

〈논 문〉

고차 등매개요소에서 내부절점의 위치와 해의 안정성 연구

이 준 희* · 임 장 근*

(1996년 1월 6일 접수)

A Study on the Solution Stability by the Position of Internal Nodes
in Higher Order Isoparametric Elements

Joon Hee Lee and Jang Keum Lim

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Isoparametric Element(등매개요소), Internal Node(내부절점), Conformal Mapping(등각사상)**Abstract**

Higher order isoparametric elements are usually used in the finite element analysis because they can represent easily the geometric shape of a complex structure and can improve the solution quality. When these elements are used, the position of internal nodes affects greatly on the solution accuracy. Decreasing of the accuracy related to the position of internal nodes is due to non-conformal mapping between the global and the local coordinate systems and this non-conformal mapping often results in an unstable Jacobian value. This paper, in order to remove this difficulty, suggests a modified shape function which can establish conformal mapping between two coordinate systems. Numerical experiments with the proposed shape function show that a stable solution can be obtained without respect to the position of internal nodes, and offer convenience that one can take arbitrarily the position of internal nodes considering only the geometric shape of element boundaries.

1. 서 론

등매개요소(isoparametric element)는 요소의 기하학적인 사상함수(mapping function)를 변위의 형상함수(shape function)로 채용하는 요소로서 형상이 복잡한 구조물을 유한요소법으로 해석할때 그 형상을 합리적으로 표현할 수 있기 때문에 매우 효과적이다. 따라서 기존 여러가지 유한요소 패키지 프로그램에는 이들 요소를 다양하게 선정하여 사용할 수 있도록 준비되어 있으며, 이 요소가 개발됨으로써 유한요소법의 편리함과 유효성이 두드러지

게 되었다.

등매개요소의 정확도에 관해서는 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 그 첫번째는 요소의 형상에서 비롯되는 형상오차가 있으며, 이에 관해서는 몇몇 학자들^(1,4,6)에 의하여 연구된 바 있다. 두번째는 요소의 내부절점(internal node) 위치를 어떻게 선정하느냐에 따른 오차를 생각할 수 있다.

등매개 일차요소(1st order element)에서는 절점이 구석(corner)에만 위치하기 때문에 형상오차를 생각할 수 있지만 고차요소(higher order element)는 요소의 변이나 면 또는 내부에 절점들이 존재하게 되어 이들의 위치선정에 따른 오차가 해의 정확도를 크게 좌우한다.⁽²⁾

이러한 현상은 요소의 형상을 정사각형 또는 정

*한양대학교 대학원

**회원, 한양대학교 기계설계학과

육면체로 변환할때 사용하는 사상함수의 자코비안(Jacobian) 값이 이들 내부절점위치에 따라서 불안정해지기 때문에 발생한다.

일반적으로 등매개요소의 자코비안 값이 영 또는 음이 아니면 해는 얻어지기 때문에 양의 자코비안 값을 얻을 수 있는 내부절점위치의 적정범위를 검토 및 추천하고 있으나⁽²⁾ 그 범위 내에서 선정되었다고 하더라도 최적위치^(3,5)에서 어긋나게 되면 어긋난 정도에 따라서 오차가 달리 발생하게 된다.

내부절점의 최적위치는 요소의 자코비안 값이 영이 아닌 값으로 일정해지도록 선정되는 위치를 의미하며, 이차요소(quadratic element)인 경우 내부절점이 변이나 면 또는 요소의 중앙에 위치할 때가 이에 속한다.

실제로 요소분할시 내부절점들을 최적위치에 선정하기는 쉽지 않으며, 비선형 문제 특히 금속성형과 같이 요소가 심하게 변형되는 경우에는 반복계산 중에 이들 절점위치가 변하게 되어 이에 따른 오차로 인하여 해의 정확도가 크게 저하된다.

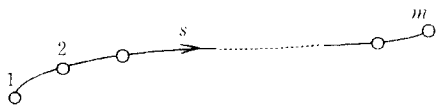
본 논문에서는 고차 등매개요소에서 내부절점의 위치에 관계없이 안정된 해석결과를 얻을 수 있는 수정 형상함수방법을 제안하고 여러가지 탄성문제와 이차원 소성문제에 적용하여 그 결과를 검토하므로써 제안한 방법의 유효성을 보이고자 한다.

2. 등매개요소

2.1 등매개요소의 특징

등매개요소(isoparametric element)는 요소의 형상이 임의로 찌그러지거나 요소경계가 곡선을 이루는 요소로서 해석영역의 경계가 복잡한 경우에 흔히 사용된다. 등매개요소는 이와같이 임의의 형상을 가지기 때문에 그 본래의 형상으로는 요소방정식을 구성하기가 어려워서 일반적으로 정사각형과 같은 기하학적인 형상으로 사상(mapping)을 하여 수식화 한다. 이때 사상함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹⁾

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_i \quad (1)$$



(a) Actual edge

단, \mathbf{x} 는 전체좌표계에서 임의의 위치를 표시하고 \mathbf{x}_i 는 i 번째 절점의 좌표값이다. 또한 n 은 요소의 절점갯수이고, 독립변수 ξ, η, ζ , 는 -1 에서 1 사이로 정의되는 국부좌표계, $\phi_i(\xi, \eta, \zeta)$ 는 보간(interpolation) 특성을 가지는 기하학적인 사상함수가 된다.

등매개요소에서는 이와 같이 기하학적인 사상함수가 결정되면, 이 사상함수를 변위의 형상함수(shape function)로 사용하여 다음과 같이 요소내의 변위분포를 설정한다.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}_i \quad (2)$$

여기서, \mathbf{u}_i 는 절점변위벡터를 의미하며 식 (1), (2)를 사용하여 등매개요소의 행렬방정식을 구성할 수 있다.⁽²⁾

2.2 자코비안 행렬식의 특성

등매개요소의 행렬방정식을 구성할때 기하학적인 사상함수의 자코비안 행렬식은 다음과 같이 표현된다.⁽¹⁾

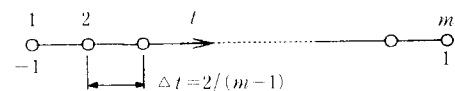
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3)$$

식 (3)의 자코비안행렬식이 양의 값(positive value)을 가질때는 역변환시 유일해를 얻을 수 있으며, 이 조건은 식 (1)로 표현된 절점의 위치에 따라서 좌우된다.

Fig. 1과 같이 요소의 변이곡선으로 구성되고, 이 변에 $m-2$ 개의 내부절점이 있다면 형상함수 또는 기하학적인 사상함수는 곡선좌표계 s 를 도입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^m L_i(t) s_i \quad (4)$$

$$L_i(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{t-t_j}{t_i-t_j} \right), \quad i \neq j \quad (5)$$



(b) Mapped edge

Fig. 1 Nodes on the isoparametric element edges

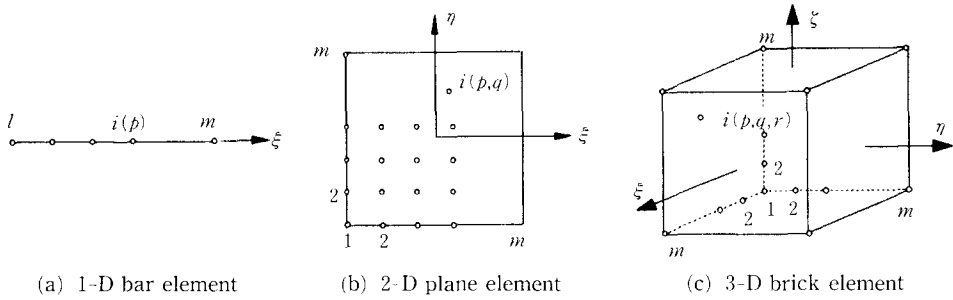


Fig. 2 Lagrange type isoparametric elements

이들 식에서 하첨자 i, j 는 절점번호를 의미하고, s_i, t_i, t_j 는 각각 그 점에서의 좌표값이다. 식 (4)에서 곡선좌표 s 는 일반적으로 전체좌표계 x_1, x_2, x_3 의 함수가 되지만 국부좌표계 t 는 ξ, η, ζ 중에서 두개는 ± 1 로 일정하기 때문에 어느 한개로만 표현된다.

식 (1)의 기하학적인 사상함수 ϕ_i 는 식 (5)의 Lagrange 보간함수에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_i(\xi, \eta, \zeta) = L_p(\xi)L_q(\eta)L_r(\zeta) \quad (6)$$

Fig. 2에 보인 바와 같이 식 (6)은 삼차원 정육면체 요소에 관한 일반식이며, 일차원요소인 경우에는 $\phi_i(\xi) = L_p(\xi)$, 이차원요소인 경우에는 $\phi_i(\xi, \eta) = L_p(\xi)L_q(\eta)$ 으로 각각 표현할 수 있다.

Fig. 2에서 $i(p, q, r)$ 는 ξ, η, ζ 축에 평행한 모서리에서 각각 p, q, r 번째 절점이 요소내의 절점번호 i 인 경우를 의미한다.

일반적으로 등매개 변수요소의 내부절점위치는 실제요소에서 어떻게 선정되느냐에 관계없이 Fig. 2와 같이 사상된 요소에서는 규칙적으로 선정된다. 즉, 절점사이의 간격을 등간격으로 배열하기 때문에 요소의 차수를 n 이라고 하면 모서리에서 j 번째 절점의 위치는 다음과 같이 선정된다.

$$t_j = 2\left(\frac{j-1}{n}\right) - 1 \quad (7)$$

$$n = m - 1 \quad (8)$$

단, j 는 p, q, r 그리고 t 는 ξ, η, ζ 로 표현된다. 앞에서 언급한 바와 같이 실제요소의 내부절점들이 그 위치에 관계없이 사상된 요소에서는 Fig. 2와 식 (6)과 같이 규칙적으로 배열되기 때문에 식 (3)으로 정의한 자코비안 값이 불안정해지고 경우에

따라서는 영 또는 음의 값을 갖게 되어 해석이 불가능한 경우가 된다. 또한 자코비안 값이 양이 되는 경우에 있어서도, 내부절점의 위치에 따라서 자코비안 값이 불안정하게 될수 있고, 이로 인하여 해석결과에 오차를 유발하게 된다. 따라서, 현재 사용되고 있는 요소 자동분할 알고리즘에서는 이와 같은 오차를 없애기 위하여 실제요소에서의 내부절점 위치를 다음과 같이 자동적으로 선정하고 있다.

$$\mathbf{x}_j = \frac{(n+1-j)\mathbf{x}_1 + (j-1)\mathbf{x}_m}{n} \quad (9)$$

식 (7), (8), (9)의 조건을 만족할 때 각 모서리를 따른 자코비안 값은 상수로 일정한 값을 갖게 된다.

예를 들어서 일차원요소인 경우에 자코비안은

$$J \equiv \frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{d\phi_i}{d\xi} \quad (10)$$

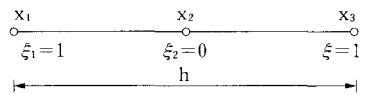
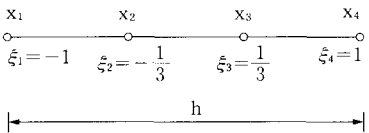
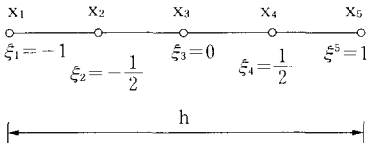
로 정의된다. 이 값은 Table 1에서 알 수 있는 바와 같이 항상 일정한 값이 되며, 여기서, h 는 요소의 길이를 의미한다.

따라서 식 (7)과 (9)에 의하여 요소의 내부절점 위치가 선정될 때, 이 요소의 해석오차를 없앨 수 있는 최적위치를 생각할 수 있다.

2.3 내부절점의 위치선정법

실제요소의 내부절점위치가 식 (9)로 표현한 최적위치에서 벗어나면 식 (3)의 자코비안 값이 불안정해져서 해석결과에 오차를 유발한다. 이와 같은 원인은 등매개 사상(isoparametric mapping)이 결국 등각사상(conformal mapping)이 되지 못하기 때문이며, 이를 해결하기 위하여 다음과 같은 방안을 생각할 수 있다. 즉, 사상된 요소에서의 내부절점의 위치를 식 (7)과 같이 규칙적인 등간격으로

Table 1 J-value of 1-d isoparametric elements with internal nodes optimally positioned

Order of mapping function	x_i	ϕ_i	J
$n=2, m=3$ 	$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$	$\phi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$ $\phi_2 = 1-\xi^2$ $\phi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$	$\frac{h}{2}$
$n=3, m=4$ 	$x_2 = \frac{1}{3}(2x_1 + x_4)$ $x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_4)$	$\phi_1 = -\frac{9}{16}(1-\xi)(\frac{1}{9}-\xi^2)$ $\phi_2 = \frac{27}{16}(1-\xi^2)(\frac{1}{3}-\xi)$ $\phi_3 = \frac{27}{16}(1-\xi^2)(\frac{1}{3}+\xi)$ $\phi_4 = -\frac{9}{16}(1+\xi)(\frac{1}{9}-\xi^2)$	$\frac{h}{2}$
$n=4, m=5$ 	$x_2 = \frac{1}{4}(3x_1 + x_5)$ $x_3 = \frac{1}{4}(2x_1 + 2x_5)$ $x_4 = \frac{1}{4}(x_1 + 3x_5)$	$\phi_1 = \frac{4}{6}\xi(1-\xi)(\frac{1}{4}-\xi^2)$ $\phi_2 = -\frac{8}{3}\xi(1-\xi^2)(\frac{1}{2}-\xi)$ $\phi_3 = 4(1-\xi^2)(\frac{1}{4}-\xi^2)$ $\phi_4 = \frac{8}{3}\xi(1-\xi^2)(\frac{1}{2}+\xi)$ $\phi_5 = \frac{4}{6}\xi(1+\xi)(\frac{1}{4}-\xi^2)$	$\frac{h}{2}$

선정하지 않고 실제요소의 내부절점 위치에 상당하도록 취하는 방법이다.

일차원요소인 경우에 식 (10)으로 표현한 자코비안은 n 차 형상함수에 대하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$J = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \dots + A_{n-1}\xi^{n-1} \quad (11)$$

단, $A_0 \dots A_{n-1}$ 등은 임의의 상수들이다. 그러므로 자코비안 값이 항상 양의 값을 가지려면

$$A_0 > 0$$

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} = 0 \quad (12)$$

의 조건을 만족해야 한다. 이 조건식으로부터 사상된 요소의 내부절점위치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi_i = 2\left(\frac{x_i - x_1}{h}\right) - 1, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (13)$$

사상된 요소의 내부절점의 위치가 식 (13)에 의해서 선정될 때 자코비안 값은 $h/2$ 로서 일정하게 되고 내부절점위치는 실제요소와 사상요소에서 선형

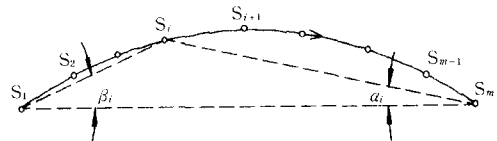


Fig. 3 Relation of arc length and edge angle

비례적으로 취할 수 있음을 보인다.

식 (12)의 결과를 일차원요소인 경우에 제한하여 표현하였으나, 이 식이 요소의 모서리에서 성립한다고 가정하면 이차원 및 삼차원 요소에 일반적으로 적용할 수 있다. 즉, ξ 대신에 \mathbf{t} , \mathbf{x} 대신에 \mathbf{x} 로 표기하여 요소의 각 모서리로 일반화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{t}_i = 2\left(\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1}{h}\right) - 1, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (14)$$

요소의 모서리가 곡선인 경우에 식 (14)의 길이, h 는 곡선길이를 의미하고, 이를 정확히 계산하기 위해서는 비선형방정식을 풀어야 하므로 매우 복잡하다. 그러나 대부분의 요소분할에 있어서 곡선 모

서리를 곡률 반지름이 큰 원호라고 보아도 무방할 때가 많기 때문에 곡선길이를 직접 구하지 않고, 모서리 절점들간의 사이각으로부터 내부절점의 최적위치를 구할 수 있다. Fig. 3은 모서리가 곡선인 실제요소에서 절점들간의 사이각을 도식한 것이다.

Fig. 3에서 s_1, \dots, s_m 은 실제요소의 좌표값이고, $\angle \alpha_i, \angle \beta_i$ 는 각각 i 번째 내부절점과 양끝 절점과의 사이각으로 다음의 비례관계가 성립한다.

$$\text{arc}(s_1s_i) : \text{arc}(s_1s_m) = \angle \alpha_i : \angle \beta_i \quad (15)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \frac{x_i - x_1}{h} &= \frac{\text{arc}(s_1s_i)}{\text{arc}(s_1s_m)} = \frac{\text{arc}(s_1s_i)}{\text{arc}(s_1s_i) + \text{arc}(s_1s_m)} \\ &= \frac{\angle \alpha_i}{\angle \alpha_i + \angle \beta_i} \end{aligned} \quad (16)$$

의 관계가 성립되며, 모서리가 곡선일 경우 사상된 요소에서 내부절점의 최적위치를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$t_i = 2 \left(\frac{\angle \alpha_i}{\angle \alpha_i + \angle \beta_i} \right) - 1, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (17)$$

이와 같이 내부절점의 최적위치를 선정함으로써 실제요소와 사상된 요소사이에 등각사상을 유지시

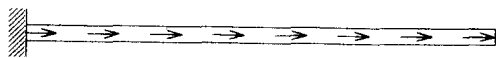


Fig. 4 Bar under axial tractions

킬 수 있으며, 식 (10)의 자코비안이 양의 값으로 일정해 진다.

3. 수치실험 및 검토

본 논문에서 제안한 수정 형상함수의 타당성을 검증하기 위하여 다음과 같은 세개의 서로 다른 해석 모델을 선택하였다.

3.1 일차원 모델

Fig. 4는 일차원 등분포하중을 받고 있는 봉을 도식하였다. 3절점 등매개 변수요소에 기존의 형상함수와 수정 형상함수를 사용하여 해석결과를 비교 검토 하였다.

기존의 형상함수와 본 논문에서 제안하는 수정 형상함수를 사용하여 내부절점이 Table 2와 같이 위치하는 경우에 대하여 해석하고, 그 결과를 Table 3과 Fig. 5에 도식하였다. Table 3과 Fig. 5는 자유단 끝단에서의 변위를 엄밀해로 무차원화시켜 비교한 것이다. 여기서, Model 1은 모든 내부절점이 최적위치에 있는 경우이고, Model 2는 모든 내부절점이 최적위치에서 약간 벗어난 경우이며, Model 3은 모든 내부절점이 크게 벗어나서 기존 방법으로는 해석할 수 없는 경우이다.

기존의 형상함수를 사용할 경우 Fig. 5(a)에서

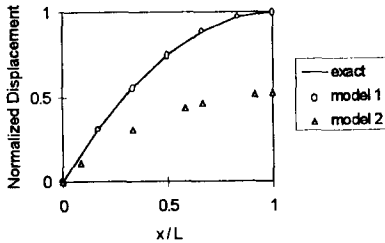
Table 2 Bar modeled by 3-node elements with positionally varied internal nodes

Model	Description	Location of internal nodes
1	All internal nodes are located in optimal position	
2	All internal nodes are located in non-optimal position	
3	All internal nodes are located in non-optimal position where can not be solved by conventional method	

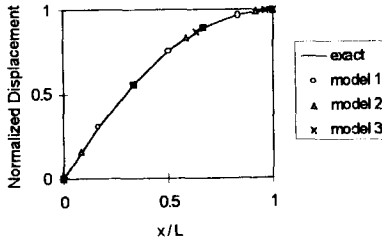
Table 3 Normalized max. displacement for the bar model

Model	Conventional method	Proposed method	Exact
1	1.00000	1	1
2	0.52384	1	1
3	-	1	1

럼 내부절점이 최적위치에서 벗어나면 해의 정확도가 현저하게 감소하는 것을 볼수 있으며, 특히 Model 3일 경우에는 해를 구하지 못한다. 그러나 수정된 형상함수를 사용하므로써 Fig. 5(b)와 같이



(a) Displacement by the conventional method



(b) Displacement by the proposed method

Fig. 5 Displacement comparison on the bar model

Model 1~3 모두 동일한 정확도를 갖는 해석 결과를 얻을 수 있다.

3.2 이차원 모델

3.2.1 사각형요소

Fig. 6은 집중하중을 받고 있는 이차원 외팔보 문제이다. 8절점 등매개 변수요소로 기존의 형상함수와 수정 형상함수를 사용하여 얻은 해석결과를 비교 검토하였다.

Table 4와 같이 내부절점위치를 변화시켜 해석한 결과를 Table 5, Figs. 7, 8에 도시하였다. 이들 결과는 하중작용점의 변위를 엄밀해로서 무차원화시켜 비교한 것이다. 기존의 형상함수를 사용할 경우 Fig. 7(a)에서와 같이 내부절점이 최적위치에서 벗어나면 해의 정확도가 크게 감소하지만, 수정 형상함수를 사용하므로써 Fig. 7(b)와 같이 Models



Fig. 6 Two dimensional cantilever

Table 4 Cantilever modeled by 8-node elements with positionally varied internal nodes

Model	Description	Location of internal nodes
1	All internal nodes are located in optimal position	
2	All internal nodes are located in non-optimal position	
3	All internal nodes are located in non-optimal position where can not be solved by conventional method	

Table 5 Normalized max. deflection for the cantilever model

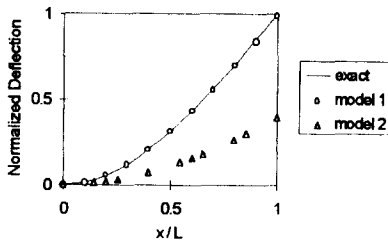
Model	Conventional method	Proposed method	Exact
1	0.98895	0.98895	1
2	0.39252	0.98895	1
3	-	0.98895	1

Table 6 Cantilever modeled by 9-node elements with positionally varied internal nodes

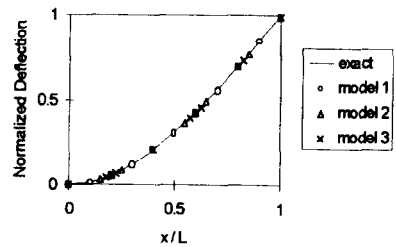
Model	Description	Location of internal nodes
1	All internal nodes are located in optimal position	
2	All internal nodes are located in non-optimal position	
3	All internal nodes are located in non-optimal position where can not be solved by conventional method	

Table 7 Normalized max. deflection for the cantilever model with 9-node elements

Model	Conventional method	Proposed method	Exact
1	0.997941	0.997941	1
2	0.629643	0.997941	1
3	-	0.997941	1

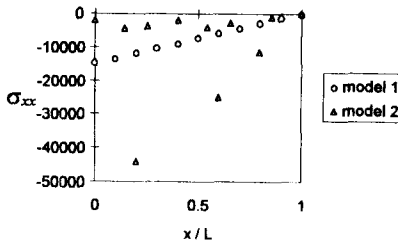


(a) Deflection by the conventional method

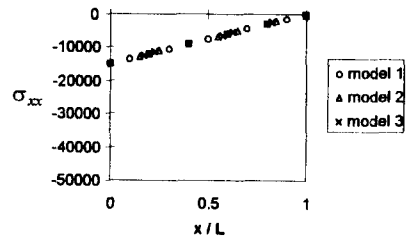


(b) Deflection by the proposed method

Fig. 7 Deflection comparison on the cantilever model



(a) Stress by the conventional method

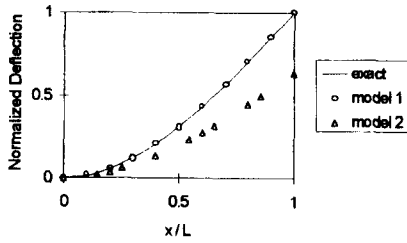


(b) Stress by the proposed method

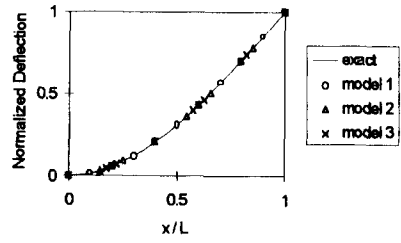
Fig. 8 Stress comparison on the cantilever model with 8-node elements

1~3은 모두 같은 정확도의 해석결과를 얻을 수 있다.

Fig.8은 축방향의 절점응력값을 비교한 것이다. 기존의 형상함수를 사용하여 해석한 결과는 응력값



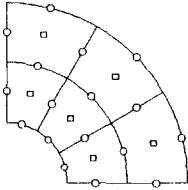
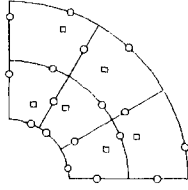
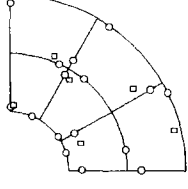
(a) Deflection by the conventional method



(b) Deflection by the proposed method

Fig. 9 Deflection comparison on the cantilever model with 9-node elements

Table 8 Pinched ring plate modeled by 9-node elements with positionally varied internal nodes

Model	Description	Location of internal nodes
1	All internal nodes are located in optimal position	
2	All internal nodes are located in non-optimal position	
3	All internal nodes are located in non-optimal position where can not be solved by conventional method	

이 심하게 변동하는 것을 볼 수 있으나 수정 형상 함수를 사용하여 해석한 경우에는 균일하고 안정된 응력값을 얻을 수 있다.

Fig. 6과 같은 집중하중을 받고 있는 이차원 외팔보 문제를 9절점 등매개 변수요소로 모델링하고, 기존의 형상함수와 수정 형상함수를 사용하여 해석한 결과를 비교 검토하였다.

Table 6과 같이 내부절점과 면내절점의 위치를 여러가지로 변화시켜 해석하였으며, 그 결과를 Table 7과 Fig. 9에 도시하였다.

Table 7과 Fig. 9는 기존의 형상함수와 수정된 형상함수를 사용하여 구한 하중작용점의 변위를 얻

밀해로서 무차원화시켜 도시한 것이다.

앞에서 검토한 8절점 요소의 경우와 비교하면 Table 7과 Fig. 9에서 알 수 있듯이 정확도는 다소 증가하지만 내부와 면내절점의 위치에 따라서 해가 불안정해지는 경향은 비슷하다. 그러나 수정된 형상함수를 사용함으로써 이러한 문제점을 개선할 수 있으며 매우 안정되고 일관된 해를 얻을 수 있다.

3.2.2 곡선경계요소

Fig. 10은 집중하중을 받고 있는 동심 평판을 도시한 것이다. 9절점 등매개 변수요소로 기존의 형상함수와 수정 형상함수를 사용하여 해석결과를 비교 검토 하였다.

Table 8과 같이 내부절점의 위치를 변화시켜 해석하였으며, 그 결과를 Table 9와 Fig. 11에 도시하였다. 이들 결과는 하중이 작용하는 지점에서 내부절점과 면내절점이 최적위치에 있는 경우의 값으로써 무차원화시켜 비교한 것이다.

해석결과는 Table 9와 Fig. 11에서 알 수 있듯이 앞의 예제와 같은 경향을 나타내고 있어서 곡선요소에서도 수정 형상함수의 타당성을 보인다.

Table 10은 단조공정의 시뮬레이션(simulation)을 보인다. 재료를 8절점 등매개요소로 분할하고, 수정 형상함수를 사용하였다. 요소의 형상이 심하게 찌그러짐을 발견할 수 있으며, 이에 따라서 내

부절점의 위치도 최적위치에서 벗어나게 되어 기존의 형상함수를 사용하면 많은 오차가 발생하거나

Table 10 Node movements during the simulation of a metal forming process

Reduction of height	Deformed shape
0 % (Initial mesh)	
20%	
40%	
60%	

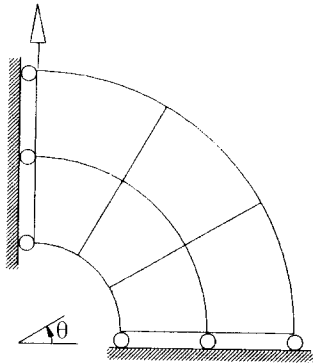
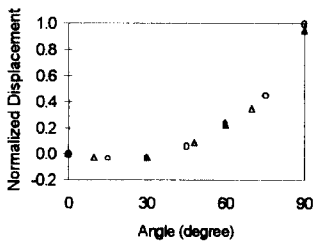


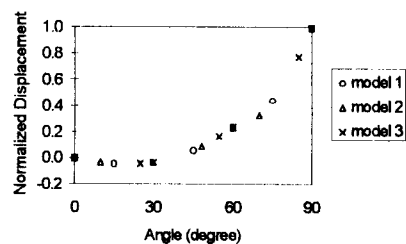
Fig. 10 Two dimensional pinched ring plate model

Table 9 Normalized max. displacement for the pinched ring

Model	Conventional method	Proposed method
1	1.000000	1.000000
2	0.949179	0.999261
3	-	1.001748



(a) Displacement by the conventional method



(b) Displacement by the proposed method

Fig. 11 Displacement comparison on the pinched ring plate model with 9-node elements

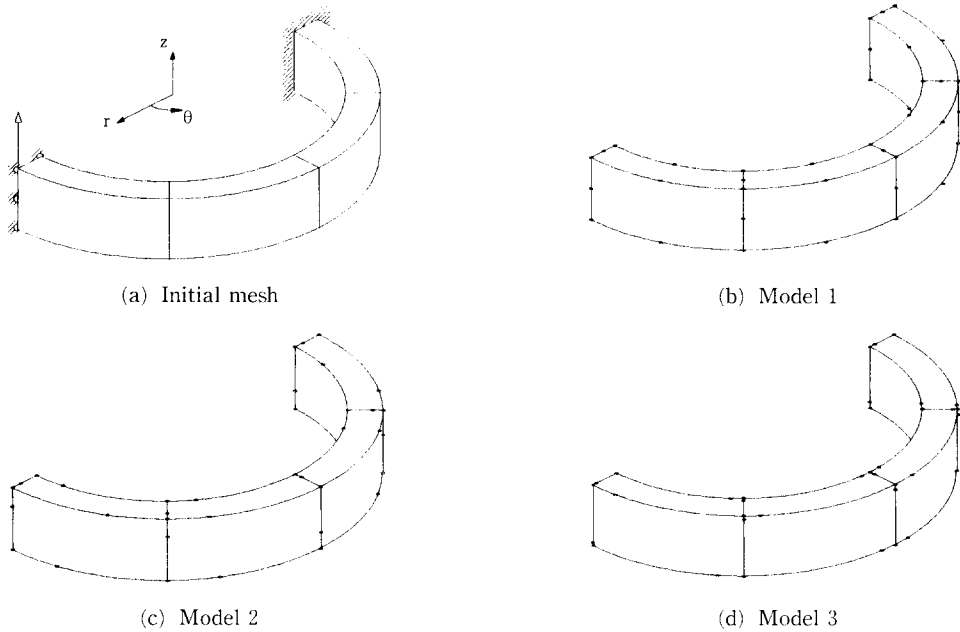


Fig. 12 Semi-spring modeled by 20-node elements with positionally varied internal nodes

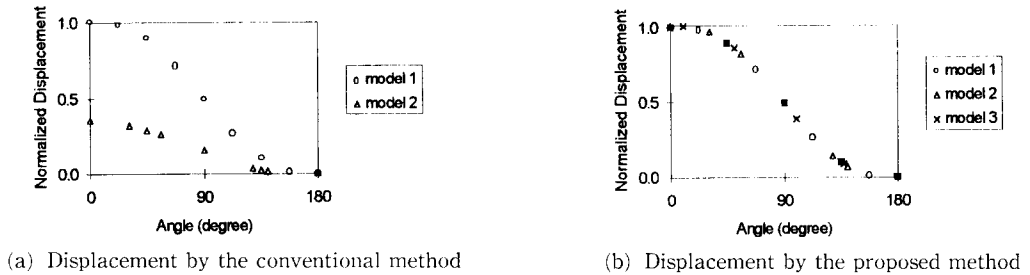


Fig. 13 Displacement comparison on the semi-spring model with 20-node elements

Table 11 Normalized max. displacement for the semi-spring

Model	Conventional method	Proposed method
1	1.00000	1.00000
2	0.34790	1.00223
3	-	0.99909

해석이 불가능하게 된다.

3.3 삼차원 모델

Fig. 12는 집중하중을 받고 있는 반스프링 구조물을 도시한 것이다. 20절점 등매개 변수요소에 기존의 형상함수와 수정 형상함수를 사용하여 해석 결과를 비교 검토하였다.

Fig. 12(b), (c), (d)와 같이 내부절점의 위치를 변화시켜 해석하였으며, 그 결과를 Table 11과 Fig. 13에 도시하였다. 이들 결과는 하중이 작용하는 지점에서 내부절점이 최적위치에 있는 경우의 값으로써 무차원화시켜 비교한 것이다.

해석결과는 Table 11과 Fig. 13에서 알수 있듯이, 이차원 예제와 같은 경향을 나타내고 있어서

삼차원요소에서도 수정 형상함수의 타당성을 보인다.

4. 결 론

이차 이상의 형상함수를 사용하는 고차의 등매개 요소에서 내부절점의 위치에 따른 해석결과와 불안정성을 연구하였다. 내부절점이 최적위치에서 벗어나면서 발생하는 해의 정확도 감소와 해를 구하지 못하는 범위가 존재하는 원인이 좌표계 사이의 사상관계에 있음을 규명하고 이를 해결하기 위하여 수정 형상함수를 제안하였다. 제안된 수정 형상함수의 타당성을 검증하기 위하여 여러가지 선형탄성 문제와 소성문제에 적용하여 해석하고 그 결과를 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 논문에서 제안한 수정 형상함수를 사용하면 내부절점의 위치에 무관하게 안정되고 일관된 해를 얻을 수 있다.

(2) 고차요소로 분할할 때 내부절점의 위치를 기하학적인 형상만을 고려하여 선정할 수 있기 때문에 모델링이 간편하다.

참고문헌

(1) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The*

Finite Element Method—Basic Formulation and Linear Problems, 4rd edn, McGraw-Hill.

(2) Reddy, J. N., 1993, *An Introduction to The Finite Element Method*, McGraw-Hill.

(3) Celia, M. A. and Gray, W. G., 1984, "An Improved Isoparametric Transformation for Finite Element Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 1443~1459.

(4) Lee, N. S. and Bathe, K. J., 1993, "Effects of Element Distortions on The Performance of Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3553~3576.

(5) Henshell, R. D. and Shaw, K. G., 1975, "Crack Tip Finite Elements Are Unnecessary," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 495~507.

(6) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 337~357.