

히스테리시스 특성이 계열연상에 미치는 영향에 대한 통계 신경역학적 해석

김 응 수[†] · 오 춘 석[†]

요 약

신경회로망의 동작과 정보처리 능력 등에 관하여 살펴보고자 할 때, 신경회로망의 구성 요소를 어떻게 모델화 할 것인가는 중요한 문제이다. 소자의 응답특성이 바뀔 때 따른 특성의 변화, 결합강도 및 적용규칙이 바뀌어서 회로망 전체의 다이내믹스가 바뀌는 모습, 소자 상호간의 결합 형태에 따른 정보처리 능력의 변화 등과 같은 신경회로망이 가진 다양한 정보처리 능력을 밝히는 것은 병렬 정보처리의 메카니즘을 이해하는 문제와도 일맥 상통하고 있다. 따라서 이러한 문제들에 대하여 신경회로망의 정보처리 능력을 해석적으로 평가하는 것은 병렬분산 정보처리의 본질을 밝힌다는 측면과 지적 정보처리 시스템의 구축을 목표로 연구되고 있는 신경회로망의 본질을 이해한다는 측면에서도 중요하게 여겨진다. 따라서 본 논문에서는 신경회로망을 구성하는 구성요소의 변화, 그 가운데에서도 특히 소자의 히스테리시스 특성이 신경망의 계열연상능력에 미치는 영향에 대한 이론적 해석결과에 대하여 기술한다.

Analysis of Statistical Neurodynamics for the Effects of the Hysteretic Property on the Performance of Sequential Associative Neural Nets

Eung Soo Kim[†] · Choon Suk Oh[†]

ABSTRACT

It is important to understand how we can deal with elements for the modeling of neural networks when we are investigating the dynamical performance and the information processing capabilities. The information processing capabilities of model neural networks will change for different response, synaptic weights or learning rules. Using the statistical neurodynamics method, we evaluate the capabilities of neural networks in order to understand the basic concept of parallel distributed processing. In this paper, we explain the results of theoretical analysis of the effects of the hysteretic property on the performance of sequential associative neural networks.

1. 서 론

고등동물의 뇌, 특히 인간의 뇌는 대단히 복잡한 대

규모 계층 시스템으로서 그 다양한 능력을 밝히기 위하여 지금까지 학문적으로 많은 연구가 진행되어 왔다. 뇌의 정보처리 양식을 이해하기 위하여 심리학은 주로 거시적인 입장에서 인간의 행동이나 인식, 기억 등을 다루어 왔으며 생물학은 미시적인 입장 즉, 세포나 시냅스의 가소성 등과 같은 문제를 대상으로 착

[†] 중신회원: 선문대학교 공과대학 전자정보통신공학부
논문접수: 1996년 7월 18일, 심사완료: 1996년 9월 23일

실험 연구 결과를 쌓아왔다. 또한 세포수준의 활동과 인식 및 행동수준의 활동을 결합시키려는 연구도 진행되고 있다[1]. 그 밖에도 신경생리학, 인지과학 및 공학 등과 같은 여러 학문분야에서도 다양하고 다채롭게 연구가 진행됨으로써 뇌의 정보처리 메카니즘에 대한 이해가 한층 깊어졌으나, 아직까지 많은 부분이 미지의 상태로 남아있는 것이 사실이다.

뇌는 대단히 복잡한 시스템이지만, 그 가운데는 몇 가지의 전형적인 논리[2]가 있으며 그것을 실현하기 위한 회로를 구성할 수 있다. 이것은 생물진화의 과정에서 자연스럽게 뇌안에 축적된 논리와 구성으로서 신경세포의 동작에 그 기초를 두고 있으며, 더 나아가 이들을 발전시켜 다양하게 결합시킴으로써 하나의 대규모 계층 시스템을 구성하고 있다.

이러한 대규모 계층 시스템으로서의 뇌를 이해하기 위하여 뇌의 정보처리 양식을 본 딴 신경회로망 모델은 뇌의 기능모델입과 동시에 지금까지 해결하기 어려웠던 문제들에 대한 새로운 해결책으로서도 흥미있다. 정보처리에 있어서의 고속성, 유연성 및 적응성과 같은 특징을 극대화 할 수 있는 병렬, 분산 및 다중처리 모델로서의 신경회로망은 다수의 요소(구성소자)가 사실상 동시에 결과를 내며, 이때 정보는 각 요소에 분산되어 있으므로 임의의 요소 하나의 값을 잃더라도 그것만으로 전체 정보를 재현할 수는 없다. 또한 이 요소에는 다수의 정보가 중복되어 있으며 일부 손상을 받더라도 전체 정보를 처리하는 데는 큰 피해를 받지 않는다는 성질이 있다.

이러한 특징을 가진 신경회로망의 동작과 정보처리 능력 등에 관하여 살펴보고자 할 때, 신경회로망의 구성요소를 어떻게 모델화 할 것인가는 중요한 문제이다. 소자의 응답특성이 바뀔 때 따른 특성의 변화[3], 결합강도 및 적응규칙이 바뀔으로써 회로망 전체의 다이내믹스가 바뀌는 모습[4], 소자 상호간의 결합형태에 따른 정보처리 능력의 변화 등과 같은 신경회로망이 가진 다양한 정보처리 능력을 밝히는 것은 병렬 정보처리의 메카니즘을 이해하는 문제와도 일맥상통하고 있다. 따라서 이러한 문제들에 대하여 신경회로망의 정보처리 능력을 해석적으로 평가하는 것은 병렬분산 정보처리의 본질을 밝힌다는 측면과 지적 정보처리 시스템의 구축을 목표로 연구되고 있는 신경회로망의 본질을 이해한다는 측면에서도 중요하게

여겨진다.

또한 우리들은 무엇인가 기억하고자 할 때 될 수 있는대로 다른 사물과 관련지어 기억하려 하며, 반대로 기억해 낼 때에도 다른 사물로부터의 연상에 의해 기억해 내는 일이 많다. 즉, 연상이라는 것은 관계가 있는 사물을 연결하여 기억하고 그 사물의 일부로부터 전체를 상기해 내는 기억이라고 할 수 있다. 이런 관점에서 볼 때 모든 정보처리는 결국 어떠한 형태의 기호의 흐름 즉, 계열이라는 사실을 이해할 수 있다. 이러한 계열연상[5][6][7][8][9]은 자기연상[10]이 가지는 시냅스 하층의 대칭성에 대한 제약 및 네트워크의 최종상태가 평형상태에 머무는 것 등과 같은 제약으로부터 벗어날 수 있을 뿐만 아니라 현실시스템이 가진 정보처리의 능력을 평가하는 잣대로도 중요한 연구대상이다. 따라서 본 논문에서는 신경회로망을 구성하는 구성요소의 변화, 그 가운데에서도 특히 소자의 히스테리시스 특성이 신경망의 계열연상능력에 미치는 영향에 대한 이론적 해석결과에 대하여 기술한다.

2. 모델의 정식화

단층회로망(one-layer cross net)을 L 개 직렬로 연결한 계층형 신경회로망(cascaded net)을 생각한다. 회로망을 구성하는 뉴런의 수는 각 층마다 n 개씩 있으며 시냅스 결합은 연속하는 층 사이에 전결합되어 있으며 층내의 결합은 없는 것으로 한다. 일반적으로 각 층에서의 뉴런의 수는 다를 수 있으나, 여기서는 논의의 번잡함을 피하기 위하여 각 층에서의 뉴런의 수는 같은 것으로 한다. 뉴런의 출력은 다른 뉴런들로부터의 출력의 합에 따라 발화(+1)와 휴지(-1)의 두가지 상태를 갖는 이산시간, 이산정보 모델을 대상으로 하며, 제 k +1층의 각 뉴런의 상태는 제 k 층의 상태로부터 동기적으로 정해진다.

L +1층으로 이루어진 신경회로망에 기억시킬 패턴은 무상관의 랜덤 패턴으로 이루어진 계열로서 다음과 같다.

$$S^1: s^1(1) \rightarrow s^1(2) \rightarrow \dots \rightarrow s^1(L+1)$$

$$S^2: s^2(1) \rightarrow s^2(2) \rightarrow \dots \rightarrow s^2(L+1)$$

$$\vdots$$

$$S^m: s^m(1) \rightarrow s^m(2) \rightarrow \dots \rightarrow s^m(L+1)$$

지금까지 상관학습형(correlation type learning rule)의 계열연상 모델의 자기결합은 없다는 가정하에 그 동작을 논의한 것이 대부분이었다. 그러나 신경회로망 모델에 있어서 소자는 단일 신경세포가 아니라 신경세포 집단이라는 견해로부터 소자의 자기결합에 대한 고려는 자연스러운 것이 된다. 단일 신경세포를 대상으로 하더라도 단순한 역치소자보다는 훨씬 복잡하며 자기제어형의 히스테리시스(hysteresis)특성이 존재한다. 여기서 소자의 자기결합의 크기를 계수 b 로서 나타낸다. 자기결합의 크기는 소자마다 다를 것이지만 여기서는 논의의 복잡함을 피하기 위해 모두 같다고 한다. 여기서 제 j 번째 뉴런에서 제 i 번째 뉴런에의 시냅스 하중을 w_{ij} 로 하며 상관학습형의 규칙에 따르는 것으로 하면, 연상과정에 있어서의 뉴런의 상태는 다음과 같은 역학에 따라 갱신된다.

$$x_i(l+1) = f \left[\sum_{j=1}^n w_{ij}(l)x_j(l) + bx_i(l) \right]$$

단, $l=1, 2, \dots, L$ (1)

$$f(u) = \begin{cases} 1 & u \geq 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$$

계열 연상회로의 동작은 다음과 같다. 즉, 계열 S^u 의 처음 패턴 $s^u(1)$ 이 회로망에 제시되면 그 다음에는 $s^u(2), s^u(3), \dots$ 와 같은 순서로 임의의 μ 에 대해서 전체 계열을 상기한다.

따라서 상관형 학습규칙에 의한 시냅스 하중은 다음과 같다.

$$w_{ij}(l) = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m s_i^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) \quad (2)$$

여기서 s_i^{μ} 는 같은 확률로 $+1, -1$ 값을 가지며 서로 독립적이다. 또한 $s^{\mu}(L+1) = s^{\mu}(1)$ 이면 주기적인 계열을 연상하는 경우가 된다. 단, 여기서 대상으로 하는 계열의 주기는 3 이상인 경우를 대상으로 한다. 계열의 주기가 2이면 BAM(Bidirectional Associative Memory)이 되며 주기가 1이면 자기연상(Auto-correlation associative memory) 메모리가 된다.

3. 계열연상 동작해석

n 개의 소자로 이루어진 계열연상 신경회로망 모델에 있어서 이산시간 l 에서의 각 소자의 출력상태를 $x_i(l)$ (± 1), 시냅스 하중을 w_{ij} 로 하면 시간 $l+1$ 에서의 회로망의 동작은 식(1)로부터 다음과 같이 기술된다.

$$x_i(l+1) = f \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=1}^m s_j^{\nu}(l+1) s_j^{\nu}(l) x_j(l) + bx_i(l) \right] \quad (3)$$

계열연상의 과정을 거시적인 상태변환으로 볼 때, 기억패턴 $s^{\mu}(1)$ 과 가까운 입력패턴 $x(1)$ 이 주어지면 회로망은 각 대응하는 층에서 $x(2), x(3), \dots, x(L+1)$ 를 출력하며 전체 계열 S^{μ} 를 상기한다. 식(3)의 경우 첫번째 항은 계열을 상기하기 위한 신호항이며 두번째 항은 계열 상기를 방해하는 잡음항으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 따라서 신호항에 대한 잡음항의 영향을 평가함으로써 신경회로망의 상기 다이내믹스의 전이과정을 정확하게 해석할 수 있다.

여기서는 기억패턴과 입력패턴 사이의 거리를 해밍거리(Hamming distance)로 정의하고 이를 다시 유사도(similarity, overlap)로 표시함으로써 두 패턴 사이의 거리를 표시하고자 한다. 즉, 계열 패턴의 성분이 확률적이면서 독립적으로 생성되는 $\Pr\{s_i^{\mu} = 1\} = 1/2$ 의 경우, 시간 l 에서의 뉴런의 상태 벡터를 $X(l)$ 로 하면, 그 시간에 연상해야 할 패턴 $S^{\mu}(l)$ 과의 유사도 a_l 을 다음과 같이 정의한다.

$$a_{l+1} = \frac{1}{n} X(l) \cdot S^{\mu}(l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(l) s_i^{\mu}(l) \quad (4)$$

계층형 신경회로망은 단층 신경회로망의 단순함의 형태이지만 상기특성은 단층 신경회로망의 다이내믹스와 같이 단순하지 않다. 계층형 신경회로망의 첫번째 층에서의 다이내믹스는 단순 신경회로망의 다이내믹스와 일치하지만 $l \geq 2$ 에서는 일치하지 않는다. 이것은 $l \geq 2$ 에서부터 뉴런의 출력 $x(l)$ 은 시냅스 하중 $w_{ij}(l)$ 과 상관되어 있기 때문이다. 즉, $W(l-1)$ 과 $W(l)$ 은 공통패턴 $s^{\mu}(l)$ 을 공유하기 때문에 잡음항에서 분산을 계산할 때 이 점을 고려하여야 한다.

4. 잡음항의 분석

4.1 기대치(Expectation)의 계산

제 j 번째 뉴런에서 제 i 번째 뉴런에의 시냅스 하중을 w_{ij} 로 하며 상관학습형의 규칙에 따르는 것으로 하면, 연상과정에 있어서의 뉴런의 상태는 다음과 같은 역학에 따라 갱신된다.

$$\begin{aligned}
 x_i(l+1) &= f \left[\sum_{j=1}^m w_{ij} s_j^{\mu}(l) x_j(l) + b x_i(l) \right] \\
 &= f \left[\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) + b x_i(l) \right] \\
 &= f \left[\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) + b x_i(l) \right] \quad (5) \\
 &= f \left[s_j^{\mu}(l+1) S^{\nu} \cdot X + b x_i(l) + \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right] \\
 &= f \left[s_j^{\mu}(l+1) a_i + b x_i(l) + N_i \right]
 \end{aligned}$$

윗식을 잘 살펴보면 기억패턴 $s^{\mu}(1)$ 과 가까운 입력 패턴 $x(1)$ 이 주어지면, 회로망은 전체 계열 S^{μ} 를 올바르게 상기하기 위하여 움직이는 부분과 그렇지 못한 부분으로 나누어져 있음을 알 수 있다. 즉, 전체계열 S^{μ} 를 상기하는데 방해가 되는 부분을 잡음항(noise term: interference term)으로 간주할 수 있으며, 이러한 잡음항에 대한 영향을 평가함으로써 잡음항이 전체 계열의 상기에 미치는 영향을 해석적으로 파악할 수 있다. 따라서 잡음항을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$N_i(l) = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \quad (6)$$

패턴성분이 랜덤인 것과 n 및 m 이 충분히 크다면 대수의 법칙(law of large number)과 중심극한정리(theorem of central limit)에 의해서 $N_i(l)$ 을 정규분포에 따르는 확률변수로 볼 수 있다. S^{ν} 의 성분에 균등하게 확률적인 잡음이 들어가 있으며 n 개의 성분 가운데 $a_0 = (1-a_0)/2$ 만큼 성분값이 다른 초기상태 $X(0)$ 가 주어지면 잡음항 $N_i(l)$ 의 기대치와 분산은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$s_j^{\mu}(l+1)$ 과 $s_j^{\mu}(l)$ 는 μ 번째의 같은 패턴이지만 서로

발생하는 층이 다르므로 두 패턴 사이에는 상관(correlation)이 없으며 또한 $s_j^{\mu}(l+1)$ 은 $x_j(l)$ 에 포함되지도 않는다. 따라서 $s_j^{\mu}(l+1)$ 은 $s_j^{\mu}(l) x_j(l)$ 과는 독립임을 알 수 있다. 또한 $s_j^{\mu}(l)$ 과 $x_j(l)$ 의 관계를 살펴보면 $s_j^{\mu}(l)$ 은 기억패턴이며 $x_j(l)$ 은 $s_j^{\mu}(l)$ 를 상기하기 위한 입력 패턴으로서 같은 층에서 발생할 뿐만 아니라 j 항도 같으므로 서로 강한 상관관계를 가지고 있다. 따라서 기대치는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right] \\
 = \frac{1}{n} E \left[\sum_{\mu=1}^m s_j^{\mu}(l+1) \right] \cdot E \left[\sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right] \quad (7) \\
 = \frac{1}{n} \cdot 0 \cdot E \left[\sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right] \\
 = 0
 \end{aligned}$$

4.2 분산(Variance)의 계산

입력패턴 $x_j(l)$ 이 기억패턴 $s_j^{\mu}(l)$ 과 상관관계를 가지므로 잡음항 $N_i(l)$ 은 독립변수의 합으로 이루어지지 않았음을 알 수 있다. 즉, $N_i(l)$ 항에는 고려되어야 할 많은 상관관계가 존재한다. 잡음항에 대한 분산은 식(8)과 같이 기술되며, 다음의 4가지 조건에 대하여 각각 분산을 계산한다.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= E[N_i(l)^2] - E[N_i(l)]^2 \\
 &= E[N_i(l)^2] \\
 &= E \left[\frac{1}{n} \left\{ \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right\} \right\} \right] \quad (8) \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{\mu'=1}^m \sum_{j'=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right. \\
 &\quad \left. s_{j'}^{\mu'}(l+1) s_{j'}^{\mu'}(l) x_{j'}(l) \right]
 \end{aligned}$$

(1) $j=j', \mu=\mu'$ 일때: $n(m-1)$ 개의 항이 존재.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{\mu'=1}^m \sum_{j'=1}^m s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l) \right. \\
 &\quad \left. s_{j'}^{\mu'}(l+1) s_{j'}^{\mu'}(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m \{s_j^{\mu}(l+1) s_j^{\mu}(l) x_j(l)\}^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^m 1 \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E [(m-1)n]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(m-1)}{n^2} E [1] \\
 &= \frac{m}{n} \\
 &= \tau
 \end{aligned}$$

(2) $j = j', \mu \neq \mu'$ 일때 : $n(m-1)(m-2)$ 개의 항이 존재.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\mu' \neq \nu'} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m s_i^{\mu}(l+1) s_i^{\nu}(l) x_j(l) \right. \\
 &\quad \left. s_i^{\mu'}(l+1) s_i^{\nu'}(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\mu' \neq \nu'} \sum_{j=1}^m s_i^{\mu}(l+1) s_i^{\nu}(l) s_i^{\mu'}(l+1) \right. \\
 &\quad \left. s_i^{\nu'}(l) \{x_j(l)\}^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\mu' \neq \nu'} s_i^{\mu}(l+1) s_i^{\nu}(l) s_i^{\mu'}(l+1) s_i^{\nu'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} s_i^{\mu}(l+1) \right] \cdot E \left[\sum_{\mu' \neq \nu'} s_i^{\mu'}(l) \right] \cdot \\
 &\quad E \left[\sum_{\mu \neq \nu} s_i^{\mu}(l+1) \right] \cdot E \left[\sum_{\mu' \neq \nu'} s_i^{\mu'}(l) \right] \\
 &= \phi
 \end{aligned}$$

여기서 $s_i^{\mu}(l+1)$ 과 $s_i^{\nu}(l)$ 은 μ 패턴으로서는 같지만 서로 층이 다르므로 상관되어 있지 않으며 $s_i^{\mu}(l+1)$ 과 $s_i^{\nu}(l)$ 도 같은 이유로 서로 독립이다. 또한 $s_i^{\mu}(l+1)$ 과 $s_i^{\mu'}(l+1)$ 및 $s_i^{\nu}(l)$ 과의 관계는 패턴이 서로 틀리므로 상호 독립적이다. 따라서 위의 관계식이 성립함을 알 수 있다.

(3) $j \neq j', \mu \neq \mu'$ 일때 : $n(n-1)(m-1)(m-2)$ 개의 항이 존재.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\mu' \neq \nu'} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m s_i^{\mu}(l+1) s_i^{\nu}(l) x_j(l) \right. \\
 &\quad \left. s_i^{\mu'}(l+1) s_i^{\nu'}(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\mu' \neq \nu'} s_i^{\mu}(l+1) s_i^{\nu}(l) x_j(l) \right] \\
 &\quad \cdot E \left[\sum_{\mu' \neq \nu'} \sum_{j'=1}^m s_i^{\mu'}(l+1) s_i^{\nu'}(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} s_i^{\mu}(l+1) \right] \cdot E \left[\sum_{\mu' \neq \nu'} \sum_{j=1}^m s_i^{\mu'}(l) x_j(l) \right] \\
 &\quad \cdot E \left[\sum_{\mu' \neq \nu'} s_i^{\mu'}(l+1) \right] \cdot E \left[\sum_{\mu' \neq \nu'} \sum_{j'=1}^m s_i^{\nu'}(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \phi
 \end{aligned}$$

(4) $j \neq j', \mu = \mu'$ 일때 : $n(n-1)(m-1)$ 개의 항이 존재.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m s_i^{\mu}(l+1) s_i^{\nu}(l) x_j(l) s_i^{\mu}(l+1) \right. \\
 &\quad \left. s_i^{\nu}(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m s_i^{\mu}(l) x_j(l) s_i^{\nu}(l) x_{j'}(l) \right]
 \end{aligned}$$

이 항을 자세히 살펴보면 $x_j(l)$ 및 $x_{j'}(l)$ 은 각각 $s_j(l)$ 및 $s_{j'}(l)$ 과 상관관계를 가지고 있음을 알 수 있다. 즉, 각 요소는 상호 독립적이지 못하므로 이들의 상관관계를 계산하기 위하여 $x_j(l)$ 및 $x_{j'}(l)$ 에 포함된 항들에 대하여 그들의 기대치 및 분산을 먼저 구한다.

$$\begin{aligned}
 x_k(l) &= f \left(s_j^{\mu}(l) a_{l-1} + b x_j(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{k=1}^m s_j^{\nu}(l) s_k^{\mu}(l-1) \right. \\
 &\quad \left. x_k(l-1) \right) \\
 &= f \left(s_j^{\mu}(l) a_{l-1} + b x_j(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m s_j^{\mu}(l) s_k^{\mu}(l-1) x_k(l-1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{k=1}^m s_j^{\mu}(l) s_k^{\nu}(l-1) x_k(l-1) \right) \\
 &= f \left(s_j^{\mu}(l) a_{l-1} + b x_j(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m s_j^{\mu}(l) s_k^{\mu}(l-1) x_k(l-1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{k=1}^m s_j^{\mu}(l) s_k^{\nu}(l-1) x_k(l-1) \right) \\
 &= f \left(s_j^{\mu}(l) a_{l-1} + b x_j(l-1) + s_j^{\mu}(l) R + Q \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{j'}(l) &= f \left(s_{j'}^{\nu}(l) a_{l-1} + b x_{j'}(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{k=1}^m s_{j'}^{\mu}(l) s_k^{\nu}(l-1) \right. \\
 &\quad \left. x_k(l-1) \right) \\
 &= f \left(s_{j'}^{\nu}(l) a_{l-1} + b x_{j'}(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m s_{j'}^{\nu}(l) \right. \\
 &\quad \left. s_k^{\nu}(l-1) x_k(l-1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{k=1}^m s_{j'}^{\mu}(l) s_k^{\nu}(l-1) x_k(l-1) \right) \\
 &= f \left(s_{j'}^{\nu}(l) a_{l-1} + b x_{j'}(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m s_{j'}^{\nu}(l) s_k^{\nu}(l-1) \right. \\
 &\quad \left. x_k(l-1) + \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{k=1}^m s_{j'}^{\mu}(l) s_k^{\nu}(l-1) x_k(l-1) \right) \\
 &= f \left(s_{j'}^{\nu}(l) a_{l-1} + b x_{j'}(l-1) + s_{j'}^{\nu}(l) R' + Q' \right)
 \end{aligned}$$

단,

$$R = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^{\alpha}(l-1)x_k(l-1)$$

$$R' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^{\alpha'}(l-1)x_k(l-1)$$

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{\alpha \neq \mu, \mu \neq 1}^m \sum_{k=1}^n s_j^{\alpha}(\Delta) s_k^{\mu}(l-1)x_k(l-1) + \frac{1}{n} s_j^{\alpha}(\Delta) s_j^{\mu}(l-1)x_j(l-1)$$

$$Q' = \frac{1}{n} \sum_{\alpha \neq \mu, \mu \neq 1}^m \sum_{k=1}^n s_j^{\alpha}(\Delta) s_k^{\mu}(l-1)x_k(l-1) + \frac{1}{n} s_j^{\alpha}(\Delta) s_j^{\mu}(l-1)x_j(l-1)$$

이렇게 분리해 낸 변수 R, R', Q, Q' 의 기대치 및 분산은 다음과 같다. 우선 각 층에서의 R 값을 나타내기 위하여 R 및 Q 에 첨자를 붙여서 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} R_{l-1} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^{\alpha}(l-1)x_k(l-1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^{\alpha}(l-1)f(s_k^{\alpha}(l-1)a_{l-2} + bx_k(l-1) + s_k^{\alpha}(l-1)R_{l-2} + Q_{l-2}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^{\alpha}(l-1)s_k^{\alpha}(l-1)f(a_{l-2} + bs_k^{\alpha}(l-1)x_k(l-1) + s_k^{\alpha}(l-1)s_k^{\alpha}(l-1)R_{l-2} + s_k^{\alpha}(l-1)Q_{l-2}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S f(a_{l-2} + B + SR_{l-2} + Q_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} f(a_{l-2} + B + R_{l-2} + Q_n) - \frac{1}{2} f(a_{l-2} + B - R_{l-2} + Q_n) \right\} \end{aligned}$$

여기서 $S = s_k^{\alpha}(l-1)s_k^{\alpha}(l-1), B = bs_k^{\alpha}(l-1)x_k(l-1)$ 이고 $Q_n = \sigma_{l-2}\epsilon_i$ 이다. 단, ϵ_i 는 $\epsilon_i \sim N(0, 1)$ 로서 평균 0, 분산 1의 표준 정규분포에 따르는 확률변수이다. 여기서 R_{l-2} 가 작으므로 Taylor 전개를 첫항까지 시키면

$$\begin{aligned} E[R_{l-1}] &= \frac{1}{2} (E[f(a_{l-2} + B + R_{l-2} + \sigma_{l-2}\epsilon_i)] - E[f(a_{l-2} + B - R_{l-2} + \sigma_{l-2}\epsilon_i)]) \\ &= \frac{1}{2} E \left[\phi \left(\frac{a_{l-2} + B + R_{l-2}}{\sigma_{l-2}} \right) - \phi \left(\frac{a_{l-2} + B - R_{l-2}}{\sigma_{l-2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\phi \left(\frac{a_{l-2} + B}{\sigma_{l-2}} \right) - \left(-\phi \left(\frac{a_{l-2} + B}{\sigma_{l-2}} \right) \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sigma_{l-2}} E[R_{l-2}] \\ &= \phi \left(\frac{a_{l-2} + B}{\sigma_{l-2}} \right) \frac{1}{\sigma_{l-2}} E[R_{l-2}] \end{aligned}$$

여기서 우리는 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

$$E[R_{l-1}] = (\text{some factor}) E[R_1] = 0$$

R' 에 대한 기대치의 계산도 위와 동일하며 같은 결과를 얻는다. 즉,

$$E[R_{l-1}'] = (\text{some factor}) E[R_1'] = 0$$

이므로 R 에 대한 기대치는 $E[R] = E[R'] = 0$ 와 결과를 얻는다.

아울러 Q 및 Q' 의 기대치가 0인 것은 명백하므로 증명은 생략한다.

또한, R 및 Q 에 대한 분산은 다음과 같은 이유로 식 (9)와 같이 쓸 수 있다. 즉, $\sigma_{l-1}^2 = V[N_j(l-1)]$ 로부터

$$N_j(l-1) = \sum_{\alpha \neq \mu, \mu \neq 1}^m \sum_{k=1}^n s_j^{\alpha}(\Delta) s_k^{\mu}(l-1)x_k(l-1) \quad (9)$$

에서 α 에 주목하면, $N_j(l-1)$ 은 $(m-1)$ 개의 항으로 이루어져 있음을 알 수 있다. 따라서 $(m-1)$ 개 항의 각각의 분산은 $\sigma_{l-1}^2/(m-1)$ 이다.

Q 는 이러한 $(m-1)$ 개의 항과 $1/n s_j^{\alpha}(\Delta) s_j^{\mu}(l-1)x_j(l-1)$ 항의 합으로 이루어져 있으나 $1/n s_j^{\alpha}(\Delta) s_j^{\mu}(l-1)x_j(l-1)$ 항은 무시할 수 있을 만큼 작으므로 Q 의 분산은 $\sigma_{l-1}^2/(m-1) \times (m-1)$ 이다. 즉,

$$V[Q] = V[Q'] \cong \frac{m-1}{m-1} \sigma_{l-1}^2 = \sigma_{l-1}^2$$

또한 R 은 위에서 설명하였듯이 $N_j(l-1)$ 안에 있는 $(m-1)$ 개의 항들 가운데 하나이므로 분산은 $\sigma_{l-1}^2/(m-1)$ 로 볼 수 있다. 즉,

$$V[R] = \frac{1}{m-1} \sigma_{l-1}^2 \cong \frac{1}{m} \sigma_{l-1}^2$$

$x_j(l)$ 및 $x_j(l)$ 에 포함된 R, R' 및 Q, Q' 에 대한 기대치와 분산을 구하였다. Q 와 Q' 는 $l-1$ 층에서 발생하는 잡음항으로서 각각 $N_j(l-1)$ 과 $N_j(l-1)$ 의 주요 부분이며 정규분포에 따르고 있다. 또한 $x_j(l)$ 및 $x_j(l)$ 사이의 상관은 R 및 R' 로부터 기인하고 있음을 알 수 있다.

따라서 지금부터는 $s_j^{\alpha}(\Delta)x_j(l)$ 과 $s_j^{\mu}(\Delta)x_j(l)$ 의 기대

치를 각각 구함으로써 $j \neq j'$, $\mu = \mu'$ 조건에서의 분산을 구한다. 먼저, $s_j^*(l) x_j(l)$ 에 대하여 $s_j^*(l)$ 과 R 을 고정 한 다음 $s_j^*(l)$ 에 관하여 조건부 기대치(conditional expectation)를 구하고 난 다음, $s_j^*(l) x_j(l)$ 에 대하여서도 그 기대치를 구함으로써 위의 조건을 만족하는 분산을 구한다.

$$\begin{aligned}
 & E [s_j^*(l) x_j(l) | s_j^*(l), R] \quad (\because s_j^*(l) \pm 1) \\
 &= \frac{1}{2} E [f(s_j^*(l) a_{l-1} + b x_j(l) + R + Q) - f(s_j^*(l) a_{l-1} \\
 &\quad + b x_j(l) - R + Q)] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) E [f(a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) + s_j^*(l) R + s_j^*(l) Q) \\
 &\quad - f(a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) - s_j^*(l) R + s_j^*(l) Q)] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) E [f(a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) + s_j^*(l) R + s_j^*(l) \sigma_{l-1} \epsilon_i) \\
 &\quad - f(a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) - s_j^*(l) R + s_j^*(l) \sigma_{l-1} \epsilon_i)] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) [\Pr\{u_i < 0\} - \Pr\{u_i' < 0\}] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) [\Pr\{(a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) R + s_j^*(l) \sigma_{l-1} \epsilon_i) < 0\} \\
 &\quad - \Pr\{(a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) - s_j^*(l) R + s_j^*(l) \sigma_{l-1} \epsilon_i) < 0\}] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) \left[\Pr\left\{\epsilon_i < -\frac{a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) + s_j^*(l) R}{s_j^*(l) \sigma_{l-1}}\right\} \right. \\
 &\quad \left. - \Pr\left\{\epsilon_i < -\frac{a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) - s_j^*(l) R}{s_j^*(l) \sigma_{l-1}}\right\} \right] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) \left[\int_{-\infty}^{-U} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^{-U'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} s_j^*(l) \left[\phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) + s_j^*(l) R}{s_j^*(l) \sigma_{l-1}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) - s_j^*(l) R}{s_j^*(l) \sigma_{l-1}}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) + R}{\sigma_{l-1}}\right) - \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) - R}{\sigma_{l-1}}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} (-1) \left[\phi\left(-\frac{a_{l-1} + b x_j(l) - R}{\sigma_{l-1}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi\left(-\frac{a_{l-1} + b x_j(l) + R}{\sigma_{l-1}}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) + R}{\sigma_{l-1}}\right) - \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) - R}{\sigma_{l-1}}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) + R}{\sigma_{l-1}}\right) - \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) - R}{\sigma_{l-1}}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) + R}{\sigma_{l-1}}\right) - \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) - R}{\sigma_{l-1}}\right)$$

$$\text{단, } U = -\frac{a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) + s_j^*(l) R}{s_j^*(l) \sigma_{l-1}},$$

$$U' = -\frac{a_{l-1} + b x_j(l) s_j^*(l) - s_j^*(l) R}{s_j^*(l) \sigma_{l-1}}$$

이것을 R에 관하여 푼다.

$$\begin{aligned}
 & E [s_j^*(l) x_j(l) | R] \\
 &= \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) + R}{\sigma_{l-1}}\right) - \phi\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l) - R}{\sigma_{l-1}}\right) \\
 &= 2\phi'\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l)}{\sigma_{l-1}}\right) \frac{R}{\sigma_{l-1}} + O(R^3)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\phi'(u) = \frac{d\phi(u)}{du} = -G(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$s_j^*(l) x_j(l)$ 에 대한 계산도 위와 동일하며 같은 결과를 얻는다. 즉,

$$E [s_j^*(l) x_j(l) | R] = 2\phi'\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l)}{\sigma_{l-1}}\right) \frac{R}{\sigma_{l-1}} + O(R^3)$$

따라서 $j \neq j'$, $\mu = \mu'$ 조건에 대한 전체 기대치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V[N_j(l)] &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m s_j^*(l+1) s_{j'}^*(l) x_j(l) s_{j'}^*(l+1) \right. \\
 &\quad \left. s_j^*(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m s_j^*(l) x_j(l) s_{j'}^*(l) x_{j'}(l) \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m E [s_j^*(l) x_j(l) | R] \right. \\
 &\quad \left. \cdot E [s_{j'}^*(l) x_{j'}(l) | R] \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m 2\phi'\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l)}{\sigma_{l-1}}\right) \frac{R}{\sigma_{l-1}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot 2\phi'\left(\frac{a_{l-1} + b x_{j'}(l)}{\sigma_{l-1}}\right) \frac{R}{\sigma_{l-1}} \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} (m-1) \cdot n \\
 &\quad \cdot n \left\{ 2\phi'\left(\frac{a_{l-1} + b x_j(l)}{\sigma_{l-1}}\right) \frac{1}{\sigma_{l-1}} \right\}^2 E[R^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n^2} (m-1) n^2 \cdot 4 \left\{ \phi' \left(\frac{a_{l-1} + bx_j(l)}{\sigma_{l-1}} \right) \frac{1}{\sigma_{l-1}} \right\}^2 V[R] \\
 &= (m-1) \cdot 4 \left\{ \phi' \left(\frac{a_{l-1} + bx_j(l)}{\sigma_{l-1}} \right) \frac{1}{\sigma_{l-1}} \right\} \cdot \frac{1}{m} \sigma_{l-1}^2 \\
 &\cong 4 \phi' \left(\frac{a_{l-1} + bx_j(l)}{\sigma_{l-1}} \right)^2
 \end{aligned}$$

여기서 $\Pr\{x_j(l) = \pm 1\} = 1/2$ 이므로 위식은 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= 4 \phi' \left(\frac{a_{l-1} + bx_j(l)}{\sigma_{l-1}} \right)^2 \\
 &= 4 \left[\frac{1}{2} \phi' \left(\frac{a_{l-1} + b \Pr\{x_j(l) = 1\}}{\sigma_{l-1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \phi' \left(\frac{a_{l-1} + b \Pr\{x_j(l) = -1\}}{\sigma_{l-1}} \right) \right]^2 \\
 &= \left[\phi' \left(\frac{a_{l-1} + b}{\sigma_{l-1}} \right) + \phi' \left(\frac{a_{l-1} - b}{\sigma_{l-1}} \right) \right]^2 \\
 &= \left[G \left(\frac{a_{l-1} + b}{\sigma_{l-1}} \right) + G \left(\frac{a_{l-1} - b}{\sigma_{l-1}} \right) \right]^2
 \end{aligned}$$

이로써 4가지 조건에 대한 결과를 모두 도출하였다.

따라서 잡음항 $N_i(l)$ 에 대한 최종적인 분산은 도출된 위의 4가지 조건들에 대한 결과로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 V[N_i(l)] &= \sigma_i^2 \\
 &= r + \left[G \left(\frac{a_{l-1} + b}{\sigma_{l-1}} \right) + G \left(\frac{a_{l-1} - b}{\sigma_{l-1}} \right) \right]^2 \quad (10)
 \end{aligned}$$

단, 초기조건은 $\sigma_i^2 = r$ 이다.

5. 유사도(similarity: overlap)의 계산

$l+1$ 층에서의 유사도 a_{l+1} 과 그때의 해밍거리(Hamming distance) d_{l+1} 과의 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$a_{l+1} = 1 - 2d_{l+1} \quad (11)$$

소자 i 의 상태 $x_i(l+1)$ 이 기억패턴과 다를 확률은 다음과 같다.

$$P_e = \Pr\{x_i(l+1)s_i^*(l+1) = -1\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 &= \Pr\{u_i < 0\} \\
 &= \Pr\left\{ a_i + bx_i(l) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{r + [G(\frac{a_l + b}{\sigma_l}) + G(\frac{a_l - b}{\sigma_l})]^2} \varepsilon_i < 0 \right\} \\
 &= \Pr\left\{ \varepsilon_i < -\frac{a_i + bx_i(l)}{\sqrt{r + [G(\frac{a_l + b}{\sigma_l}) + G(\frac{a_l - b}{\sigma_l})]^2}} \right\} \\
 &= \Pr\left\{ \varepsilon_i < -\frac{a_i + bx_i(l)}{\sigma_l} \right\}
 \end{aligned}$$

여기서 P_e 는 상태 $x_i(l+1)$ 과 기억패턴이 서로 다를 확률이므로 해밍거리를 나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서 이 확률은 다음의 오차적분

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-u} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (13)$$

을 이용하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P_e &= d_{l+1} \\
 &= \Pr\{x_i(l+1)s_i^*(l+1) = -1\} \\
 &= \phi\left(\frac{a_i + bx_i(l)}{\sigma_l}\right)
 \end{aligned} \quad (14)$$

이것은

$$\begin{aligned}
 F(u) &= 1 - 2\phi(u) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (15)
 \end{aligned}$$

의 관계를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
 a_{l+1} &= 1 - 2d_{l+1} \\
 &= 1 - 2\phi\left(\frac{a_i + bx_i(l)}{\sigma_l}\right) \\
 &= F\left(\frac{a_i + bx_i(l)}{\sigma_l}\right)
 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서도 $\Pr\{x_i(l) = \pm 1\} = 1/2$ 이므로 최종적인 유사도는 다음과 같이 도출된다.

$$a_{l+1} = \frac{1}{2} \left[F\left(\frac{a_l + b}{\sigma_l}\right) + F\left(\frac{a_l - b}{\sigma_l}\right) \right] \quad (17)$$

이때, 초기조건은 아래와 같다.

$$\sigma_0^2 = r \quad (18)$$

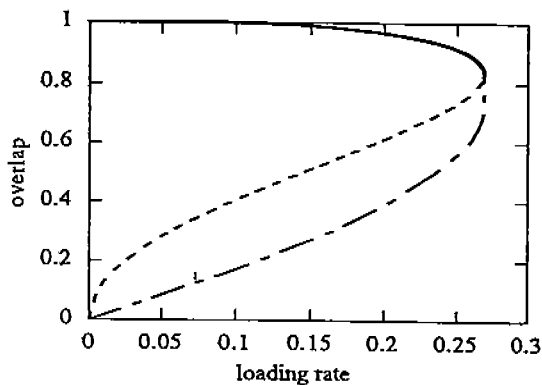
$$r = \frac{m}{n}$$

$$\text{단, } G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

여기서 분산 σ_i 은 반복적으로 정해진다. 그것은 잡음항의 분산이 고정되어 있지 않고 천이의 과정 중에 바뀌기 때문이다.

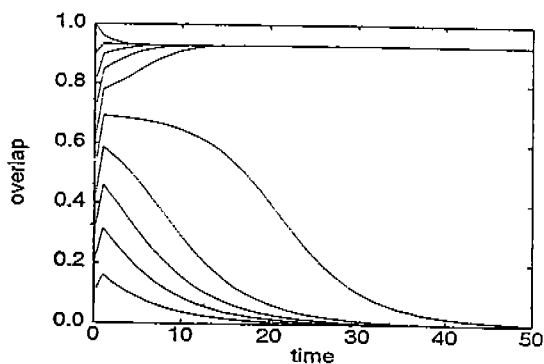
6. 수치실험

식 (10), (17)은 유사도 a_i 과 간섭표준편차 σ 의 2변수 다이내믹스로서 회로의 거시적인 상태변화를 기술하는 식으로서 거시적 상태의 평형상태를 구할 수 있다. 이러한 조건으로부터 $b=0$ 의 랜덤 패턴을 상관 학습시킨 계층형 신경회로망 모델에서의 유사도의 변환식에 따른 상전이 기억용량(상대 기억용량)은 $r_c = 0.27$ 로 주어지며 수치실험과 일치하고 있다. 이것을 나타낸 것이 (그림 1)이다. 여기에서 실선은 안정 평형상태를 나타내며 $r \ll 1$ 일때 1이며 r 이 증가하면서 서서히 감소하다가 r_c 근처에서 급격히 감소하여 $a_i \approx 0.84$ 에서 소멸한다. 점선은 불안정 평형상태를 나타내며 일점쇄선은 상기를 바르게 할 수 있는 한계 유사도 즉, 베이슨의 크기를 나타낸다. 여기서 자기연상형 신경회로망 모델의 기억용량이 $r_c = 0.15$ 인 것과 비교해 보면 계열연상의 기억용량이 보다 크다는 것을 알 수 있는데, 이는 분산항의 간섭이 자기연상의 경우보다 계열연상이 작기 때문이다.

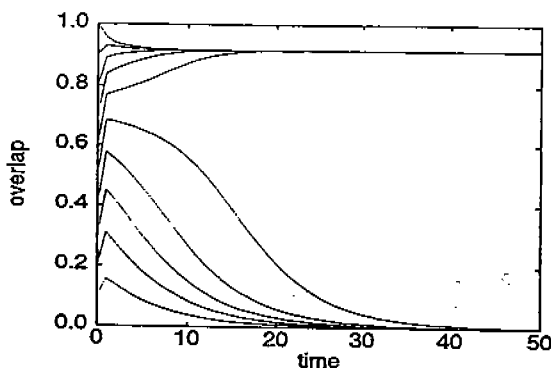


(그림 1) 계층형 신경망 모델의 상도. 실선: 안정평형상태, 점선: 불안정 평형상태, 일점쇄선: 한계 유사도 - 베이슨의 크기

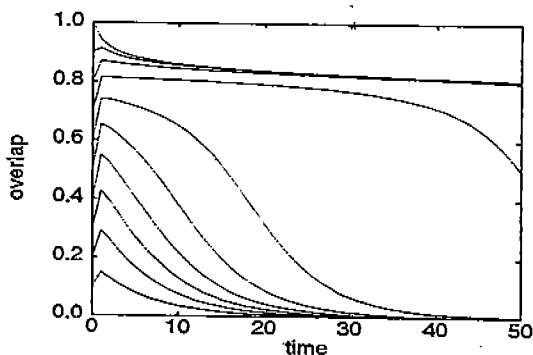
(Fig. 1) Phase diagram of cascaded neural net model. top : stable equilibrium, middle: unstable equilibrium, bottom : threshold overlap - basin of attraction



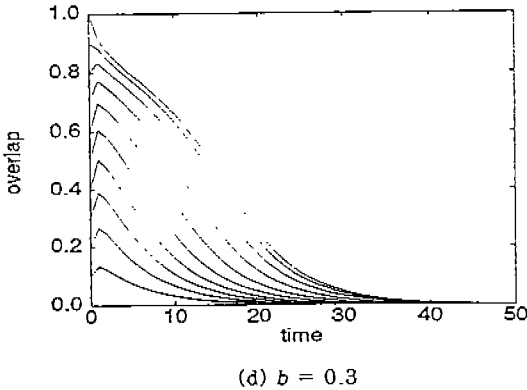
(a) $b = 0.0$



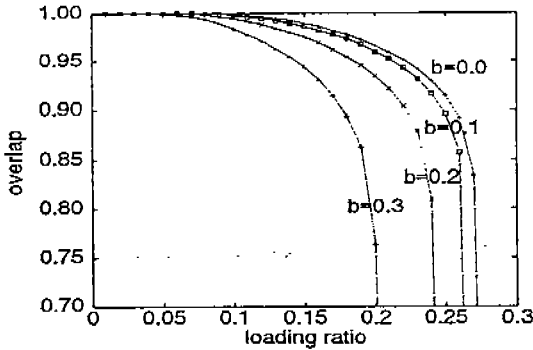
(b) $b = 0.1$



(c) $b = 0.2$



(그림 2) 수치실험에 의한 회로망의 다이내믹스 : $r=0.24$
 (Fig. 2) Dynamic retrievals of the numerical simulation : $r = 0.24$



(그림 3) 히스테리시스 특성에 따른 계층형 신경망 모델의 안정 평형 상태도. +: $b=0.0$, □: $b=0.1$, ×: $b=0.2$, △: $b=0.3$
 (Fig. 3) Stable equilibrium diagrams of cascaded neural net for the hysteretic properties.
 +: $b=0.0$, □: $b=0.1$, ×: $b=0.2$, △: $b=0.3$

일반적으로 b 의 값에 대한 계열연상의 능력은 b 가 0에서 멀어짐과 동시에 저하한다는 사실을 수치실험과 해석적 결과로부터 알 수 있다. 이것을 회로망 천이의 모습으로 나타낸 것이 (그림 2)이다. (그림 2) (a), (b), (c), (d)는 부하율(loading ration)이 $r=0.24$ 이고 자기결합 계수 $b=0.0, 0.1, 0.2$ 및 0.3 일때 회로망의 시간발전 다이내믹스가 각 초기치에서 출발하여 시간이 경과함에 따라 계열패턴을 바르게 상기하는지

어떤지를 나타낸 것이다. (그림 2)(a)와 (b)를 비교해 보면 다이내믹스의 형태가 거의 비슷하다는 것을 알 수 있다. 즉, b 값이 작을 때는 그 영향이 작지만 (그림 2)의 (c) 및 (d)에서와 같이 b 값이 커질수록 그 영향이 대폭 증가하는 결과를 볼 수 있다. 즉, b 의 값이 증가함에 따라 계열을 바르게 상기할 수 있는 능력이 떨어짐을 확인할 수 있다. b 가 증가하면 상기능력은 서서히 감소하는데 $b=0.1$ 일때는 $r_{c(b=0.1)}$ 근처에서 급격히 감소하여 $a_i \approx 0.82$ 에서 소멸하며 $b=0.2$ 일때는 $r_{c(b=0.2)}$ 근처의 $a_i \approx 0.82$ 에서, $b=0.3$ 일때는 $r_{c(b=0.3)}$ 근처의 $a_i \approx 0.78$ 에서 소멸한다. (그림 3)에 b 값의 변화에 따른 계열연상 모델의 유사도의 천이에 관한 상도 (Phase diagram)를 나타내었다. 그림에서 각 실선은 b 값에 따른 점근적인 유사도 즉, 안정 평형상태를 나타낸다.

7. 결론 및 고찰

일반적으로 신경회로망의 보편적 성질을 파악하고 해석하기 위하여, 학습패턴으로서 랜덤패턴을 대상으로 학습시키고 또한 통계적 방법을 이용함으로써 신경회로망 모델의 동작특성을 해석하는 기법이 주로 사용되어 왔다. 본 논문에서는 확률분포가 고른 랜덤패턴을 대상으로 계열연상 신경회로망 모델의 히스테리시스 특성이 연상능력에 어떠한 영향을 미치는가를 신경통계학적 방법으로 해석한 결과를 나타내었다. 이러한 해석 및 실험결과는 다음과 같은 정성적 설명과도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 즉, 계열연상에서는 소자의 상태가 어떻게 바뀌는 것이 바람직한 것인가. 여기서는 랜덤패턴을 대상으로 하고 있으므로 대개 절반 정도의 소자의 상태가 변한다면 최적일 것으로 볼 수 있다. 따라서 계열 패턴을 바르게 상기하기 위해서는 소자의 상태가 다음 시점에서 바뀌어야 좋을 확률과 바뀌지 않아야 좋을 확률은 대개 1/2 이므로, 소자는 상태가 바뀌는 것도 혹은 바뀌지 않는 것도 곤란한 상태 즉, $b=0$ 의 경우가 가장 적합하다는 것을 알 수 있다.

이것은 계열 연상에 있어서 대상으로 하고 있는 패턴이 $Pr\{s^u=1\}=1/2$ 을 만족하는 랜덤패턴이기 때문이다.

그러나 대상패턴의 확률분포가 고르지 못하고 한쪽

으로 치우친 패턴일 경우에는 $b=0$ 의 경우가 적합치 않다는 사실을 위의 결과로부터 쉽게 유추할 수 있다. 즉, 확률분포가 고르지 못한 패턴일 경우에는 $b \neq 0$ 일때 계열연상 능력이 높아지며 또한 이것은 $\Pr\{s^u = 1\} \neq 1/2$ 패턴을 대상으로 할 경우에는 소자의 히스테리시스 특성이 회로망의 상기능력을 향상시키는 효과로 작용할 수 있음을 나타낸다.

참 고 문 헌

[1] W. Newsome, K. Britten, and J. Movshon, "Neuronal correlates of a perceptual decision", *Nature*, Vol. 341, pp. 52-54, 1989.

[2] S. Amari, "Learning pattern and pattern sequence by self-organizing nets of threshold elements", *IEEE Trans. Computer*, Vol. C-21, No. 11, pp. 1197-1206, 1972.

[3] H. Yanai, and Y. Sawada, "Associative memory network composed of neurons with hysteretic property", *Neural Networks*, Vol. 3, pp. 223-228, 1990.

[4] H. Yanai, and Y. Sawada, "Effects of neuron property on the performance of associative memory networks", *Proc. of IJCNN'90 (Washington)*, pp. I.489-I.452, Lawrence Erlbaum Associates, 1990.

[5] E. Domany, W. Kinzel, and R. Meir, "Layered neural networks", *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. A22, pp. 2081-2102, 1989.

[6] R. Meir, and E. Domany, "Exact solution of a layered neural network model", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 59, pp. 359-362, 1987.

[7] H. Sompolinsky, and I. Kanter, "Temporal association in asymmetric neural networks", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 57, pp. 2861-2864, 1986.

[8] D. Kleinfeld, "Sequential state generator by model neural networks", *Proc. Nat'l. Acad. Sci. USA*, Vol. 81, pp. 9496-9473, 1986.

[9] A. V. Herz, Z. Li, and J. Hemmen, "Statistical mechanics of temporal association in neural networks with transmission delays", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 66, No. 10, pp. 1370-1373, 1991.

[10] S. Amari, "Associative memory and its statistical neurodynamical analysis", *Neural and Synergetic Computers*, H. Haken ed., New York, Springer Series in Synergetics, Vol. 42, pp. 85-99, 1988.



김 응 수

1977년 부산대학교 전자공학과 졸업(학사)
 1979년 부산대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
 1993년 Tohoku Univ.(일) 공학연구과 졸업(공학박사)
 1986년~1987년 Waseda Univ.

객원연구원

1984년~1993년 한국전자통신연구소 책임연구원
 1994년~현재 선문대학교 전자정보통신공학부 교수
 관심분야: (Neural Network) Statistical Physics of neural network, Chaos and fractal theory in neural network, Modeling biological function with neural network, Learning and generalization algorithm.



오 춘 석

1980년 서강대학교 전자공학과 졸업(학사)
 1986년 Marquette Univ. 컴퓨터공학과(석사)
 1992년 Univ. of Arizona 컴퓨터공학과(박사)
 1980년~1993년 전자통신연구

소 선임연구원

1993년~현재 선문대학교 전자정보통신공학부 교수
 관심분야: 화상처리, 자동검사, 광학시스템, 신호처리