

< 논 문 >

램프형 포인트하중에 의한 반무한 탄성체의 응력파해석

김현실* · 김재승* · 강현주** · 김상렬**

(1997년 1월 16일 접수)

An Analysis of Stress Waves in an Elastic Half Space to a Normal Point Force of Ramp Type in Time

Hyun-Sil Kim, Jae-Seung Kim, Hyun-Joo Kang and Sang-Ryul Kim

Key Words: Stress Wave(응력파), Elastic Half Space(반무한 탄성체), Rayleigh Wave(표면파), Point Force(집중하중)

Abstract

Stress wave propagations in an elastic half space to a normal point force of ramp type in time are analyzed. The governing equations are transformed by applying the Laplace and Hankel transforms with respect to time and radial distance. The inversion of Laplace transforms are performed by employing the Cagniard-de Hoop method, where the Rayleigh waves at surface are obtained by including the residue terms. The stress waves computed at the location very close to the surface are shown to be almost identical to the surface waves obtained by the residue method except the Rayleigh wavefront. It is found that at the surface, the stresses are dominated by the Rayleigh waves, whose amplitudes increase linearly with time when time is very large. It is also found that in the interior part, the radial stress has a logarithmic singularity at the shear wavefront, while tangential stress shows no singularity.

1. 서 론

빠른 속도로 비행하는 작은 물체가 구조물 표면에 반복적으로 충돌하여 구조물에 손상을 끼치는 경우가 여러 분야에서 중요한 문제로 제기되고 있다. 빠른 속도로 비행하는 작은 빗방울이 항공기 동체나 헬리콥터 블레이드에 충돌하거나 발전소 스팀터빈 끝단의 블레이드에 물방울이 충돌하는 경우, 또는 위성이나 우주선에 작은 비행체가 충돌하는 경우를 들 수 있다. 모든 구조는 유한한 형상을 갖고 있으나 많은 경우 충돌지속시간이 대단히 짧으며 반사파가 오기전에 이미 충돌직후 높은 응력

이 발생하며 구조물의 손상도 초기에 발생하므로 반무한 탄성체로 가정하는 모델은 매우 유용한 해석모델로 사용된다. 충돌하중의 시간 및 공간에 대한 분포는 실제 문제에 있어서 매우 복잡하지만 포인트에 집중되는 하중은 가장 단순한 모델로 생각할 수 있다.

포인트하중이 수직으로 작용할 때 반무한 탄성체의 거동은 지진파해석과 관련하여 1904년 Lamb이 처음 제시한 고전적인 문제로 지진파해석 외에 초음파를 이용한 비파괴검사, 충격하중에 의한 구조물의 손상해석 등에 기본적인 모델로 활용된다. Lamb의 문제는 시간에 대해 스텝형상을 갖는 집중하중이 작용하는 축대칭 문제로 Pekeris⁽¹⁾는 표면에서의 변위를 Poisson의 비가 0.25인 특별한 경우에 대해 엄밀해로 유도하였으며, 이후 여러 연

*회원, 한국기계연구원 구조시스템연구부

**한국기계연구원 구조시스템연구부

구결과가 발표되었으나 내부에서의 변위를 구할 수 있는 일반적인 방법은 1969년 Gakenheimer와 Miklowitz⁽²⁾에 의해 제시되었으며, Gakenheimer⁽³⁾는 표면에 근접한 경우를 포함하는 여러 위치에서의 변위에 대해 수치해석 결과를 발표하였다. 표면에 작용하는 하중이 집중하중이 아닌 다양한 형태에 대해서도 많은 연구결과^(4,5)가 발표되었으며, 특히 폭파현상과 관련한 표면파전파가 많이 다루어졌다.

Lamb의 문제를 포함한 축대칭 하중문제는 일반적으로 시간에 대해서는 Laplace 변환을, 반경방향에 대해서는 Hankel 변환을 적용하여 변환된 공간에서의 해를 구한후 Laplace 역변환은 Cagniard-de Hoop⁽⁶⁾ 방법을 이용하며 수행한다. 이 과정에서 하중이 스텝형태라면 변위는 직접 구해지나 응력은 시간에 대해 적분한 형태로 주어진다. 따라서 $\delta(t)$ 형태의 하중에 해당하는 Green 함수를 구하기 위해서는 응력을 시간에 대해 두번 미분해야 하는데 참고문헌⁽³⁾의 결과에서 알 수 있듯이 이는 P파, S파 또는 표면파(rayleigh wave)의 시작점(wavefront)에서 불연속성 또는 특이점(singularity)을 가지므로 미분에 어려움이 있다. 이러한 이유로 탄성과 해석문제는 일반적인 하중조건에 대해 Green 함수를 이용 convolution 적분방법이 특별한 경우를 제외하고는 거의 불가능하며, 대부분의 문제의 경우 주어진 하중조건에 따라 사실상 별도의 해석방법이 적용되어 왔다. 하중이 시간에 대해 스텝형태를 갖는 경우 변위에 대해서는 많은 연구결과가 발표되었으나 응력에 대한 연구결과는 극히 일부^(7,8)만 발표된 실정이다. Laturelle⁽⁸⁾은 반무한 탄성체 표면에 원(circular area)형태로 스텝하중이 가해지는 경우 Cagniard-de Hoop 방법을 사용하지 않고 응력을 구하였는데 임의위치에 대해서는 수식만 제시하고 수치해석은 특별한 경우인 반경이 제로가 되는 대칭축을 따라서만 수행하였다.

본 연구에서는 반무한 탄성체의 표면에 시간에 대해 램프형태로 변화하는 집중하중이 작용할 때 내부 및 표면 임의위치에서 응력과 전달해석을 다루었다. 탄성체와 탄성체간의 고속 충돌의 경우 초기에는 압력이 램프형태로 증가하는 경우⁽⁹⁾가 있으며 대부분의 충돌문제는 초기의 응력분포가 중요하므로 해석을 충돌초기에 국한하는 한 본 경우도 기본적인 모델로 사용될 수 있으며, 특히 스텝형 포

인트하중이 가해질때 변위해석과 보완관계에 있다. 적분변환법을 사용하여 변환된 상태에서의 응력을 구한 후 Cagniard-de Hoop 방법을 사용하여 역변환해를 구하였다. 표면에서의 응력은 레지듀(residue) 항에 의한 성분을 고려하였으며, 시간이 커짐에 따른 표면파의 거동을 다루었고 여러 위치에서 시간에 따른 응력과 계산결과를 제시하였다.

2. 이론해석

Fig. 1과 같이 균일한 반무한 탄성체의 표면에 $t > 0$ 일 때 램프형태의 집중하중이 가해진 경우를 생각하면 하중이 축대칭이므로 이후 원통형좌표를 사용하며

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} \delta(r) r dr = 1$$

를 이용하여 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{zz} = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} t, \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \text{at } z=0 \quad (1)$$

반경방향과 수직방향 변위 u_r , u_z 와 응력은 다음과 같이 주어진다.

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \quad (2)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{u_r}{r} \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (6)$$

$$\sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (7)$$

여기서, λ 와 μ 는 Lamé의 상수이며, 포텐셜함수

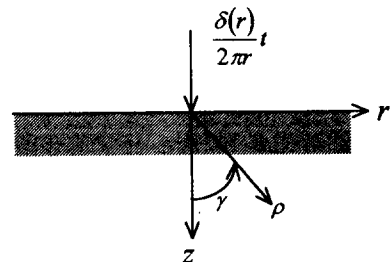


Fig. 1 An elastic half space to a normal point force

ϕ 와 ψ 는 다음 식을 만족한다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi = -\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (8)$$

단, c_1 과 c_2 는 P파(dilatational wave)와 S파(shear wave)의 전파속도이다.

시간에 대해서는 Laplace 변환을, 반경 r 에 대해서는 Hankel 변환을 취한 후 경계조건을 적용하면 변환된 상태에서 포텐셜함수의 해는 다음과 같이 주어진다(자세한 적분변환과정은 참고문헌(6,7)을 참조바람).

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\xi, z, p) &= -\frac{(2\xi^2 + p^2/c_1^2)}{2\pi\mu p^2 D} e^{-\alpha z} \\ \bar{\psi}(\xi, z, p) &= -\frac{2\alpha}{2\pi\mu p^2 D} e^{-\beta z} \end{aligned} \quad (9)$$

단, p 와 ξ 는 Laplace 변환 및 Hankel 변환변수를 나타내며

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 + p^2/c_1^2}, \quad \beta = \sqrt{\xi^2 + p^2/c_2^2} \quad (10)$$

$$D = (2\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2})^2 - 4\xi^2 \alpha \beta \quad (11)$$

구해진 포텐셜함수의 해를 이용하여 변위 u_r 과 응력 σ_{zz} 는 다음과 같이 역 Hankel 변환된 형태로 표현할 수 있다.

$$u_r(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p^2} \int_0^\infty \frac{1}{D} \left[\xi \left(2\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta\xi e^{-\beta z} \right] \xi J_1(r\xi) d\xi \quad (12)$$

$$\sigma_{zz}(r, z, p) = \frac{1}{2\pi p^2} \int_0^\infty \frac{1}{D} \left[-\left(2\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right)^2 e^{-\alpha z} + 4\alpha\beta\xi^2 e^{-\beta z} \right] \xi J_0(r\xi) d\xi \quad (13)$$

변위 u_z 와 응력 σ_{zr} 도 유사한 형태로 주어진다.

Cagniard-de Hoop 방법을 이용하여 식 (12)와 (13)의 역 Laplace 변환을 하기 위해서는 이중적분 형태가 필요하며, 다음과 같은 Bessel 함수의 적분 표현(10)을 이용한다.

$$\begin{aligned} J_0(r\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\xi\cos\phi} d\phi \\ J_1(r\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\xi\cos\phi} (-i\cos\phi) d\phi \end{aligned} \quad (14)$$

그러나, 응력 σ_{rr} 과 $\sigma_{\theta\theta}$ 은 식 (12)와 (13)과 같이 직접적으로 역 Hankel 변환된 형태로 표현이 불가능하며 먼저 u_r/r 와 $\partial u_r/\partial r$ 의 이중적분형태가 필요하다. 이를 위해 Bessel 함수 $J_1(r\xi)$ 의 또

다른 적분 표현(10)을 이용하여

$$J_1(r\xi) = \frac{r\xi}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\xi\cos\phi} \sin^2\phi d\phi \quad (15)$$

u_r/r 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{u_r(r, z, p)}{r} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2 \mu p^2 D} \left[\left(2\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right] \xi \sin^2\phi e^{ir\xi\cos\phi} \xi d\phi d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

또한 $\partial u_r/\partial r$ 은 식 (14)의 $J_1(r\xi)$ 을 식 (12)에 대입한 후 r 에 대해 미분하여 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r(r, z, p)}{\partial r} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2 \mu p^2 D} \left[\left(2\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right] \xi^2 \cos^2\phi e^{i r \xi \cos \phi} \xi d\phi d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

포텐셜함수와 $\partial u_r/\partial r$, u_r/r 을 이용하여 응력 σ_{rr} 와 $\sigma_{\theta\theta}$ 를 이중적분형태로 표현할 수 있다. 이제 영역(domain) (ξ, ϕ) 를 다른 영역 (q, w) 으로 다음과 같이 변환한다.

$$\begin{aligned} \xi \cos\phi &= \left(\frac{p}{c_1} \right) q, \quad \xi \sin\phi = \left(\frac{p}{c_1} \right) w \\ \xi &= \frac{p}{c_1} \sqrt{q^2 + w^2}, \quad \xi d\xi d\phi = \frac{p^2}{c_1^2} dw dq \end{aligned} \quad (18)$$

위 변환은 원통좌표계 (ξ, ϕ) 를 직교좌표계 (q, w) 로 변환하는 것과 유사하며 적분구간도 다음과 같이 변환된다.

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\dots) \xi d\phi d\xi = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\dots) dq dw$$

새로운 좌표계로 응력 σ_{rr} 과 $\sigma_{\theta\theta}$ 를 표현하면

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, p) &= \frac{\text{Re}}{\pi^2 c_1^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{M} [F_{rrD} e^{-p t_1} + F_{rrS} e^{-p t_2}] dq dw \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, z, p) &= \frac{\text{Re}}{\pi^2 c_1^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{M} [F_{\theta\theta D} e^{-p t_1} + F_{\theta\theta S} e^{-p t_2}] dq dw \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} F_{rrD} &= (2\eta^2 + 1)(-l^2 + 2 + 2q^2) \\ F_{rrS} &= -4q^2 \sqrt{\eta^2 + 1} \sqrt{\eta^2 + l^2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_{\theta\theta D} &= (2\eta^2 + 1)(-l^2 + 2 + 2w^2) \\ F_{\theta\theta S} &= -4w^2 \sqrt{\eta^2 + 1} \sqrt{\eta^2 + l^2} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M &= (2\eta^2 + l^2)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + 1} \sqrt{\eta^2 + l^2} \\ \eta^2 &= q^2 + w^2 \end{aligned} \quad (23)$$

단, 식 (19)와 (20)에서 적분함수는 w 에 대해서는 대칭이며 또한 q 에 대해서는 허수인 영역에 대해서는 적분값이 서로 상쇄되므로 적분구간은 $(0, \infty)$ 로 바뀌었으며, 실수값만 취하는 것에 유의해야 한다. 변수 l 은 P파와 S파의 전파속도의 비로, $l = c_1/c_2$ 이며

$$\begin{aligned} t_1 &= (z\sqrt{\eta^2+1} - iqr)/c_1 \\ t_2 &= (z\sqrt{\eta^2+l^2} - iqr)/c_1 \end{aligned} \quad (24)$$

주목해야 할 점은 식 (19), (20)에서 Laplace 변환상수 p 는 분자와 분모에서 서로 상쇄가 되었으며, 이는 하중조건이 램프형태인 점에 기인한다. 변위 u_r 을 식 (12)에서 같은 방법으로 (q, w)좌표로 변환하면 분모에 p 가 남으며, 따라서 $\partial u_r/\partial t$ 가 주어지게 된다. 다른 방법으로는 식 (16)을 이용하여 구할 수 있으나 u_z 의 경우는 $\partial u_z/\partial t$, 또는 $\partial u_z/\partial z$ 가 주어지므로 u_z 를 구하기 위해서는 t 또는 z 에 대해 적분하여야 한다. 식 (19), (20)에서 t_1 항은 P파를 t_2 항은 S파를 나타내며 Cagniard-de Hoop 방법을 이용하여 역 Laplace 변환을 하기 위해서는 q 에 대한 적분구간을 식 (24)에 따라 변형해야 한다. 식 (24)는 하중조건이 스텝형태인 경우와 동일하므로 자세한 적분구간의 변형과정은 참고문헌^(2,6)을 참조하기 바람, 여기에서는 결과만 제시하였다.

응력을 무차원화된 시간 τ 의 함수로 표현하는 것이 편리한데 무차원화된 시간을 다음과 같이 정의한다

$$\tau = tc_1/\rho$$

여기서, $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$, $r = \rho \sin \gamma$, $z = \rho \cos \gamma$.

역 Laplace 변환된 응력 σ_{rr} 은 다음과 같이 세가지 성분으로 이루어진다.

$$\sigma_{rr}(r, z, \tau) = I_D + I_S + I_H \quad (25)$$

여기서, I_D 와 I_S 는 각각 P파와 S파 성분을 나타내며

$$I_D = H(\tau-1) \frac{1}{\pi^2 \rho c_1} \int_0^{\sqrt{\tau^2-1}} \operatorname{Re} \left[\frac{F_{rrD}}{M} \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] dw \quad (26)$$

$$I_S = H(\tau-l) \frac{1}{\pi^2 \rho c_1} \int_0^{\sqrt{\tau^2-l^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{F_{rrS}}{M} \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] dw \quad (27)$$

$H(\tau)$ 는 Heaviside 스텝함수를 나타낸다. I_H 항

은 head wave(또는 von Schmidt wave) 성분을 나타내며

$$I_H = H(\tau-\tau_L) H(\tau_H-\tau) H\left[\gamma - \sin^{-1}\left(\frac{1}{l}\right)\right] \frac{1}{\pi^2 \rho c_1} \int_{w_L}^{w_H} \operatorname{Re} \left[\frac{F_{rrH}}{M} \frac{\partial q}{\partial \tau} \right] dw \quad (28)$$

여기서,

$$\tau_L = \cos \gamma \sqrt{l^2-1} + \sin \gamma$$

$$\tau_H = \sqrt{l^2-1} / \cos \gamma$$

$$W_H = [(\tau - \cos \gamma \sqrt{l^2-1})^2 / \sin^2 \gamma - 1]^{1/2}$$

$$W_L = \begin{cases} 0, & \tau < l \\ \sqrt{\tau^2-l^2}, & \tau > l \end{cases}$$

Head wave는 각도 γ 가 $\sin^{-1}(1/l)$ 보다 큰 경우 존재하는데 S파의 음파전파면(wavefront)과 접선인 방향으로 전파면이 발생한다(자세한 설명은 참고문헌⁽⁶⁾을 참조바람). 응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 도 같은 방법에 의해 구해진다.

3. 표면파

위에서 제시한 방법은 내부의 경우이며 표면에서는 ($z=0$, 또는 $\gamma=90^\circ$), 식 (19)와 (20)은 레지듀(residue) 성분을 포함해야 한다. 식 (19)와 (20)에서 분모 M 은 근 $\eta=ia$ 을 가지며, 이는 표면파(rayleigh wave)의 전파속도 c_R 과 관련된다.

$$a = c_1/c_R$$

또한 표면에서는 식 (24)는 다음과 같이 단순화된다.

$$\tau = -iq$$

표면에서의 응력 σ_{rr} 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, 0, \tau) &= I_R + H(\tau-1) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\pi^2 \rho c_1} \int_{w_L}^{\sqrt{\tau^2-1}} \operatorname{Re} \left[\frac{F_{rr}}{M} i \right] dw \end{aligned} \quad (29)$$

단, $F_{rr} = F_{rrD} + F_{rrS}$.

적분구간 q 에 대한 레지듀 성분 I_R 은

$$I_R = \frac{\operatorname{Re}}{\pi^2 c_1^2} \int_0^\infty i\pi \frac{F_R}{G_R G_q} e^{iqr\rho/c_1} dw \quad (30)$$

여기서,

$$F_R = (-2a^2+1)(-l^2+2-2\tau^2)$$

$$G_R = \frac{\partial M}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta^2=a^2}, \quad G_q = \frac{\partial \eta^2}{\partial q} = 2i\tau \quad (31)$$

식 (30)을 역 Laplace 변환하기 위해 적분경로를 다음과 같이 변경하면

$$\tau = \sqrt{w^2 - a^2}$$

레지듀 성분 I_R 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} I_R &= -\frac{1}{\pi^2 r c_1} \int_a^\infty \left[\frac{\pi F_R}{2\tau} \frac{F_R}{G_R} e^{-\rho r \tau / c_1} \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau \right. \\ &= \frac{1}{\pi^2 r c_1} \left[\frac{\pi F_R}{2 G_R} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - a^2}} \right] H(\tau - a) \end{aligned} \quad (32)$$

같은 방법으로 $\sigma_{\theta\theta}(r, 0, \tau)$ 도 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, 0, \tau) &= \frac{1}{\pi^2 r c_1} \left[\frac{\pi H_R}{2 G_R} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - a^2}} \right] H(\tau - a) \\ &+ H(\tau - 1) \frac{1}{\pi^2 r c_1} \int_{w_L}^{\sqrt{\tau^2 - 1}} \operatorname{Re} \left[\frac{F_{\theta\theta}}{M} i \right] dw \end{aligned} \quad (33)$$

단,

$$\begin{aligned} H_R &= (-2a^2 + 1)(-l^2 + 2 + 2\tau^2 - 2a^2) \\ &+ 4(\tau^2 - a^2)\sqrt{a^2 - 1}\sqrt{a^2 - l^2} \end{aligned} \quad (34)$$

$$F_{\theta\theta} = F_{\theta\theta D} + F_{\theta\theta S}$$

4. 수치계산 예

Fig. 2와 3에 무차원화된 응력 $S_{rr} = \pi^2 \rho c_1 \sigma_{rr}$ 과 $S_{\theta\theta} = \pi^2 \rho c_1 \sigma_{\theta\theta}$ 를 무차원화된 시간 τ 의 함수로 여러 가지 각도 $\gamma = 60^\circ, 85^\circ, 89.9^\circ, 90^\circ$ (표면파에 해당)에 대해 나타냈다. 필요한 변수는 $l = c_1/c_2$ 과 $a = c_1/c_R$ 로 균일 탄성체인 경우 Poisson의 비 ν 에 의해서만 결정된다. 본 논문에 제시된 방법은 임의의 ν (단, $0 < \nu < 0.5$)에 대해서 유효하나 참고문헌⁽³⁾의 결과와 비교하기 위해 $\nu = 1/4$ 를 택하였다. 이 경우 S 파의 전달면은 $l = 1.732$, Rayleigh파의 전달면은 $a = 1.884$ 가 된다. 89.9° 는 내부 응력을 계산하는 방법을 사용하여 표면에 근접한 경우를 계산한 후 이를 표면파를 이용한 방법에 의해 계산된 90° 의 값과 비교하여 두 방법의 정확성을 보기 위한 것으로 Fig. 2와 3에 보듯이 표면파의 시작점($\tau = 1.884$) 부근에서만 차이를 보일 뿐 나머지 영역에서는 거의 구별이 되지 않음을 알 수 있다. 표면파는 식 (32)에서 보듯이 시작점에서 특이성을 보이거나 내부 응력파는 연속적인 변화를 갖는데 표면

파는 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 에 해당하는 극한값이므로 89.9° 에서 표면파의 시작점 부근에서는 차이가 존재한다.

표면에서 응력 σ_{rr} 과 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 $\tau > a$ 의 경우 Rayleigh파가 지배적임을 알 수 있다. 시간이 커짐에 따른 Rayleigh파의 거동은 식 (30)과 (33)의 레지듀 성분에서 알 수 있는데 σ_{rr} 과 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 각각 다음과 같은 양상을 보인다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, 0, \tau) &\approx A\tau + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, 0, \tau) &\approx -A\tau + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

여기서,

$$A = \left(\frac{1}{2\pi r c_1 G_R} \right) (4a^2 - 2 - 4\sqrt{a^2 - 1}\sqrt{a^2 - l^2})$$

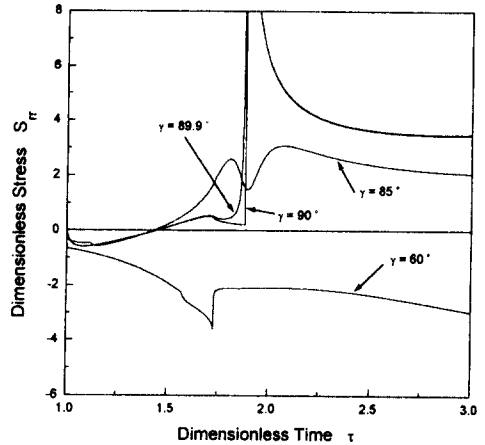


Fig. 2 Dimensionless radial stress S_{rr} vs. dimensionless time τ

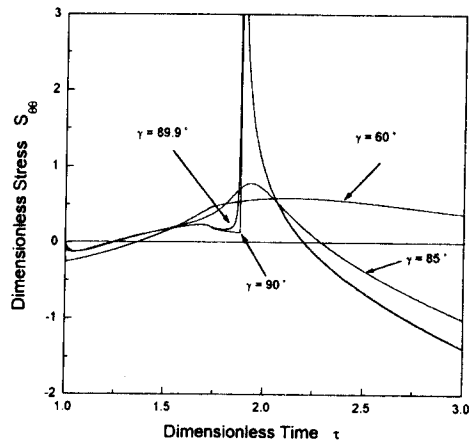


Fig. 3 Dimensionless tangential stress $S_{\theta\theta}$ vs. dimensionless time τ

Gakenheimer⁽³⁾는 스텝형태의 하중인 경우 각 변위는 P파의 시작점에서 점프현상을 보이고, head wave가 발생하는 경우 S파의 시작점에서 $\log|\tau - l|$ 형태의 특이성을 가짐을 보였다. 이러한 불균일성은 표면에 접근할수록 약해지다가 표면에서는 Rayleigh 파의 특이성만 남고 사라지게 된다. Fig. 2의 σ_{rr} 는 이러한 성질을 보임을 알 수 있으나 Fig. 3의 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 S파의 시작점에서 $\log|\tau - l|$ 형태의 특이성을 보이지 않는다. 식 (27), (28)에서 τ 가 l 에 근접하면 $\partial q/\partial \tau$ 는 $1/w$ 로 되며, 이러한 현상때문에 σ_{rr} 에서는 $\log|\tau - l|$ 형태의 특이성을 보이게 된다. 그러나 $\sigma_{\theta\theta}$ 의 경우, 식 (20)의 $F_{\theta\theta}$ 항은 w^2 항을 포함하고 있기 때문에 적분시 특이성을 보이지 않게 된다.

5. 결 론

본 논문에서는 반무한 탄성체의 표면에 시간에 대해 램프형태로 변화하는 집중하중이 작용할 때 내부와 표면에서의 응력과 전달해석방법을 제시하였고 여러 위치에서 시간에 따른 응력과 계산결과를 보였다. 내부 응력을 계산하는 방법을 사용하여 표면에 근접한 경우를 계산한 후 이를 표면파를 이용한 방법에 의해 계산된 값과 비교한 결과 표면파의 시작점부근에서만 차이를 보일 뿐 나머지 영역에서는 거의 구별이 되지 않음을 알 수 있었다. 반경방향과 원주방향의 응력은 표면에서 Rayleigh 파가 지배적이며 시간이 증가함에 따라 비례하여 커짐을 보였는데 이는 주어진 하중이 시간에 비례하여 커지는 램프형태임에 기인한다. 스텝하중인 경우 표면에서의 응력을 구하기 위해서는 본 논문에서 제시된 응력과 표현을 시간에 대해 미분해야 하는데 특이점은 레지듀 항에만 포함되므로 수치미분이 아닌 해석적인 미분이 가능할 것으로 예상된다. 스텝하중에 대해서는 응력해석 연구결과가 아직 제시되지 않은 현실에 비추어 볼때 매우 중요하며, 추후 연구가 계속 필요한 분야로 사료된다.

후 기

본 연구는 과거처 지원에 의해 이루어졌음을 밝

힌다.

참고문헌

- (1) Pekeris, C. L. , 1955, "The Seismic Surface Pulse," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 41, pp. 469~480.
- (2) Gakenheimer, D. C. and Miklowitz, J. , 1969, "Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 505~515.
- (3) Gakenheimer, D. C. , 1970, "Numerical Results for Lamb's Point Load Problem," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp. 522~524.
- (4) Norwood, F. R. , 1969, "Exact Transient Response of an Elastic Half Space Loaded Over a Rectangular Region of Its Surface," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 99~109.
- (5) Singh, S. K. and Kuo, J. T. , 1970, "Response of an Elastic Half Space to Uniformly Moving Circular Surface Load," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp. 109~115.
- (6) Achenbach, J. D. , 1984, *Wave Propagation in Elastic Solids*, Elsevier Science Publishing Company, New York, pp. 298~301.
- (7) Blowers, R. M. , 1969, "On the Response of an Elastic Solids to Droplet Impact," *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, Vol. 5, No. 2, pp. 167~193.
- (8) Laturelle, F. G. , 1990, "The stresses Produced in an Elastic Half-space by a Normal Step Loading over a Circular Area: Analytical and Numerical Results," *Wave Motion*, Vol. 12, 107~127.
- (9) Kinslow, R. , 1970, *High-velocity Impact Phenomena*, Academic Press, New York.
- (10) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. , 1980, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, pp. 953.