

Qammar 등에 의한 제안된 모델 기준 제어[8]는 혼돈 시스템을 NARMAX 모델을 이용하여 모델링한 후 시스템의 입력값과 출력값에 기초로 한 순환 최소 자승법을 통해 NARMAX 모델의 파라미터 값을 추정하여 제어기를 구성하는 간접 적응 제어 방식의 제어 방법이다[14]. 모델 기준 제어기는 제어 대상이 되는 비선형 시스템에 포함되어 있는 복잡한 비선형성을 별도로 고려할 필요가 없으며 모델화되는 과정에서 안정된 기준 입력 상태를 나타내는 흡인 영역(basin of attraction)이 한정되는 단점은 시스템 모델안에 이상적인 모델이 포함되도록 고차의 비선형 함수와 다수의 파라미터를 사용함으로써 해결될 수 있다[8].

모델 기준 제어에서는 원하는 기준 입력(reference input) y_d^* 와 시스템의 예측 출력값 사이의 오차가 다음 단계의 입력 신호가 되는 OSA(One-Step Ahead) 제어 법칙을 사용할 수 있으며 이는 식 (7)과 같이 표현된다[10].

$$u(t) = K(y^* - \phi_i^T \theta_i) \tag{7}$$

4.2 신경 회로망을 이용한 지능 제어

불확실성 및 비선형성에 강인한 특성 지니는 신경 회로망을 이용하여 혼돈 시스템에 대한 제어가 가능하다[16-18]. 일반적으로 신경 회로망을 이용하게 되면 시스템의 출력 값에 따라 반복적으로(iteratively) 회로망의 파라미터를 조정하게 하므로 이는 적응 제어의 범주에서 생각할 수 있다. 신경 회로망을 이용한 간접 적응 제어란 3.2의 모델링 구조를 통해 혼돈 시스템을 동정한 후 이를 기반으로 하여 시스템이 원하는 출력 값을 보일 수 있도록 하기 위한 적절한 제어 입력 신호를 생성하는 것이다. 그러나 이러한 간접 적응 제어 방식은 미지의 시스템에 대한 Off-line 동정 혹은 모델링 과정이 필요하므로 제어기 설계 과정이 그만큼 복잡해지게 된다. 한편 직접 적응 제어 방식[16,17]은 이러한 모델링 과정 없이 신경 회로망 제어기를 시스템에 바로 연결하여 원하는 출력 값을 발생시키는 최적의 제어 입력 신호를 학습 시키게 되므로 간접 적응 제어 방식에 비해 빠르면서도 비교적 효과적인 제어 결과를 얻을 수 있다. 그림 8은 신경 회로망 제어기를 이용한 혼돈 시스템의 직접 적응 제어 구조의 예이다.

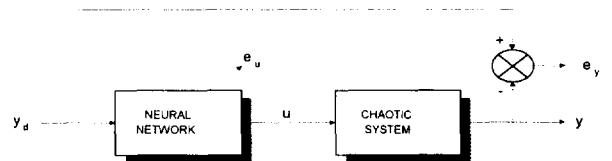
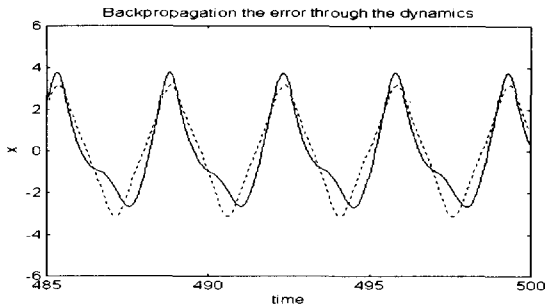


그림 8. 신경 회로망을 이용한 혼돈 시스템의 직접 적응 제어 구조

그림 8은 원하는 시스템 출력(기준 입력) y_d 를 신경회로망 제어기에 입력하여 제어 입력 u 를 얻고 이를 혼돈 시스템 혹은 혼돈 현상을 지니는 시스템에 인가함으로써 시스템의 출력 y 가 원하는 출력 y_d 와 같아지도록 함을 목적으로 한다. 즉 y_d 와 y 사이의 오차 e_y 가 0이 되도록 하기 위해 e_y 를 제어 입력 오차인 e_u 로 변환한 후 이를 신경 회로망에 역전파(back-propagation) 시킴으로써 제어기를 학습 시키게 된다.

이러한 신경 회로망 제어기를 이용하여 2.1의 연속 시간 혼돈 시스템인 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템을 제어한 예를 살펴보자[16].

그림 9는 Duffing 시스템의 1주기 해를 기준 입력(y_d)으로 하여 추적 제어를 행한 결과이다. 이 때의 제어 입력은 그림 10과 같다.



(점선 : 기준 입력, 실선 : 시스템 출력)
 그림 9. Duffing 시스템에 대한 단순 직접 적응 제어 결과

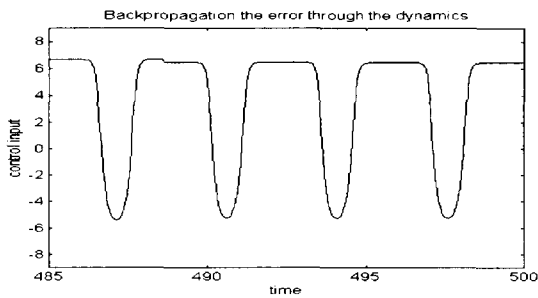
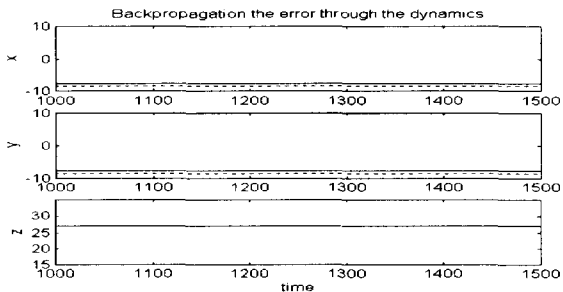


그림 10. Duffing 시스템의 제어 입력

제어 입력 신호의 형태를 통해 알 수 있듯이 복잡한 비선형 시스템이라 할지라도 비교적 간단한 주기 신호를 통해 제어가 가능함을 알 수 있다.

Lorenz 시스템에 대해서 평형점을 기준 입력으로 하여 조절 제어(regulation control)를 행한 결과 및 제어 입력은 각각 그림 11, 그림 12와 같다.



(점선 : 기준 입력, 실선 : 시스템 출력)
 그림 11. Lorenz 시스템에 대한 단순 직접 적응 제어 결과

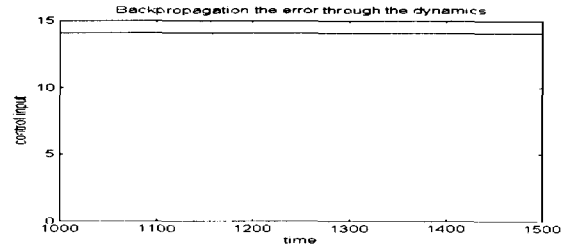


그림 12. 단순 직접 적응 제어의 제어 입력(Lorenz)

Lorenz 시스템 역시 복잡한 비선형 시스템이지만 매우 간단한 제어 입력 신호를 통해 충분히 제어가 가능함을 보여준다.

이러한 모의 실험 예는 혼돈 시스템이 동태나 동력학이 복잡하긴 하나 비교적 간단한 제어 입력 신호를 통해 효과적으로 제어할 수 있음을 나타낸다. 더욱이 신경 회로망을 통한 직접 적응 제어 방식을 사용할 경우 시스템에 대한 엄밀한 수학적 분석이나 모델링을 하지 않고도 신경 회로망의 학습 능력을 이용하여 혼돈 시스템을 효과적으로 제어할 수 있음이 밝혀졌다. 한편 시스템을 정확히 모델링 하여 이를 기반으로 간접 적응 제어를 행할 경우 제어의 정확성이 높아지게 된다.

5. 결론

본 논문에서는 기존의 물리 법칙이나 동력학 시스템 이론으로는 설명이 난해한 혼돈 현상의 특성과 이의 모델링 및 제어에 관한 최근의 연구 결과들을 고찰해 보았다. 실제로 혼돈 현상은 동력학 시스템 뿐 아니라 날씨의 변동, 주가 지수의 변동 등과 같이 우리 주위의 도처에서 빈번하게 발생하는 현상이다. 다만 이것이 이전에는 단순한 복잡함 혹은 불규칙성으로만 여겨지다가 하나의 결정론적 법칙에 의해 발생하는 “불규칙 속의 규칙”으로 인식되기 시작하면서 “혼돈(chaos)”이라는 개척 연구 분야로 자리잡아 가고 있고 이와 관련된 연구 논문도 근래 들어 늘어나고 있다. 본 논문에서 열거하였듯이 혼돈 현상을 억제 혹은 제어하기 위해서는 기존의 비선형 시스템 이론은 물론이고 비선형 모델링 혹은 동정 이론들이 기존의 제어 공학 이론들과 융합되어야 한다. 따라서 이러한 여러 분야의 연구들이 혼돈이라는 주제 아래 행해진다면 비선형 시스템 제어라는 거대한 학문 분야에 커다란 발전이 있을 것이라 생각된다. 끝으로, 본 논문에서 살펴본 혼돈 시스템의 제어에 대한 연구 결과를 통해 기존의 역학적 사고 방식과는 다른 새로운 관점에서 현존하는 제어 이론을 바탕으로 체계적인 접근을 시도한다면 이러한 다루기 힘든 불규칙성도 얼마든지 제어가 가능함이 인식되어 광범위한 연구의 확산이 이루어지기를 기대한다.

참고 문헌

- [1] L. A. Aguirre and S. A. Billings, "Validating identified nonlinear models with chaotic systems," *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, vol. 4, no. 1, pp. 109-125, 1994.
- [2] G. Chen and X. Dong, "From Chaos to Order - Perspectives and Methodologies in Controlling Chaotic Nonlinear Dynamical Systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1363-1409, 1993.
- [3] E. Ott, C. Grebogi, and A. Yorke, "Controlling Chaos," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 11, pp. 1196-1199, 1990.
- [4] G. Chen and X. Dong, "On feedback control of chaotic nonlinear dynamic systems," *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, vol. 2, no. 2, pp. 407-411, 1992.
- [5] G. Chen and X. Dong, "On Feedback Control of Chaotic Continuous-Time Systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 40, no. 9, pp. 591-601, 1993.
- [6] E. A. Jackson and A. W. Hübler, "Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics," *Physica D*, vol. 44, pp. 407-420, 1990.
- [7] E. A. Jackson, "On the control of complex dynamic systems," *Physica D*, vol. 50, pp. 341-366, 1991.
- [8] H. K. Qammar, F. Mossayebi, "System identification and model-based control of a chaotic system," *Int. Jour. Bifurcation and Chaos*, vol. 4, no. 4, pp. 843-851, 1994.
- [9] I. J. Leontaritis, S. A. Billings, "Input-output parametric models for nonlinear systems : Part I & II," *Int. Jour. of Control*, vol. 41, no. 2, pp. 303-353, 1985.
- [10] H. K. Qammar, F. Mossayebi and T. T. Hartley, "Indirect adaptive control of a chaotic systems," *Chem. Eng. Comm.*, vol. 110, pp. 99-110, 1991.
- [11] 박 광성, 주 진만, 박 진배, 최 윤호, 윤 태성, "모델 기준 제어를 이용한 이산치 혼돈 시스템의 제어", '96 전기학회 하계학술대회논문집 B권, pp. 1056-1059, 1996.
- [12] 박 광성, 주 진만, 박 진배, 최 윤호, 윤 태성, "간접 적응 제어 기법을 이용한 이산치 혼돈 시스템의 제어", '96 한국 자동제어학회대회 논문집, pp. 318-322, 1996.
- [13] K. S. Park, J. B. Park, Y. H. Choi and T. S. Yoon, "Control of Discrete-Time Chaotic using Generalized Predictive Control," *Proc. IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems*, vol. 2, pp. 789-792, June 1997.
- [14] S. A. Billings, S. Chen, "Extended model set, global data and threshold model identification of severely non-linear systems," *Int. J. Control*, vol. 50, no. 5, pp. 1897-1923, 1989.
- [15] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [16] G. Chen and X. Dong, "Identification and Control of Chaotic Systems: An Artificial Neural Network Approach," *Proc. IEEE Int. Symposium Circuits and Systems*, Seattle, WA, pp. 1177-1182, 1995.
- [17] 오기훈, 주진만, 박광성, 박진배, 최윤호, "신경 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 지능 제어에 관한 연구", *Proc. 11th KACC*, pp. 453-456, October 1996.
- [18] 김근범, 박광성, 주진만, 최윤호, 박진배, "방사 기저 함수 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 직접 적응 제어", *Proc. 12th KACC*, pp. 219-222, October 1997.