

<논 문>

하중과 변위의 동시제어에 의한 좌굴후 현상해석

권영두* · 임범수**박 철*** · 최진민****

(1997년 4월 22일 접수)

Post-buckling Analysis Using A Load-Displacement Control

Y. D. Kwon, B. S. Lim, C. Park and J. M. Choi

Key Words : Post-buckling Phenomena(좌굴후 현상), Snap-Back Phenomena(스냅-백 현상), Incremental Load Parameter(하중증분계수), Incremental Displacement Parameter(변위증분계수), Relaxation Factor(이완계수), Relaxation Method(이완법)

Abstract

A new load/displacement parameter method is developed for the cases that loads are applied to one or more points, and displacements of a structure are controlled at one or more points simultaneously. The procedure exploits a generalized Riks method, which utilizes load/displacement parameters as scaling factors in order to analyze the post-buckling phenomena including snap-through or snap-back. A convergence characteristic is improved by employing new relaxation factors in incremental displacement parameter, particularly at the region where exhibits severe numerical instability. The improved performance is illustrated by means of numerical example.

기 호 설 명

β_1, β_2 : 이완계수

- $[{}^{t+\Delta t}K$: $t + \Delta t$ 시간에서의 강성행렬
- $\Delta\mu$: 변위증분계수
- $\Delta\lambda$: 하중증분계수
- u^* : 변위변환계수
- p^* : 하중변환계수
- x^* : 변위/하중비
- $\{U\}$: 변위벡터
- $\{\Delta U\}$: 변위증분벡터
- $\{\Delta P\}$: 하중증분벡터
- $\{P\}$: 외부하중벡터
- $\{F\}$: 등가 절점력벡터
- $\{t\}$: 접선벡터

1. 서 론

대변위 문제의 유한요소해석은 비선형 문제로써 극한점에 도달하기 전까지의 비선형 수치해석법은 많은 연구가 이루어져 왔으며, Newton-Raphson 방법이 매우 효과적인 것으로 알려져 있다. 그러나 이러한 방법에서는 극한점에 도달하면 매우 큰 변위가 발생되어 해가 수렴하지 않고 발산할 가능성이 매우 크므로 극한점 이후의 해석이 거의 불가능하고, 특히 snap back과 같은 snap buckling 현상이 발생하면 해를 구하는 것이 더욱 어려워진다.

이러한 좌굴후 문제의 해석방법이 여러 연구자들에 의해 시도되었으며,⁽¹⁻³⁾ Riks⁽⁴⁾에 의해서 제안된 일정호장법(constant arc-length method)이 Crisfi-

*회원, 경북대학교 기계공학부

**회원, 국방과학연구소 4-3-4

***회원, 대우기전공업(주) 기술연구소

****회원, 한국기계연구원

eld의 방법⁽⁵⁾과 더불어 대표적인 것으로 잘 알려져 있다. 일정호장범은 최근까지 여러 가지 방향으로 수정 발전되어 왔고,^(6~8) 국내에서도 이러한 연구가 이루어져 왔다.⁽⁹⁾

그러나 Riks 방법은 하중증분방식에 근거를 두고 있기 때문에 여러점에서 변위가 제어되거나 하중과 변위가 동시에 제어되는 문제에는 적용이 곤란하므로 저자들은 이전의 연구⁽¹⁰⁾에서 여러 점에서의 변위제어문제는 해석 방안을 제시하였으나 하중과 변위가 동시에 제어되는 문제는 아직 체계적인 해석방법을 찾지 못했다. 또한 변곡점 근처 혹은 변위의 증가에 비해 하중이 급격히 변하는 부분에서 해석이 불안정해지는 경향이 있거나 계산시간이 많이 소요되므로 수렴성 및 해의 안정성을 향상시키기 위한 개선이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 좌굴후 현상해석을 위한 Riks의 일정호장범을 검토하고, Riks 방법을 단간으로 하여 하중과 변위가 동시에 제어되는 문제에 대한 새로운 해석방법으로 “하중/변위 파라미터법”을 제시하였으며, 변곡점 근처에서의 수치계산의 효율성과 수렴속도를 개선하기 위한 새로운 평형점 근방방법으로, 두 가지의 이완계수(relaxation factor)를 도입하여 새롭게 수정된 변위증분계수를 이용한 “이완법(relaxation method)”을 제안하였다. 수치해석 예제로 간단한 일단지지 외관보 모델을 통해 하중과 변위가 동시에 제어되는 문제에 대한 해석방법의 타당성을 보였고, snap-through 현상 및 snap-back 현상의 대표적인 문제인 직각프레임(right angle frame)을 사용하여 하중과 변위가 동시에 제어되는 문제에 대해 이완법을 적용하였을 때 변위-하중비와 이완계수를 변화시키면서 해의 수렴속도를 비교하였다.

2. 좌굴후 현상의 수치해석방법

좌굴후 현상에 대한 해석은 일반적으로 하중계수(변위제어식)를 사용하여 Newton-type 방법으로 수행된다. 한편 snap 현상을 포함하는 문제를 해석하기 위해서는 이들 Newton-type 방법을 수정하여 사용해야 하며, 대표적인 것으로 Riks의 일정호장범(normal plane constraint)과 Crisfield의 일정호장범(spherical constraint)이 있다.

본 연구에서는 Riks의 일정호장범(constant arc-length method)을 근간으로 하중과 변위가 동시

에 제어되는 문제에 대한 새로운 수식을 유도하고 두 개의 이완계수를 도입한 이완법을 제안하였다.

2.1 Riks의 일정호장범

Riks에 의해 제안되고 Simo 등에 의해 발전된 강성행렬의 대칭성을 유지하는 하중증분형 호장범(arc-length control)은 호길이구속조건(arc-length-constraint)에 의해 해가 구해진다. Fig. 1은 Riks에 의해 제안된 호장범을 간략히 그림으로 나타낸 것이다.

증분이 시작되는 하중-변위 곡선상의 점선벡터를 $\{t\}^{(1)}$ 이라 하면, 이것은 식 (1)과 같이 표시된다.

$$\{t\}^{(1)} = [\{\Delta U\}^{(1)T} ; \Delta \lambda^{(1)T}]^T \quad (1)$$

여기서, $\{\Delta U\}^{(1)} = \Delta \lambda^{(1)} \{\Delta U\}^{(0)}$ 이고, $\Delta \lambda^{(1)}$ 는 하중증분계수를 나타내며, $k \geq 2$ 일 때 증분벡터 $\{\Delta \gamma\}^{(k)}$ 는 식 (2)로 표시된다.

$$\{\Delta \gamma\}^{(k)} = [\{\Delta U\}^{(k)T} ; \Delta \lambda^{(k)T}]^T \quad (2)$$

Riks 방법의 구속조건식은 식 (3)과 같다.

$$\{t\}^{(1)T} \{\gamma\}^{(k)} = S_0^2 \quad (3)$$

여기서, $\{t\}^{(1)}$ 은 점선벡터, S_0 는 점선방향으로 투영된 호의 법선길이를 나타내며, $\{\gamma\}^{(k)}$ 는 전체 증분벡터로서 식 (4)와 같다.

$$\{\gamma\}^{(k)} = \{t\}^{(1)} + \sum_{n=2}^k \{\Delta \gamma\}^{(n)} \quad (4)$$

식 (3)은 계산의 효율성을 위하여 다음의 두단계로 나누어 진행할 수 있다

$k=1$: 증분이 시작되는 첫번째 반복계산에서

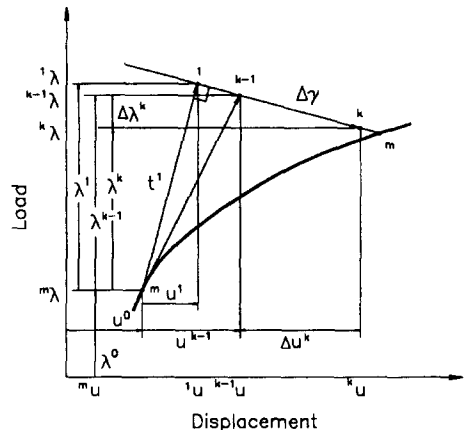


Fig. 1 Basic notation of Riks method

일정호길이 구속조건 (constant arc-length constraint) 은 식 (5)와 같다.

$$\{t\}^{(1)T}\{t\}^{(1)} = S_0^2 \quad (5)$$

식 (1)을 이용하여 식 (5)를 풀어쓰면 식 (6)과 같다.

$$\Delta\lambda^{(1)}\Delta\lambda^{(1)}\{\Delta U\}^{(0)T}\{\Delta U\}^0 + \Delta\lambda^{(1)}\Delta\lambda^{(1)} = S_0^2 \quad (6)$$

여기서, 하중증분계수 $\Delta\lambda^{(1)}$ 를 구하면 식 (7)과 같다.

$$\Delta\lambda^{(1)} = \left\{ \frac{S_0^2}{\{\Delta U\}^{(0)T}\{\Delta U\}^{(0)} + 1} \right\}^{1/2} \quad (7)$$

$k \geq 2$: 식 (5)는 첫번째 단계 ($k=1$)에서만 사용할 수 있고, $k \geq 2$ 이면 구속조건은 법선평면구속조건 (normal plane constraint)을 사용하고, 이것은 식 (8)과 같이 정의된다.

$$\{t\}^{(1)T}\{\Delta\gamma\}^{(k)} = 0 \quad (8)$$

식 (1), 식 (2)를 식 (8)에 대입하면 식 (9)가 얻어진다.

$$\{\Delta U\}^{(1)T}\{\Delta U\}^{(k)} + \Delta\lambda^{(1)}\Delta\lambda^{(k)} = 0 \quad (9)$$

식 (9)의 구속조건을 계의 방정식에 직접 사용하면 비대칭 강성행렬 (non-symmetric stiffness matrix)이 생기게 된다. 이것을 해결하기 위해 다음과 같이 유한요소 평형식을 두 부분으로 나누어 계산한다. 이때 유한요소 평형식은 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} [K]^{(k-1)}\{\Delta U\}^{(k)} &= \Delta\lambda^{(k)}\{P\} + (\pi\lambda + \lambda^{(k-1)})\{P\} \\ &\quad - \{F\}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

m : 증분단계수

k : 현재 증분단계 ($m+1$)에서 반복횟수

$[K]^{(k-1)}$: $k-1$ 증분단계에서의 접선강성행렬

$\pi\lambda$: m 증분단계까지의 전체 하중증분계수

$\lambda^{(k-1)}$: 현재 증분단계 ($m+1$)에서 $k-1$ 반복 단계까지의 하중증분계수

$\Delta\lambda^{(k)}$: 현재 증분단계 ($m+1$)에서 k 반복 단계의 하중증분계수

$\{U\}^{(k)}$: 현재 증분단계 ($m+1$)에서 k 반복 단계까지의 변위벡터

$\{\Delta U\}^{(k)}$: 현재 증분단계 ($m+1$)에서 k 반복 단계의 변위증분벡터

$\{P\}$: 단위 외부하중벡터

$\{F\}$: 등가 절점력벡터

변위증분 $\{\Delta U\}^{(k)}$ 를 식 (11)과 같이 두 부분으로 분리시켜 평형식 (10)에 대입하면 식 (12)와 식 (13)으로 나누어 계산을 수행할 수 있다.

$$\{\Delta U\}^{(k)} = \Delta\lambda^{(k)}\{\Delta U_I\}^{(k)} + \{\Delta U_{II}\}^{(k)} \quad (11)$$

$$[K]^{(k-1)}\{\Delta U_I\}^{(k)} = \{P\} \quad (12)$$

$$[K]^{(k-1)}\{\Delta U_{II}\}^{(k)} = (\pi\lambda + \lambda^{(k-1)})\{P\} - \{F\}^{(k-1)} \quad (13)$$

두 부분으로 나누어진 변위증분 식 (11)을 식 (9)에 대입하면 k 번째의 반복된 하중증분계수 $\Delta\lambda^{(k)}$ 와 같이 구해진다.

$$\Delta\lambda^{(k)} = - \frac{\{\Delta U\}^{(1)T}\{\Delta U_{II}\}^{(k)}}{\{\Delta U\}^{(1)T}\{\Delta U_I\}^{(k)} + \Delta\lambda^{(1)}} \quad (14)$$

여기서, 변위 및 하중 변환계수 (scale factor) u^* 와 p^* 를 사용하여 식 (7)과 식 (14)를 다시 쓰면 각각 식 (15), 식 (16)으로 표현될 수 있다.

$$\Delta\lambda^{(1)} = \left\{ \frac{S_0^2}{\{\Delta U_s\}^{(0)T}\{\Delta U_s\}^{(0)} + M/p^{*2}} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

$$\Delta\lambda^{(k)} = - \frac{\{\Delta U_s\}^{(1)T}\{\Delta U_{II_s}\}^{(k)}}{\{\Delta U_s\}^{(1)T}\{\Delta U_I\}^{(k)} + \Delta\lambda^{(1)}/p^{*2}} \quad (16)$$

여기서,

$$\{\Delta U_s\}^{(1)} = \{\Delta U\}^{(1)}/u^*$$

$$\{U_{Is}\}^{(k)} = \{U_I\}^{(k)}/u^*$$

$$\{\Delta U_{II_s}\}^{(k)} = \{\Delta U_{II}\}^{(k)}/u^*$$

$$M = 1 \text{ 또는 } D.O.F/3$$

이고, 변환된 변위를 나타낸다. M 값은 D. O. F/3을 사용하면 안정된 계산을 할 수 있다.

2.2 하중작용 및 변위제어조건이 동시에 주어지는 문제: 하중/변위 파라미터법

임의의 점에서 변위제어조건이 주어지고, 동시에 다른 임의의 점에서는 하중이 작용하는 문제에서는 기존의 하중파라미터법이나 변위파라미터법으로는 해석이 곤란하므로 본 논문에서는 하중과 변위 파라미터 사이의 새로운 상관관계를 유도하였다. 식 (17)과 같이 편의상 p , q 점에서 변위가 제어되고, i , j 점에서 하중이 작용하는 문제를 생각한다.

$$\begin{aligned} \{U\} &= \{\bar{U}\}, \quad (U_p = \bar{U}_p, \quad U_q = \bar{U}_q) \\ \{P\} &= \{\bar{P}\}, \quad (P_i = \bar{P}_i, \quad P_j = \bar{P}_j) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $\{\bar{U}\}$, $\{\bar{P}\}$ 는 각각 구속된 변위 및 하중들

의 상호관계를 나타내고, p , q 점을 제외한 점들의 변위는 미지값이며, i , j 점 이외의 점들에 대한 하중은 영(0) 또는 미지값이다. 하중·변위곡선상의 일점에서 접선방향의 벡터 $\{t\}^{(1)}$ 은 식 (18)과 같이 변위증분 및 하중증분으로 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \{t\}^{(1)} &= [\{\Delta U_D\}^{(1)T}; \{\Delta U_E\}^{(1)T}; \\ &\quad \{\Delta P_D\}^{(1)T}; \{\Delta P_L\}^{(1)T}]^T \\ &= [\{\Delta U\}^{(1)T}; \{\Delta P_D\}^{(1)T}; \{\Delta P_L\}^{(1)T}]^T \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, D 는 변위가 제어되는 점, L 은 하중이 제어되는 점에 대한 것이고 E 는 변위가 제어되는 점 이외의 점에 대한 것이다. 변위 및 하중은 식 (19), 식 (20)과 같이 각각 변환된 양(scaled quantity)으로 표시할 수 있다.

$$\{U_s\} = \{U\}/u^* \quad (19)$$

$$\{P_s\} = \{P\}/p^* \quad (20)$$

변환된 변위증분벡터 $\{\Delta U_s\}^{(1)}$ 은 변위증분계수 $\Delta\mu^{(1)}$ 을 사용하여, 식 (21)과 같이 표시될 수 있다.

$$\{\Delta U_s\}^{(1)} = \Delta\mu^{(1)}\{U_s\}^{(0)} \quad (21)$$

여기서, $\{U_s\}^{(0)} = \{U\}^{(0)}/u^*$ 이고, $\{U\}^{(0)}$ 는 구조물에서 변위가 제어되는 점의 변위간의 비율 나타내는 변위비벡터로 식 (22)에서 구해진다.

$$\begin{aligned} &([\mathbf{t} + \mathbf{d}^t \mathbf{K}]^{(0)} + \alpha[\mathbf{D}_I])\{U\}^{(0)} \\ &= \alpha[\mathbf{D}_I]\{\bar{U}\} + \chi^*\{\bar{P}\} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$$\alpha \gg K_{ii}$$

$[\mathbf{D}_I]$: 단위 대각선행렬(unit diagonal matrix)

$$\{\bar{U}\} = \{\dots \bar{U}_p \dots \bar{U}_q \dots\}^T, \quad \bar{U}_p = 1$$

p , q : 변위제어점의 자유도이고, 명시되지 않은 곳의 변위는 미지임

χ^* : $\{\bar{U}\}$ 에 대응되는 하중의 크기

또한, $\{\Delta U_{Ds}\}^{(1)}$ 에 대응하는 변환된 등가 절점력 벡터 $\{\Delta P_{Ds}\}^{(1)}$ 은 식 (23)으로 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)} &= \Delta\mu^{(1)}\{P_{Ds}\}^{(0)} \\ &= \Delta\mu^{(1)}\{P_D\}^{(0)}/p^* \\ &= \Delta\mu^{(1)}[\mathbf{t} + \mathbf{d}^t \mathbf{K}]^{(0)}\{U\}^{(0)}/p^* \end{aligned} \quad (23)$$

한편, 변환된 하중증분벡터 $\{\Delta P_{Ls}\}^{(1)}$ 은 하중증분계수 $\Delta\lambda$ 와 하중변환계수 p^* 를 이용하여 식 (24)와 같이 표시될 수 있다.

$$\{\Delta P_{Ls}\}^{(1)} = \Delta\lambda^{(1)}\{P_{Ls}\}^{(0)}$$

$$= \Delta\mu^{(1)}\chi^*\{P_L\}^{(0)}/p^* \quad (24)$$

여기서, $\chi^* = \Delta\lambda/\Delta\mu$ 로 표시되며 하중증분과 변위증분 사이에 만족되어야 할 비를 나타낸다. 따라서 변환된 하중·변위곡선상의 일점에서의 접선벡터 $\{t_s\}^{(1)}$ 은 식 (25)와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \{t_s\}^{(1)} &= [\{\Delta U_{Ds}\}^{(1)T}; \{\Delta U_{Es}\}^{(1)T}; \\ &\quad \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)T}; \{\Delta P_{Ls}\}^{(1)T}]^T \\ &= [\{\Delta U_s\}^{(1)T}; \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)T}; \{\Delta P_{Ls}\}^{(1)T}]^T \end{aligned} \quad (25)$$

$k=1$: 증분이 시작되는 첫번째 반복계산에서 일정호길이 구속조건(constantarc-length constraint)은 식 (26)과 같다.

$$\{t_s\}^{(1)T}\{t_s\}^{(1)} = S_{0s}^2 \quad (26)$$

식 (25)를 식 (26)에 대입하여, 반복단계 $k=1$ 에서의 변위증분계수 $\Delta\mu^{(1)}$ 을 구하면, 식 (27)과 같이 된다.

$$\Delta\mu^{(1)} = \left[\frac{S_{0s}^2}{\{\bar{U}_s\}^{(0)T}\{\bar{U}_s\}^{(0)} + \{\bar{P}_{Ds}\}^{(0)T}\{\bar{P}_{Ds}\}^{(0)} + \{\bar{P}_{Ls}\}^{(0)T}\{\bar{P}_{Ls}\}^{(0)}} \right]^{1/2} \quad (27)$$

여기서,

$$\{\bar{P}_{Ds}\}^{(0)} = [\mathbf{t} + \mathbf{d}^t \mathbf{K}]^{(0)}\{U\}^{(0)}/p^*$$

$$\{\bar{P}_{Ls}\}^{(0)} = \chi^*\{P_L\}^{(0)}/p^*$$

$$\{\bar{P}_{Ls}\}^{(0)T}\{\bar{P}_{Ls}\}^{(0)} = (\chi^*/p^*)^2, \quad (|\{P_L\}^{(0)}| = 1)$$

$k \geq 2$: 법선평면 구속조건을 사용하고, 이것은 식 (28)과 같이 정의된다.

$$\{t_s\}^{(1)T}\{\Delta\gamma_s\}^{(k)} = 0 \quad (28)$$

이 때 변환된 증분벡터 $\{\Delta\gamma_s\}^{(k)}$ 은 식 (29)와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \{\Delta\gamma_s\}^{(k)} &= [\{\Delta U_{Ds}\}^{(k)T}; \{\Delta U_{Es}\}^{(k)T}; \\ &\quad \{\Delta P_{Ds}\}^{(k)T}; \{\Delta P_{Ls}\}^{(k)T}]^T \end{aligned} \quad (29)$$

식 (10)의 유한요소 평형식은 식 (30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &[\mathbf{t} + \mathbf{d}^t \mathbf{K}]^{(k-1)}\{\Delta U\}^{(k)} \\ &= \Delta\mu^{(k)}\chi^*\{P\} + (\mu^{(k)} + \mu^{(k-1)})\chi^*\{P\} \\ &\quad - \{\mathbf{t} + \mathbf{d}^t \mathbf{F}\}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (30)$$

비대칭 강성행렬이 생기게 됨을 피하기 위하여 유한요소 평형식을 두 부분으로 나누어 해석을 수행한다. 변위증분 $\{\Delta U_s\}^{(k)}$ 을 식 (31)과 같이 두 부분으로 분리시켜 평형식 (30)에 대입하면 식 (32)와 식 (33)으로 나누어진다.

$$\{\Delta U_s\}^{(k)} = \Delta\mu^{(k)}\{U_{Is}\}^{(k)} + \{\Delta U_{IIs}\}^{(k)} \quad (31)$$

여기서, $\{U_{Is}\}^{(k)} = \{U_i\}^{(k)}/u^*$, $\{\Delta U_{IIs}\}^{(k)} = \{\Delta U_{II}\}^{(k)}/u^*$ 이고, $\{U_i\}^{(k)}$, $\{\Delta U_{II}\}^{(k)}$ 는 식 (32), 식 (33)에서 구해진다.

$$\begin{aligned} & \{[{}^{t+d_0^t}K]^{(k-1)} + \alpha[D_I]\}\{U_i\}^{(k)} \\ & = \alpha[D_I]\{\bar{U}\} + \chi^*\{\bar{P}\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \{[{}^{t+d_0^t}K]^{(k-1)} + \alpha[D_I]\}\{\Delta U_{II}\}^{(k)} \\ & = ({}^m\mu + \mu^{(k-1)})\chi^*\{P\} - \{{}^{t+d_0^t}F\}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서,

$\bar{P}_i = 0$ ($l \neq i, j, p, q$), l -th component of $\{\bar{P}\}$

$$\Delta U_{IIp} = \Delta U_{IIq} = 0$$

i, j : 하중작용점의 자유도

p, q : 변위제어점의 자유도

변환된 변위증분벡터 $\{\Delta U_{Ds}\}^{(k)}$, $\{\Delta U_{Es}\}^{(k)}$ 와 하중증분벡터 $\{\Delta P_{Ds}\}^{(k)}$, $\{\Delta P_{Ls}\}^{(k)}$ 는 변위증분계수 $\Delta\mu^{(k)}$ 을 사용하여 식 (34)~(36)과 같이 표시될 수 있다.

$$\{\Delta U_{Ds}\}^{(k)} = \Delta\mu^{(k)}\{\bar{U}_{Ds}\} \quad (34)$$

$$\{\Delta U_{Es}\}^{(k)} = \Delta\mu^{(k)}\{U_{EIs}\}^{(k)} + \{\Delta U_{EIIs}\}^{(k)} \quad (35)$$

$$\{\Delta P_{Ds}\}^{(k)} = \Delta\mu^{(k)}[{}^{t+d_0^t}K]^{(k-1)}\{U_i\}^{(k)}/p^* + [{}^{t+d_0^t}K]^{(k-1)}\{\Delta U_{II}\}^{(k)}/p^* \quad (36)$$

여기서, $\{\bar{U}_{Ds}\}$ 는 $\{\bar{U}\}$ 중 변위제어점 변위부의 변환된 양을 나타낸다.

이 식들을 식 (29)에 대입후 식 (28)을 이용하여 변위증분계수 $\Delta\mu^{(k)}$ 를 구하면, 식 (37)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta\mu^{(k)} = & -\{\Delta U_{Es}\}^{(1)T}\{\Delta U_{EIs}\}^{(k)}/[\Delta\mu^{(1)}\{\bar{U}_{Ds}\}^T\{\bar{U}_{Ds}\} \\ & + \{\Delta U_{Es}\}^{(1)T}\{U_{EIs}\}^{(k)} + \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)T}\{P_{Dis}\}^{(k)} \\ & + \Delta\mu^{(1)}(\chi^*/p^*)^2] \end{aligned} \quad (37)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{\Delta U_{Es}\}^{(1)} & = \Delta\mu^{(1)}\{U_E\}^{(0)}/u^* \\ \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)} & = \Delta\mu^{(1)}\{P_D\}^{(0)}/p^* \\ & = \Delta\mu^{(1)}[K]^{(0)}\{U\}^{(0)}/p^* \\ \{P_{Dis}\}^{(k)} & = [K]\{U_i\}^{(k)}/p^* \end{aligned}$$

이 방법에서는 하중과 변위증분간의 비를 나타내는 계수에 의하여 하중증분을 변위증분으로 나타낸 후 변위증분 파라미터만을 이용하여 하중과 변위가 동시에 제어되도록 하였고, 하중-변위곡선의 형태

에 따라 적절히 증분되도록 한 것이다.

식 (37)은 매우 일반적인 해법으로 많은 개별적인 해법을 유도할 수 있다. 식 (37)에서 변위제어 (p, q) 에 대한 항을 소거하고, 양변에 $\chi^* = \Delta\lambda/\Delta\mu$ 를 곱하면 식 (37a)과 같이 하중제어 문제의 Riks method⁽⁶⁾로 귀착된다.

$$\Delta\lambda^{(k)} = -\frac{\{\Delta U_s\}^{(1)T}\{\Delta U_{IIs}\}^{(k)}}{[\{\Delta U_s\}^{(1)T}\{U_{Is}\}^{(k)} + \Delta\lambda^{(1)}/p^{*2}]} \quad (37a)$$

식 (37)에서 (i, j) 의 하중제어에 관한 항을 소거하면 식 (37b)와 같이 변위제어 문제의 Riks type method⁽¹⁰⁾가 된다.

$$\begin{aligned} \Delta\mu^{(k)} = & -\{\Delta U_{Es}\}^{(1)T}\{\Delta U_{EIs}\}^{(k)} \\ & /[\Delta\mu^{(1)}\{\bar{U}_{Ds}\}^T\{\bar{U}_{Ds}\} \\ & + \{\Delta U_{Es}\}^{(1)T}\{U_{EIs}\}^{(k)} \\ & + \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)T}\{P_{Dis}\}^{(k)}] \end{aligned} \quad (37b)$$

하중제어 문제에 대한 해법은 식 (37a)에서 $u^* \rightarrow \infty$ 라 하면 식 (37c)이 되어 Newton-Raphson method⁽¹⁵⁾가 된다.

$$\Delta\lambda^{(k)} = 0 \quad (37c)$$

식 (37a)에서 $p^* \rightarrow \infty$ 라 놓으면 식 (37d)가 되어 Ramm⁽¹¹⁾ 방식 또는 Crisfield의 quasi-penalty method⁽⁵⁾가 된다.

$$\Delta\lambda^{(k)} = -\{\Delta U_s\}^{(1)T}\{\Delta U_{IIs}\}^{(k)} / \{\Delta U_s\}^{(1)T}\{U_{Is}\}^{(k)} \quad (37d)$$

식 (37d)에서 자유도 i 만을 고려하면 식 (37e)가 되어 Batoz⁽⁸⁾방식이 된다.

$$\Delta\lambda^{(k)} = -\{\Delta U_{II}\}^{(k)}/\{U_{II}\}^{(k)} \quad (37e)$$

식 (37a)에서 p^* 를 조정하면 Noor and Peters⁽²²⁾의 방식으로 귀착된다.

한편 변위제어 문제에 대한 해법은 식 (37b)에서 하중항을 무시하고 $u^* \rightarrow \infty$ 로 하면 식 (37g)과 같이 변위문제의 quasi-penalty method⁽¹⁰⁾가 되며,

$$\Delta\mu^{(k)} = -\{\Delta U_s\}^{(1)T}\{\Delta U_{IIs}\}^{(k)} / \{\Delta U_s\}^{(1)T}\{U_{Is}\}^{(k)} \quad (37g)$$

식 (37g)에서 자유도 p 만을 고려하면 식 (37h)과 같이 penalty method⁽¹⁰⁾가 된다.

$$\Delta\mu^{(k)} = 0 \quad (37h)$$

따라서 식 (37)은 위의 모든 방식을 포함하는 일반적인 식으로 간주할 수 있다.

2.3 새로운 평형접근방법 : 이완법

좌굴후 현상 해석중에서 하중과 변위가 동시에 작용하는 문제는 기존의 Riks 방법을 단간으로 하는 2.2절의 수식을 통하여 해석할 수 있으나 변위 증분이 작으면서 하중이 급격히 변하는 부분이나 변곡점 근처에서는 해석이 불안정하다.

본 논문에서는 위의 식 (37)에 두 이완계수(relaxation factor) β_1, β_2 를 도입하여 수정한 새로운 변위증분계수 $\Delta\mu_r^{(k)}$ 을 제안하였다. 제안된 변위증분계수를 사용함으로써 기존의 방법에서 제기되는 문제점을 해결할 수 있으며, 이 계수들을 적절히 선정함으로써 각종 snap 현상을 별 어려움없이 효과적으로 해석할 수 있었다.

기존의 방법에서는 초기에 주어지는 점선길이만으로 변위증분계수를 정하기 때문에 수렴상태를 평가하지 못하는 결점이 있으므로 두 가지의 이완계수를 도입하여 현재의 수렴상태와 이전의 수렴상태를 평가하여 전반적인 수렴상태를 추정하고 이를 이용하여 현재 상태에서 가장 효과적인 변위증분계수를 사용함으로써 수렴성을 향상시킨다.

수정된 변위증분계수는 식 (38)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta\mu_r^{(k)} = & -\{\Delta U_{Es}\}^{(1)T} \{\Delta U_{EIs}\}^{(k)} / [\Delta l^{(1)} \{U_{Ds}\}^T \{U_{Ds}\} \\ & + \{\Delta U_{Es}\}^{(1)T} \{U_{EIs}\}^{(k)} + \{\Delta P_{Ds}\}^{(1)T} \{P_{Ds}\}^{(k)} \\ & + \Delta l^{(1)} (x^*/p^*)^2] \times f_1 \times f_2 \end{aligned} \quad (38)$$

식 (36)에서 f_1, f_2 는 이완계수 β_1, β_2 를 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} f_1 = & \begin{cases} \beta_1 : k=2 \ \& \ kflag=1 \\ 1 : k \geq 3 \ \text{or} \ kflag=0 \end{cases} \\ f_2 = & \begin{cases} \beta_2^n : k \geq 3 \ \text{and} \ kflag=1 \\ 1 : k \leq 2 \ \text{or} \ kflag=0 \end{cases} \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} kflag = & \begin{cases} 0 : \text{전 단계의 } R_k < 1.0 \ \text{for all } k \\ 1 : \text{전 단계의 } R_k \geq 1.0 \ \text{for all } k \end{cases} \\ n = & \begin{cases} 1 : R_k > 1.0 \\ 2 : R_k > 5.0 \\ 3 : R_k > 10 \end{cases} \end{aligned}$$

여기서, R_k 는 이전단계의 오차값과 현 단계의 오차값의 비를 나타내는 계수이고, 오차값은 모두

절점에 대해 작용하중과 등가 절점력 사이의 최대 차이값을 나타낸다.

수렴조건은 $\Delta\mu_r^{(k)} / \Delta\mu_r^{(1)} < \epsilon$ 으로 할 수 있으며, 수렴후의 변위 및 등가 절점력은 식 (39)와 같다.

$$\begin{aligned} \{{}^{i+1}U\} & = \{U\} + \{\Delta U\}^{(1)} + \{\Delta U\}^{(2)} + \dots \\ \{{}^{i+1}P\} & = \{{}^{i+1}F\}^{(k)} \end{aligned} \quad (39)$$

여기서, β_1 은 이전 증분단계에서의 수렴의 불안정성을 판단하여 다음의 수렴단계에서의 변위증분량을 조절한다. 즉, $m-1$ 번째 증분단계에서의 수렴과정을 판단하여 그 과정이 안정되지 못한 경우에는 m 번째 증분단계의 첫번째 변위증분량을 적절히 값으로 조절하는 역할을 한다. 이러한 조절이 필요한 이유는 첫번째 증분에 의해 발산하면 추후의 어떤 반복계산이나 이완에 의해서도 수렴될 수 없는 경우가 있기 때문이다. 이러한 조절을 통하여 $m-1$ 번째 증분단계의 불안정성이 m 번째 증분단계에서의 수렴과정의 전체적인 성질을 나쁘게 만들어 결과적으로 수렴성을 악화시키는 현상을 막을 수 있고, 변곡점근처에서 수렴이 느려지거나 발산하는 문제점을 상당히 개선할 수 있다. 그러나 β_1 만으로는 m 번째 증분단계 내에서의 수렴과정의 불안정성은 보완하지 못하므로 수렴과정중에 변위증분량을 수정하는 β_2 가 도입될 필요성이 있다.

β_2 는 해의 수렴과정중에 이전 반복단계의 오차값과 현 반복단계에서의 오차값의 비를 통하여 해에 접근해 가는 과정을 추정하고, 이를 판정하여 다음 단계의 접근량을 줄임(relaxation)과 동시에 수렴 속도면에서 가장 효율적인 변위증분량을 선택한다. 이러한 방법은 오차값의 비를 관찰함으로써 원하는 만큼의 이완을 할 수 있다.

2.2절과 2.3절에서 언급한 계산과정을 각 단계별로 요약하면 다음과 같다.

- (1) 제어되는 변위성분 \bar{U}_p, \bar{U}_q 및 작용하는 하중 P_p, P_q 가 주어진다.
- (2) 밍선 arc-length S_0 를 정한다.
- (3) 초기 점선강성행렬 $[{}^{i+1}K]^{(0)}$ 와 등가 절점력 벡터 $\{{}^{i+1}F\}^{(0)}$ 를 계산한다.
- (4) 반복단계를 두단계로 나누어 수행한다.
- (5) 첫단계
 - ㉠ $\{U\}^{(0)}$ 를 계산한다.
 - ㉡ $\{U\}^{(0)}$ 에 대응하는 하중 $\{P\}^{(0)}$ 를 계산한다.
 - ㉢ $\{P_b\}^{(0)}$ 를 계산한다.
 - ㉣ 변위증분계수 $\Delta\mu^{(1)}$ 을 계산한다.

- ㉞ 변위증분계수를 이용하여 $\{^{t+\Delta t}U\}^{(1)}$ 을 구한다.
- ㉟ $[^{t+\Delta t}K]^{(0)}$ 와 $\{^{t+\Delta t}F\}^{(0)}$ 를 계산한다.
- (6) 두번째단계
 - ㉠ 두 부분으로 나눈 평형식으로부터 $\{U_I\}^{(k)}$ 와 $\{\Delta U_{II}\}^{(k)}$ 를 구한다.
 - ㉡ $\{P_b\}^{(k)}$ 를 구한다.
 - ㉢ 이완계수의 적용은 다시 두단계로 나누어 한다.
 - ① 전 증분단계의 수렴성을 판정하여 이완계수 β_1 을 정한다.
 - ② 현 접근단계에서의 오차값과 전 접근단계에서의 오차값의 비에 의해 β_2 를 정한다.
 - ㉣ 정해진 계수들을 이용하여 수정된 변위증분계수 $\Delta \mu_r^{(k)}$ 를 구한다.
- (7) 수정된 변위증분계수를 이용하여 $\{^{t+\Delta t}U\}^{(k)}$ 를 계산한다.
- (8) $[^{t+\Delta t}K]^{(k)}$ 와 $\{^{t+\Delta t}F\}^{(k)}$ 를 계산한다.
- (9) 수렴판정을 하고 수렴조건식을 만족할 때까지 (6)~(9) 단계를 반복한다.
- (10) 수렴조건을 만족하면, $\{^{t+\Delta t}U\} = \{^{t+\Delta t}U\}^{(k)}$, $\{^{t+\Delta t}P\} = \{^{t+\Delta t}F\}^{(k)}$ 로 둔다
- (11) 증분단계를 증가시키고, (3)번 단계로 간다.

3. 수치해석 예제 및 고찰

비교적 간단한 일단지지 외팔보 모델과 snap-through 현상 및 snap-back 현상을 잘 보여주는 대표적인 문제인 직각프레임(right angle frame)을 선택하여 하중과 변위가 동시에 제어되는 문제에 대한 해석의 타당성과 적용 가능성을 검토하고자 한다. 또한 동일한 직각프레임 모델을 이용하여 여러 가지 하중/변위비에 대해 본 논문에서 제안한 이완계수의 적정범위에서 각종 snap 현상을 잘 극복하고 효율성과 수렴속도에서도 효과적임을 보이고자 한다

3.1 하중/변위 파라미터법

3.1.1 일단지지 외팔보

Fig. 2는 해석에 사용된 외팔보(cantilever)의 형상 및 세원을 나타낸다. Fig. 2에서 보여준 것처럼 중간지점에서 하중이 작용하고 끝단에서 변위가 제어되는 조건으로 구성하였으며, 유한요소 모델은

평면응력상태로 가정하여 5개의 8절점 등매개변수 요소(isoparametric element)로 분할하였다. 또한 작용되는 하중 및 제어되는 변위는 변형중에도 항상 수직방향이 유지되도록 하고, 재료는 선형 탄성 재료로 가정하였다.

해석결과는 한 점(Fig. 2의 점 A)에 하중이 작용하는 경우의 일점문제와 비교하여 Fig. 3에 나타내었다. 일점 하중작용조건인 경우는 Riks 방법으로, 하중/변위 동시제어조건인 경우는 본 논문에서 제안한 하중/변위 파라미터법으로 해석하였으며, 이때 각 점에서 제어되는 하중증분벡터의 크기와 변위증분벡터 크기 사이의 비는 일정한 값으로($\lambda^* = 200$)으로 하였다.

Fig. 3에서 하중과 변위가 두 점에서 동시에 제어되는 경우 변위제어점(점 B)에서 제어되는 변위

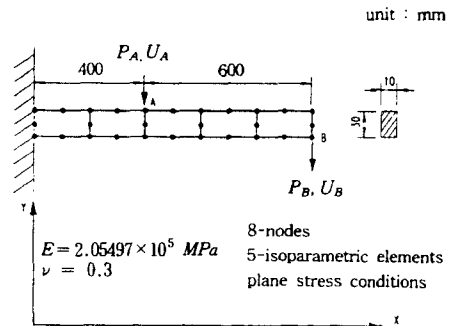


Fig. 2 Geometry and finite element model of a cantilever

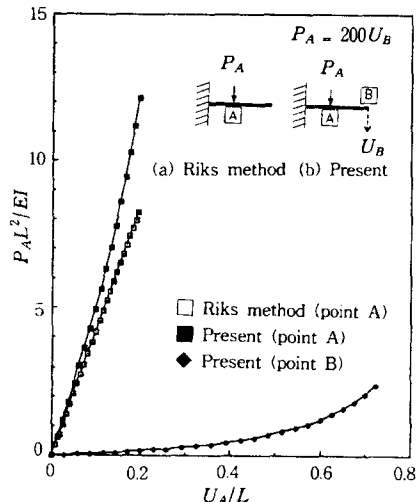


Fig. 3 Large displacement analysis of the cantilever using load/displacement parameter method

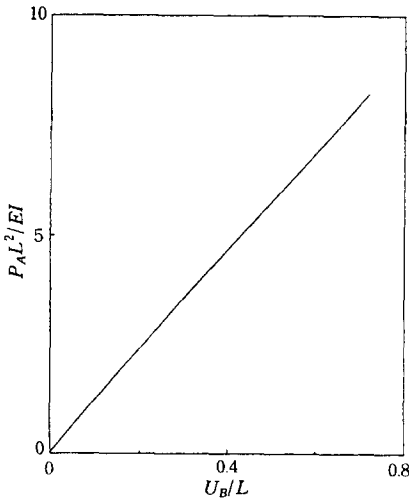


Fig. 4 Relation between load increments and displacement increment at each

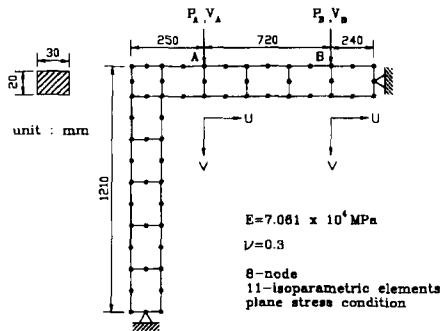


Fig. 5 Geometry and finite element model of the right angle frame

로 인해 하중/변위곡선상에서 동일한 하중에 대하여 A점의 변위가 증가되는 방향으로 곡선이 이동하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 4는 A점에서 작용하는 하중과 B점에서 제어되는 변위가 각 단계에서 제어조건으로 입력한 비율을 유지시키면서 증분됨을 보여주고 있고, 이때 외력과 등가 절점력의 차이가 10^{-6} 이하로 힘의 평형조건이 만족되었다. 이와 같이 본 논문에서 제안한 하중/변위 동시제어형 해석방식의 타당성을 확인할 수 있다.

3.1.2 직각프레임

Fig. 5는 평면응력상태하에 있는 직각 프레임 모델의 형상 및 세원을 나타내며, 11개의 8절점 등매개변수로 분할된 2차원 요소를 사용하여 해석하였다. 프레임 상단의 임의의 점 A에서 변위가 제어되고, B에서 하중이 제어되며 하중/변위비 $x^*=3$

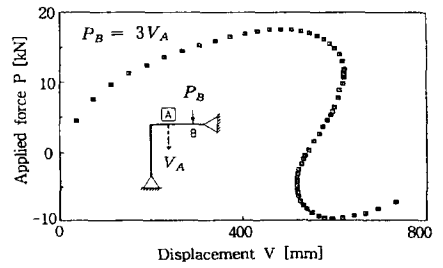


Fig. 6 Load-displacement curve of the right angle frame under load/displacement control

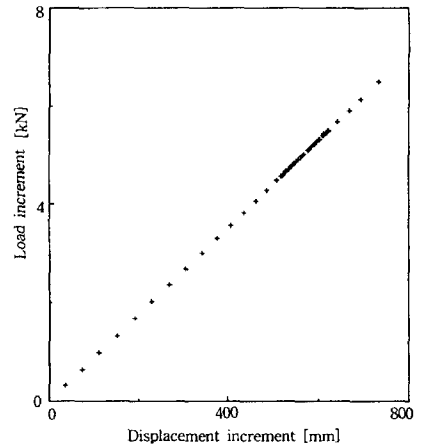


Fig. 7 Relation between load increments and displacement increments at each time step

으로 입력하였다.

Fig. 6은 A점에서의 변위-하중곡선을 나타낸 것으로 snap-back 현상이 일어나지만 잘 수렴됨을 알 수 있다. Fig. 7은 A, B점의 변위증분 및 하중증분간의 비율을 나타낸 것으로 제어조건으로 입력된 값과 동일하게 일정한 값으로 유지되고 있음을 알 수 있다.

3.2 이완법

앞에서 사용한 직각프레임 모델을 이용하여 본 논문에서 제안된 이완계수의 유효성을 확인하기 위해 점 A에서 변위가 제어되고, 점 B에서 하중이 작용하는 경우 제어되는 하중과 변위간의 비 x^* 를 여러 가지 조건($x^*=0, 1, 3, 10, 30$)에 대하여 해석한 결과, 모든 경우에 점 A에서 snap-back 현상이 일어났지만 제안된 이완계수의 적정범위에서 잘 수렴됨을 볼 수 있다.

Fig. 8은 $x^*=0$ 인 경우의 하중-변위선도를 나타내고, Fig. 9는 각 이완계수의 경우에 수렴반복회

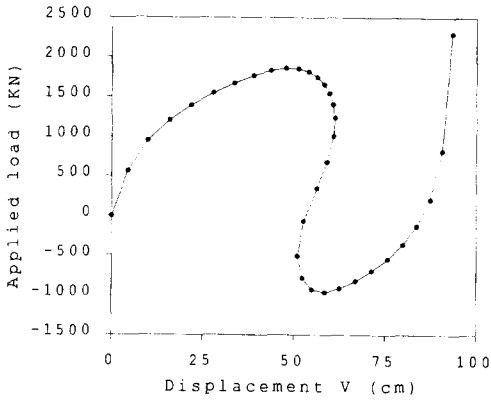


Fig. 8 Load-displacement curve of the right angle frame ($x^*=0$)

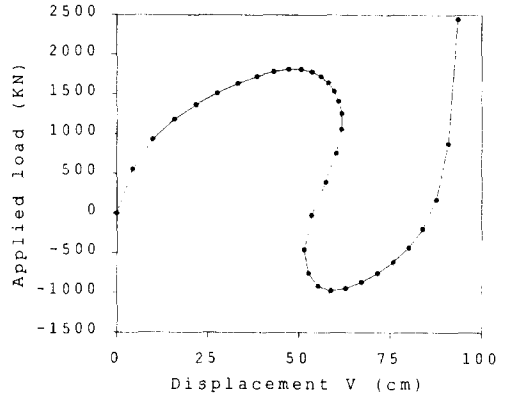


Fig. 10 Load-displacement curve of the right angle frame ($x^*=1$)

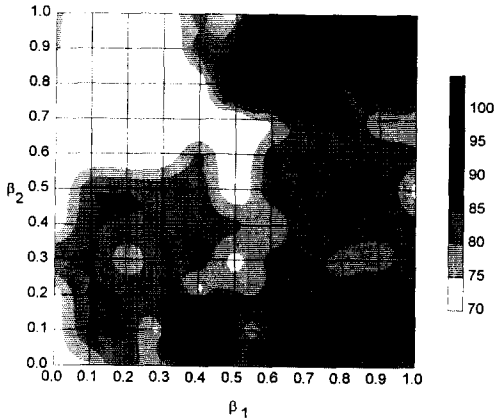


Fig. 9 Dither diagram of the iteration number ($x^*=0$)

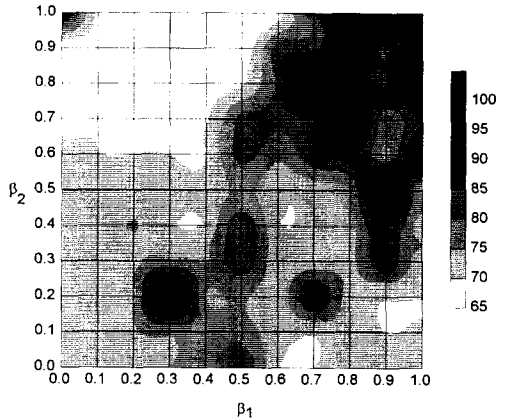


Fig. 11 Dither diagram of the iteration number ($x^*=1$)

수를 나타낸 그림이다. 이 경우는 변위만이 제어되는 경우로서 본 논문에서 제시한 계수의 적정범위에서 수렴성이 개선됨을 보여준다. 이완계수를 사용하지 않을 때보다 수렴속도가 24% 증가했다.

Figs. 10, 11은 $x^*=1$ 인 경우의 하중-변위선도와 수렴반복횟수를 나타낸 그림이다. 이 경우는 하중작용과 변위제어가 동시에 가해지는 경우로서 가해지는 하중의 크기가 크지 않은 경우이다. 변위만이 주어진 경우보다는 해석이 어려우나 수정된 변위증분계수를 이용한 경우 제안된 적정범위의 구간 내에서 모두 잘 수렴함을 볼 수 있다. 이완계수를 사용하지 않을 때보다 수렴속도가 34% 증가했다.

Figs. 12, 13은 $x^*=3$ 인 경우의 하중-변위선도와 수렴반복횟수를 나타낸 그림이다. 제안된 적정범위의 구간에서는 수렴이 어려우나, 제안된 적정범

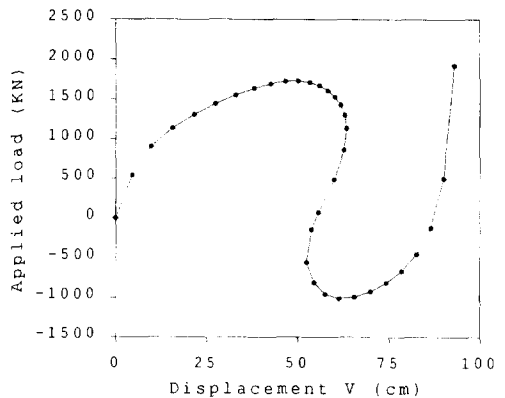


Fig. 12 Load-displacement curve of the right angle frame ($x^*=3$)

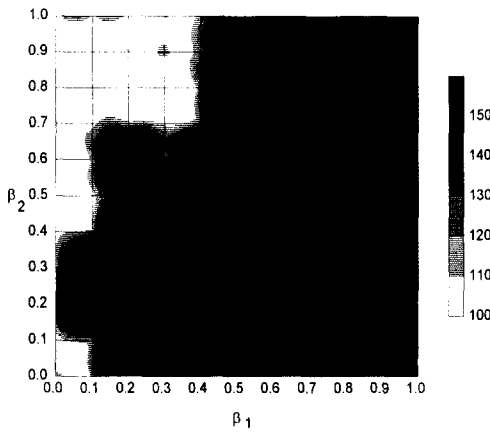


Fig. 13 Dither diagram of the iteration number ($x^*=3$)

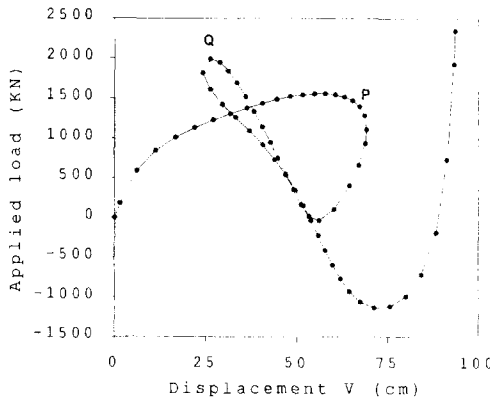


Fig. 14 Load-displacement curve of the right angle frame ($x^*=10$)

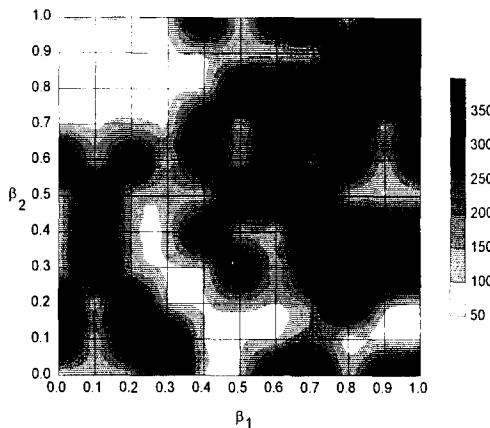


Fig. 15 Dither diagram of the iteration number ($x^*=10$)

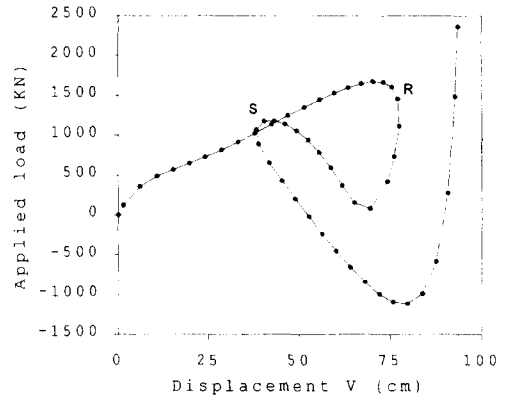


Fig. 16 Load-displacement curve of the right angle frame ($x^*=30$)

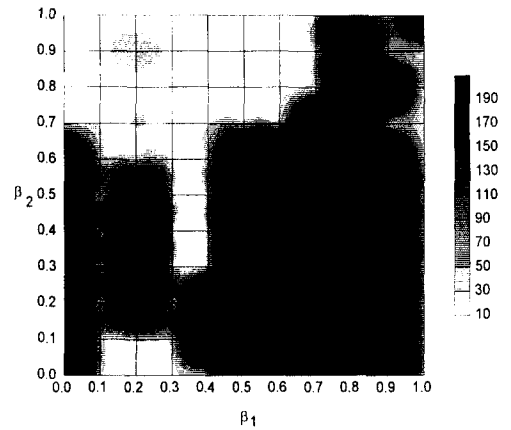


Fig. 17 Dither diagram of the iteration number ($x^*=30$)

위안에서는 모두 잘 수렴함을 볼 수 있다. 이완계수를 사용하지 않을 때보다 21%의 수렴속도의 증가를 볼 수 있다.

Figs. 14, 15는 $x^*=10$ 의 경우의 하중-변위선도와 수렴반복횟수를 나타낸 그림이다. 가해지는 하중의 크기가 매우 큰 경우로서 하중-변위곡선상에 여러 개의 변곡점이 존재하고 변위증분이 작으면서 하중이 급격히 변하는 부분이 존재한다. 이 경우에는 기존의 방법에 의해서는 P점 또는 Q점에서 해석이 중단하거나 발산하지만 수정된 변위증분계수에 의해서 제안된 적정범위 안에서는 어려움 없이 해석이 가능하다.

Figs. 16, 17은 $x^*=30$ 의 경우로서, $x^*=10$ 의 경우와 마찬가지로 하중-변위곡선상에 여러개의 변곡점이 존재하고 변위증분이 작으면서 하중이 급격히

Table 1 Comparison of iteration number for each parameter

x^*	Not relaxed	Relaxed	Reduction ratio (%)
0	87	66	24
1	96	63	34
3	128	100	21
10	Failed	70	100
30	Failed	24	100

(Unit : Number of iteration)

변하는 부분이 존재한다. 이 경우에도 기존의 방법에 의해서는 R점 또는 S점에서 해석이 불가능하지만 수정된 변위증분계수에 의해서 제안된 적정범위 안에서는 어려움없이 해석이 가능하다.

이상의 결과를 Table 1에 정리하였다. Table 1에서는 하중/변위 파라미터법에 의한 변위증분계수를 이용할 때의 수렴반복횟수와 이완법에 의해 수정된 변위증분계수를 이용할 때의 수렴반복횟수를 비교하여 수렴속도의 절감을 퍼센트(%)로 나타내었다.

4. 결 론

본 논문에서는 좌굴후 현상 해석시 하중과 변위 가동시에 제어되는 문제에 대한 해석방법으로 하중/변위 파라미터법을 제시하였고, 해의 수렴성과 안정성을 향상시킬수 있는 이완법을 제안하였으며 수치에 해석을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 하중과 변위가 동시에 작용하는 문제의 좌굴후 현상 해석법을 기존의 Riks 방법을 근간으로 새로이 유도하였다.

(2) 이러한 해법은 매우 일반적인 방법으로 기존의 알려진 좌굴후 현상 해법(하중제어 또는 변위제어)을 대부분 포함한다.

(3) Snap-back 현상을 수반하는 문제는, 기존의 Riks방법을 수정한 하중/변위 파라미터법에 의한 해석시에, 변곡점 근처 혹은 변위변화량에 비해 하중이 급격히 변하는 부분에서는 해석이 불안정하게 되는 경향이 있었다. 본 논문에서는 두 가지의 이완계수를 도입하여 효율성과 수렴속도를 개선한 수정된 변위계수를 제안하고, 수치예를 통해 고찰한 결과 그 효과를 확인할 수 있었다.

(4) 여러 조건에 대해 계산을 수행한 결과 적정 범위가 얻어졌으며, 그 범위로는 β_1 은 0.0과 0.3 사이, β_2 은 0.6과 1.0 사이의 값이 효과적인 것으로 나타났다.

(5) 이완법(relaxtion method)에 의해 수정된 변위증분계수를 적용하여 해석을 한 결과 하중/변위 파라미터법에 의한 해석 보다 21%이상의 수렴속도 개선을 얻을 수 있었다.

후 기

본 논문은 '95~'96년 교육부(학술진흥재단 기계공학분야) 학술연구조성비의 지원을 받아 이루어진 것으로 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Ramm, E., 1981, "Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points," Proceedings of the Europe-U.S. Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics," Bochum, Germany, Springer-Verlag, pp. 63~89.
- (2) Bergan, P. G., 1979, "Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems," Proceedings of the International Conference on "Engineering Applications of the Finite element Method," Høvik, Norway, A. S., *Computas*, 13, 1~13.38.
- (3) Wright, E. W. and Gaylord, E. H., 1968, "Analysis of Unbraced Multistory Steel Rigid Frames," *Proceedings of the ASCE, Journal of the Structural Division*, 94, pp. 1143~1163.
- (4) Riks, E., 1979, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems," *International Journal of Solids and Structures*, 15, pp. 529~551.
- (5) Crisfield, M. A., 1981, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through," *Computers and Structures*, 13, pp. 55~62.
- (6) Simo, J. C., Wriggers, P., Schweizwerhof, K. H. and Taylor, R. L., 1986, "Finite Deformation Post-buckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints," *International Journal*

- for *Numerical Methods in Engineering*, 23, pp. 779~800.
- (7) Chóscielewski, J. and Schmidt, R., 1985, "A Solution Control Method for Nonlinear Finite Element Post-Buckling Analysis of Structures," *Post Buckling of Elastic Structures, Proceedings, of the EUROMECH Colloquium 200*, pp. 19~33.
- (8) Batoz, J. -L. and Dhatt, G., 1979, "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, pp. 1262~1267.
- (9) Koo, J. S., Lee, B. C. and Kwak, B. M., 1988, "A Study on Improving Efficiency in Computational Procedure of Finite Element Nonlinear Analysis of Plane Frame Structures," *Transaction of the KSME*, Vol. 12, No. 4, pp. 631~641.
- (10) Choi, J. M., Jeong, Y. T., Yun, T. H. and Kwon, Y. D., 1990, "Finite Element Analysis of Post-buckling Phenomena Using Adaptive Load/Displacement Parameter," *Transaction of the KSME*, Vol. 14, No. 3, pp. 503~512.
- (11) Argyris, J. H., 1965, "Continua and Discontinua," Proceedings of 1st Conference on "Matrix Methods of Structural Mechanics," Wright-Patterson A. F. B., U. S. A., pp. 11~189.
- (12) Pian, T. H. H. and Tong, P., 1970, "Variational Formulation of Finite Displacement Analysis," IUTAM Symposium on "High Speed Computing of Elastic Structures," Liege, pp. 43~60.
- (13) Lock, A. C. and Sabir, A. B., 1973, "Algorithm for Large Deflection Geometrically Nonlinear Plate and Curved Structures," in "Mathematics of Finite Elements and Applications," Academic Press, N. Y., pp. 483~494.
- (14) Haisier, W., Stricklin, J. and Key, J., 1977, "Displacement Incrementation in Nonlinear Structural Analysis by the Self-Correcting Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, pp. 3~10
- (15) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., Chapter 6.
- (16) Mondkar, D. P. and Powell, G. H., 1978, "Evaluation of Solution Schemes for Non-Linear Structures," *Computers and Structures*, pp. 223~236.
- (17) Frey, F., 1978, "L'Analyse Statique Non Lincaire des Structures par Laconstruction Metallique," Ph. D. Thesis, Universite de Liege.
- (18) Karanmanlidis, D., Honecker, A. and Knothe, K., 1981, "Large Deflection Finite Element Analysis of Pre-and Postcritical Response of thin Elastic Frames," Proceedings of the Europe-U.S. Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics," Bochum, Germany, Springer-Verlag, pp. 217~234.
- (19) Padovan, J. and Tovichakchaikul, S., 1982, "Self-Adaptive Predictor-Corrector Algorithms for Static Non-linear Structural Analysis," *Computer and Structures*, 15, pp. 365~377.
- (20) Endo, T. Oden, J. T., Becker E. B. and Miller, T., 1984, "A Numerical Analysis of Contact and Limit Point Behavior in a Class of Problems of Finite Elastic Deformation," *Computers and Structures*, 18, pp. 899~910.
- (21) Riiks, E., 1984, "Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp. 219~259.
- (22) Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Tracing Post-limit-point with Reduced Basis Technique," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 28, pp. 217~240.