

〈논 문〉

# 가변시간간격을 갖는 Newmark 시간적분법의 사다리꼴법칙에 대한 안정성과 정확도

노용수\* · 정진태\*\* · 배대성\*\*

(1997년 4월 11일 접수)

## Stability and Accuracy for the Trapezoidal Rule of the Newmark Time Integration Method with Variable Time Step Sizes

Y. Noh, J. Chung and D. S. Bae

**Key Words :** Time Integration(시간적분), Variable Time Step Size(가변시간간격), Stability(안정성), Accuracy(정확도)

### Abstract

Stability and accuracy for the trapezoidal rule of the Newmark time integration method are analyzed when variable time step sizes are adopted. A new analytic approach to stability and accuracy analyses is also proposed for time integration methods with variable time step sizes. The trapezoidal rule with variable time step sizes has the "actual" unconditional stability which is the same as that of the method with constant time step sizes. However, the method with variable time step sizes is first-order accurate while the method with constant time step sizes is second-order accurate.

### 1. 서 론

시간적분법은 선형 혹은 비선형 구조동역학 문제로부터 수치해를 얻기 위해 폭넓게 이용되어 왔다. 구조물의 동적거동은 흔히 일련의 편미분방정식을 포함하는 초기치-경계치문제로 모델링된다. 이에 대한 표준형의 유한요소해석은 먼저 공간상에서 이산화한 후 얻어진 시간에 대한 일련의 상미분방정식에 대해 시간적분법을 이용하여 시간응답을 구한다. 시간  $t_{n+1}$ 에서의 수치해를 얻기 위해, 시간적분법은 전단계, 즉 시간  $t_n$ 에서의 수치해와 시간간격  $h_n = t_{n+1} - t_n$ 이 필요하다. 시간간격의 선택에 있어서 서로 상반되는 두 요소, 즉 해의 정확도와 계

산비용 사이에 최적화가 필요하다. 다시 말해 최적화된 시간간격은 수치해의 정확도를 최대화하고 계산비용을 최소화하는 것이다. 이러한 최적화된 시간간격은 외력과 시스템의 비선형성으로 일반적으로 매 계산단계에서 변하게 된다. 계산과정에서 최적적인 시간간격을 자동결정하기 위한 방법에 대한 연구가 꾸준히 진행되어 왔다.

시간적분법에 대한 수학적인 오차해석과 이와 관련된 시간간격 제어방법이 1차 상미분방정식을 풀기 위해 많은 문헌에서 소개되었다.<sup>(1~3)</sup> 이에 반해 구조동역학 문제에서 나타나는 2차 상미분방정식으로부터 시간응답을 구하기 위해 Newmark 시간적분법<sup>(4)</sup>을 이용하여, Hibbitt와 Karlsson<sup>(5,6)</sup>은 시간간격 처음과 끝에서 계산된 수치해를 이용하여 시간간격의 중간점에서 잔류힘벡터(residual force vector)를 계산하는 방법을 이용하여 시간간격

\*회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\*회원, 한양대학교 기계공학과

을 조정하는 방법을 제시하였다. Oughourlian과 Powell<sup>(7)</sup>은 강성행렬과 증분(incremental) 속도벡터를 곱함으로써 선형문제의 잔류힘벡터를 시간간격 중간점에서 계산하여 계산비용이 절감된 방법을 개발하였다. Felippa와 Park<sup>(8,9)</sup>은 모든 자유도에 대해 증분가속도와 증분변위 사이의 비로부터 계산된 겉보기최고주파수(apparent highest frequency)에 바탕을 둔 시간간격 제어방법을 소개하였으며, Park과 Underwood<sup>(10,11)</sup>는 중심차분법에 대한 시간간격 조정방법을 개발하였다. 겉보기 최고주파수의 개념을 가지고 Bergan과 Mollestad<sup>(12)</sup>는 Rayleigh지수를 이용하여 계산된 겉보기현재주파수(apparent current frequency)에 바탕을 둔 자동 시간간격 결정방법을 제시하였으며, Lee와 Hsieh<sup>(13,14)</sup>은 비선형 과도구조동역학 문제에 대한 자동 시간간격 조정법을 발표하였다. 한편 위의 방법들과는 달리, 간단한 국부오차평가자(local error estimator)를 이용한 시간간격 제어방법이 소개되었다.<sup>(15~18)</sup> 그리고 일반화된  $\alpha$ 방법<sup>(19)</sup>에 대해 국부오차평가자와 시간간격 제어방법이 Hulbert와 Jang<sup>(20)</sup>에 의해 개발되었다.

지금까지의 시간간격 조정알고리즘에 대한 대부분 연구가 시간간격이 일정할 때의 시간적분법에 대한 안정성과 정확도를 검증없이 받아들였다. 다시 말해 시간간격이 일정한 경우의 시간적분법의 안정성과 정확도를 시간간격 조정이 있는 경우의 시간적분법의 안정성과 정확도와 동일시 하였다. 특히 미국의 일부 상용 유한요소해석 프로그램 제작회사들이 수치감쇠가 있는 시간적분법<sup>(19,21,22)</sup>에 대해 시간간격을 조정하면서 비선형문제를 풀 때 수치해의 불안정성을 경험하였다. 이는 이들 수치감쇠가 있는 시간적분법이 시간간격이 일정한 경우 무조건적(unconditional) 안정성을 확보하나, 시간간격을 조정하는 경우 조건적(conditional) 안정성을 갖는 다는 것을 의미한다.

본 연구에서 각 계산단계에서 시간간격이 조정되어 변화할 때, Newmark 방법중 사다리꼴법칙(trapezoidal rule)의 안정성과 정확도를 분석하였다. 안정성을 분석하기 위해서 1단계 형태(single-step form)의 Newmark 방법을 다단계(multi step)의 변위에 대한 차분방정식으로 변환하고 Routh-Hurwitz 기준에 의해 안정조건을 유도하였다. 그리고 정확도 분석을 위해 국부절단오차(local truncation error)로부터 정확도 조건을 유도하였다.

## 2. Newmark 시간적분법

동적 하중을 받는 선형구조물에 대한 편미분방정식을 표준 유한요소해석에 의해 공간상에서 이산화하면 다음과 같은 시간에 관한 행렬-벡터방정식이 얻어진다.

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

여기서,  $M$ ,  $C$ 와  $K$ 는 각각 질량, 감쇠와 강성행렬을 나타내며,  $\mathbf{f}(t)$ 는 외부하중벡터 그리고  $\mathbf{x}(t)$ 는 변위벡터를 나타낸다. 초기치문제는  $\mathbf{x}(t)$ 에 관한 지배방정식 (1)과 초기조건은

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (3)$$

으로 이루어진다. 윗식에서  $\mathbf{x}_0$ 와  $\dot{\mathbf{x}}_0$ 는 주어진 초기변위와 속도벡터이다.

식 (1)~(3)으로 구성되는 초기치문제를 풀기위한 Newmark방법은 다음 식들로 표현된다.

$$M\mathbf{a}_{n+1} + C\mathbf{v}_{n+1} + K\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (4)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + h_n \mathbf{v}_n + h_n^2 [(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + \beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h_n [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \quad (6)$$

여기서,  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{a}_n$ 과  $\mathbf{f}_n$ 은 각각  $\mathbf{x}(t_n)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t_n)$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}(t_n)$ 과  $\mathbf{f}(t_n)$ 의 근사치이며, 계수  $\beta$ 와  $\gamma$ 는 이 알고리즘의 안정성과 정확도를 결정짓는 상수이다. 그리고  $h_n$ 은 시간  $t_n$ 과  $t_{n+1}$  사이의 시간간격을 나타낸다. 즉,

$$h_n = t_{n+1} - t_n \quad (7)$$

시간간격이 일정한 경우, 즉  $h_n = h$ 로 일정한 경우에 대해 Newmark 방법은  $\beta$ 와  $\gamma$ 의 값에 따라 다음과 같은 잘 알려진 시간적분법을 포함하고 있다.

(1) 사다리꼴법칙(trapezoidal rule) :  $\beta=1/4$ ,  $\gamma=1/2$ 인 경우이며, 이때 Newmark 방법은 암시적(implicit) 방법으로서 무조건적(unconditional)인 안정성을 갖고, 정확도가 2차이다.

(2) 선형 가속도방법 :  $\beta=1/6$ ,  $\gamma=1/2$ 인 경우로 암시적 방법이며, 조건적(conditionally) 안정성을 갖고, 비감쇠임계샘플링주파수(undamped critical sampling frequency)의 값이  $2\sqrt{2}$ 이고 정확도의 차수는 2이다.

(3) Fox-Goodwin 방법 :  $\beta=1/12, \gamma=1/2$ 인 경우로서 암시적 방법이며, 비감쇠임계샘플링주파수가  $\sqrt{6}$ 인 조건적 안정성을 갖고 정확도의 차수는 2이다.

(4) 중심차분법 :  $\beta=0, \gamma=1/2$ 인 경우로서 명시적(explicit) 방법이며 비감쇠임계샘플링주파수가 2인 조건적 안정성을 갖고 2차 정확도를 갖는다.

위에 열거한 시간적분법 중 가장 많이 쓰이는 시간적분법은 암시적 방법인 경우 사다리꼴법칙이며, 명시적 방법의 경우 중심차분법이다. 일반적으로 암시적방법은 저주파의 고유진동형상이 시간응답에 지배적인 경우에 적합한 반면, 명시적 방법은 충돌 문제나 파동(wave) 전달 문제와 같이 짧은 시간에 일어나는 구조동역학 문제에 적합하다.

### 3. 안정성 분석

식 (4)~(6)으로 주어진 다자유도계 문제를 1자유도계 문제로 간략화하면 안정성과 정확도를 분석하기에 매우 유용하다. 모드분해(modal decomposition) 과정을 식 (4)~(6)에 적용하면 일련의 비연성된 1자유도계 문제들을 얻을 수 있다. 이들 중 대표적인 하나의 문제는 다음과 같은 스칼라방정식으로 표현된다.

$$a_{n+1} + 2\zeta\omega v_{n+1} + \omega^2 d_{n+1} = f_{n+1} \quad (8)$$

$$d_{n+1} = d_n + h_n v_n + h_n^2 [(1/2 - \beta) a_n + \beta a_{n+1}] \quad (9)$$

$$v_{n+1} = v_n + h_n [(1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1}] \quad (10)$$

그리고 초기조건은  $d_0 = x(0)$ 와  $v_0 = \dot{x}(0)$ 로 주어지며 윗식에서  $\omega$ 는 비감쇠고유진동수이며,  $\zeta$ 는 모드 감쇠계수이다. 본 연구에서 논의를 간단히 하기 위해 하중과 감쇠가 없는 경우, 즉  $f_{n+1} = 0, \zeta = 0$ 인 경우만을 고려하기로 한다. 그리고 Newmark 방법중 사다리꼴법칙만을 고려한다. 이 경우

$$\beta = 1/4, \gamma = 1/2 \quad (11)$$

이상에서 언급한 가정을 바탕으로 사다리꼴법칙에 대한 식 (8)~(10)을  $t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$ 일 때 반복적으로 사용하여 속도와 가속도에 대한 항을 소거하면 다음과 같은 변위에 대한 차분방정식을 유도할 수 있다.

$$A_0 d_{n+2} + A_1 d_{n+1} + A_2 d_n = 0 \quad (12)$$

여기서,

$$A_0 = 4 + r_n^2 \Omega_n^2 \quad (13)$$

$$A_1 = (1 + r_n)(-4 + r_n \Omega_n^2) \quad (14)$$

$$A_2 = r_n(4 + \Omega_n^2) \quad (15)$$

단,  $r_n = h_{n+1}/h_n$ 이고,  $\Omega_n = h_n \omega$ 이다. 안정성을 해석하기 위해 식 (12)는 다음과 같이 행렬-벡터방정식으로 표현할 수 있다.

$$D_{n+1} = A_n D_n \quad (16)$$

여기서,  $D_n = \{d_{n+1}, d_n\}^T$ 이고, 증폭행렬  $A_n$ 은 다음으로 표현된다.

$$A_n = \begin{bmatrix} -A_1/A_0 & -A_2/A_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

증폭행렬  $A_n$ 은  $A_0, A_1, A_2$ 의 즉,  $r_n$ 과  $\Omega_n$ 의 함수이다.

시간적분법의 안정조건은 임의의 양의 정수  $n$ 과  $l$ 에 대하여

$$\|A_{n+l} A_{n+l-1} \cdots A_{n+1} A_n\| \leq M \quad (18)$$

이 성립함을 의미한다. 위에서  $M$ 은 유한한 양의 실수이다. 식 (18)은 증폭행렬  $A_n$ 에 대한 고유치의 절대값이 1보다 작아야 한다는 것을 의미한다.  $A_n$ 의 고유치에 대한 특성방정식은

$$\det(A_n - \lambda I) = 0 \quad (19)$$

로 표시되며, 여기서  $\lambda$ 는  $A_n$ 의 고유치이고  $I$ 는 항등행렬(identity matrix)이다. 식 (19)는 다음과 같이  $\lambda$ 에 대한 다항식으로 쓸 수 있다.

$$A_0 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_2 = 0 \quad (20)$$

식 (20)으로부터 안정조건  $|\lambda| \leq 1$ 에 해당하는 조건을 얻기가 번거로우므로,  $\lambda = (1 + \eta)/(1 - \eta)$ 의 변환을 적용하여  $\eta$ 의 실수부의 값이 음수인 조건을 찾는 것이 보다 용이하다. 왜냐하면 위의 변환에 따르면  $\lambda$ 복소평면 위에 있는  $|\lambda|=1$ 의 단위원은  $\eta$ 복소평면에 있는 허수축에 사상(mapping)되며,  $\lambda$ 복소평면 위의 단위원 내부는  $\eta$ 복소평면위의 왼쪽 반평면( $\text{Re}\eta < 0$ ) 위로 사상되기 때문이다. 변환된  $\eta$ 에 관한 다항식은 다음과 같다.

$$(A_0 - A_1 + A_2) \eta^2 + 2(A_0 - A_2) \eta + (A_0 + A_1 + A_2) = 0 \quad (21)$$

식 (21)에 Routh-Hurwitz 기준을 적용하면 안정조건은 다음과 같은 부등식으로 표현된다.

$$A_0 - A_1 + A_2 \geq 0 \quad (22)$$

$$A_0 - A_2 \geq 0 \quad (23)$$

$$A_0 + A_1 + A_2 \geq 0 \quad (24)$$

식 (22)와 (24)는  $r_n$ 과  $\Omega_n$ 의 값에 상관없이 항상 성립하지만 식 (23)은 다음과 같은 안정조건을 부여한다.

$$(1 - r_n)(4 - r_n\Omega_n^2) \geq 0 \quad (25)$$

시간간격이 일정할 경우, 즉  $r_n=1$ 인 경우 식 (25)는 자동성립하여 Newmark방법의 사다리꼴법칙은 무조건적 안정성을 갖게 된다. 그러나  $r_n \neq 1$ 일 때 이론적으로 이 알고리즘은 조건적 안정성을 갖는다.

모든 시간간격에 대하여 식 (25)를 만족시키지 않으면 사다리꼴법칙의 시간적분법에 대한 안정성이 저해되어 수치해가 발산한다. 그러나 몇 개의 계산단계에서 식 (25)를 만족시키지 않더라도 이 알고리즘에 의한 수치해는 발산하지 않고 안정성을 갖는다. 주어진 시간간격  $h_n$ 에 대해서 식 (25)를 만족하지 않는, 즉 불안정 영역에 있는 시간간격  $h_{n+1}$ 은 다음 두 조건중 하나로 표시된다.

$$h_n < h_{n+1} < \frac{4}{h_n\omega^2} \quad (26)$$

$$\frac{4}{h_n\omega^2} < h_{n+1} < h_n \quad (27)$$

다시말해, 식 (26)과 (27)은  $h_{n+1}$ 을  $h_n$ 과  $4/h_n\omega^2$  사이에서 선택하면 불안정한 수치해를 얻을 수 있음을 의미한다.

수치해의 불안정을 야기시키는 각 계산단계의 시간간격의 선택이 실제 계산에서 현실적으로 불가능하다면 시간간격 제어를 채택한 사다리꼴법칙은 안정한 수치해를 갖는다고 말할 수 있다. 이런 이유로 모든 계산단계에 대하여 식 (25)를 만족하지 않는 시간간격의 선택이 현실적으로 가능한지 조사하였다. 이를 위해 비감쇠 1자유도계 자유진동계를 생각하자.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (28)$$

여기서,  $\omega$ 는 비감쇠고유진동수이다. 주어진  $h_n$ 에 대하여 식 (26) 혹은 (27)을 만족시키는  $h_{n+1}$ 은 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h_{n+1} = \alpha h_n + (1 - \alpha) \frac{4}{h_n\omega^2} \quad (29)$$

여기서,  $\alpha$ 는 0과 1사이의 불규칙수(random number)이다. 식 (28)에 대하여 사다리꼴법칙을 이용

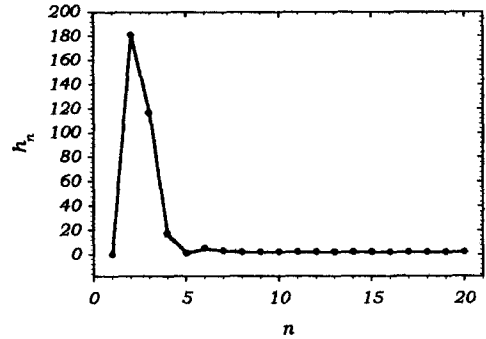


Fig. 1 Time step sizes in the unstable region when  $\omega = 1$  (rad/s)

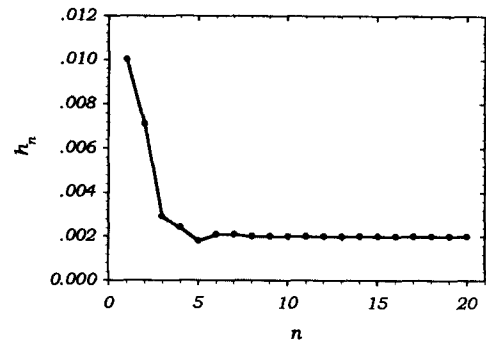


Fig. 2 Time step sizes in the unstable region when  $\omega = 1000$  (rad/s)

하여 수치해를 구하기 위해  $h_0=0.01$ 로 하였을 때,  $\omega=1$ 인 경우와  $\omega=1000$ 인 경우의 시간간격  $h_n$ 의 변화를 Fig. 1과 2에 도시하였다. Fig. 1과 2에서 볼 수 있듯이  $h_n$ 은 빠르게 일정한 값으로 수렴함을 볼 수 있다. 이때 수렴치는  $2/\omega$ 이다. 다시 말해, 몇 단계의 계산을 거친 후 시간간격은 일정해짐을 알 수 있다. 이는  $r_n$ 이 1로 빠르게 수렴함을 의미한다. 결론적으로 식 (26) 혹은 (27)을 만족시키는 시간간격의 선택은 현실적으로 불가능하므로 Newmark 방법의 사다리꼴 법칙은 시간간격이 각 계산단계에서 변화하더라도 무조건적 안정성이 보장된다고 결론질 수 있다.

#### 4. 정확도 분석

정확도는 식 (12)로 주어진 변위차분방정식에 대한 국부절단오차(local truncation error)에 의해 분석할 수 있다. 시간  $t_n$ 에서의 국부절단오차  $\tau(t_n)$ 은 다음과 같다.

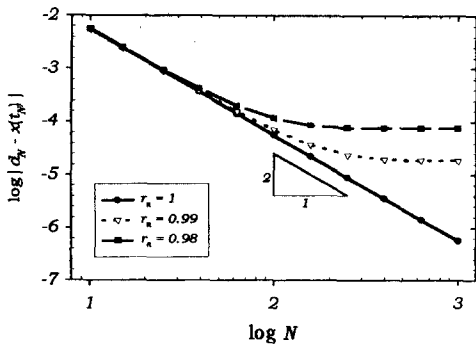


Fig. 3 Convergence rate of the trapezoidal rule with variable time step sizes

$$\tau(t_n) = h_n^{-2} [A_0 x(t_{n+2}) + A_1 x(t_{n+1}) + A_2 x(t_n)] \tag{30}$$

여기서,  $x(t_n)$ 은 시간  $t_n$ 에서의 엄밀해이다.  $x(t_{n+1})$ 과  $x(t_{n+2})$ 를 시간  $t_n$ 을 중심으로 Taylor 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h_n \dot{x}(t_n) + \frac{1}{2} h_n^2 \ddot{x}(t_n) + \dots \tag{31}$$

$$x(t_{n+2}) = x(t_n) + (h_n + h_{n+1}) \dot{x}(t_n) + \frac{1}{2} (h_n + h_{n+1})^2 \ddot{x}(t_n) + \dots \tag{32}$$

식 (31)과 (32)를 식 (30)에 대입하고  $\omega^2 x(t_n) - \ddot{x}(t_n)$ 으로 대치하면 절단국부오차는

$$\tau(t_n) = \frac{1}{3} r_n (1 - r_n^2) h_n x^{(3)}(t_n) - \frac{1}{3} r_n^3 (1 + r_n) h_n^2 x^{(4)}(t_n) + O(h_n^3) \tag{33}$$

로 표현된다. 식 (33)에서 볼 수 있듯이  $r_n=1$ 일 때 즉, 시간간격이 일정할 때 사다리꼴법칙은 2차 정확도를 가지며,  $r_n \neq 1$ 일 때 일반적으로 1차 정확도를 갖는다. 시간간격의 크기가 변화할 때의 시간적분법의 정확도를 시간간격이 일정할 때의 시간적분법의 정확도와 동일시 하는 일반적인 견해에 오류가 있음을 보여준다.

수치적으로 사다리꼴법칙의 정확도를 보여주기 위해서 식 (28)에서 정의한 1자유도계 비감쇠자유진동문제를 생각하자. 비감쇠고유진동수를  $\omega=1$ 로 하고 초기조건은  $x(0)=1$ 과  $\dot{x}(0)=1$ 로 주어졌다. 시간  $t_N=0.3$ 초일 때 변위에 대한 오차  $|d_N - x(t_N)|$

을 시간간격의 총개수  $N$ 에 대해 양방향 로그 축척으로 Fig. 3에 도시하였다. Fig. 3에서 각 선의 기울기는 수렴도(convergence rate), 즉 정확도의 차수를 나타낸다. 논의를 간단히 하기위해  $r_n$ 을 일정한 값 1, 0.99, 0.98의 3개의 경우에 대하여 정확도의 차수를 조사하였다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 일정한 크기의 시간간격을 선택하였을 때, 다시말해  $r_n=1$ 일 때, 잘 알려진 바와 같이 정확도의 차수는 2이다. 그러나 시간 간격이 변화할 때 정확도의 차수는 2보다 작아짐을 알 수 있다. 결론적으로 시간간격 조정을 채택한 Newmark 방법의 사다리꼴 법칙은 정확도의 차수가 1이다.

### 5. 결 론

Newmark 방법의 사다리꼴법칙을 갖고 시간간격 제어방법을 개발한 많은 연구자들은 암묵적으로 시간간격이 일정할 때의 무조건적 안정성과 2차 정확도를 받아들였다. 그러나 본 논문에서 시간간격의 크기를 변화시킬 때 사다리꼴법칙이 사실상 무조건적 안정성을 갖지만 정확도의 차수가 1차로 낮아진다는 사실을 밝혀냈다.

본 논문에서 제시한 접근방법은 시간간격 제어를 채택한 수치감쇠가 있는 시간적분법을 사용할 때, 일부 비선형문제에서 나타나는 불안정성 규명에 도움이 될 것이다. 그리고 이를 바탕으로 안정성이 보장된 수치감쇠와 시간간격제어가 있는 시간적분법의 개발이 기대된다.

### 후 기

본 연구는 1996년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 : ME96-C-25)의해 지원된 연구결과와 일부이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Shampine, L. F., 1977, "Local Error Controls in Codes for Ordinary Differential Equations," *Appl. Math. Comput.* 3, pp. 189~210.
- (2) Hairer, E., Nørsett, S. P. and Wanner, G., 1987, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag, Berlin.
- (3) Brenan, K. E., Campbell, S. L. and Petzold, L.

- R., 1989, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, North-Holland, New York.
- (4) Newmark, N. M., 1959, "A Method of Computation for Structural Dynamics," *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE 85(EM3), pp 67~94.
- (5) Hibbitt, H. D. and Karlsson, B. I., 1979, *Analysis of Pipe Whip.*, ASME Pressure Vessels and Piping Conference, San Francisco, CA, pp 25-29.
- (6) Hibbitt, H. D. and Karlsson, B. I., 1979, *Analysis of Pipe Whip.*, EPRI Report NP-1208, Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA.
- (7) Oughourlian, C. and Powell, G., 1982, *General Purpose Computer Program for Nonlinear Structural Analysis.*, Rept. No. UCB/EERC-82/21, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, CA.
- (8) Felippa, C. A. and Park, K. C., 1979, "Direct Time Integration Methods in Nonlinear Structural Dynamics," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 17/18, pp 277~313.
- (9) Park, K. C., 1982, "Time Integration of Structural Dynamics Equations," *Pressure Vessels and Piping : Design Technology*, A Decade of Progress(ASME, New York).
- (10) Park, K. C. and Underwood, P. G., 1980, "A Variable-step Central Difference Method for Structural Dynamics Analysis - Part 1. Theoretical Aspects," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 22, pp 241 ~258.
- (11) Underwood, P. G. and Park, K. C., 1980, "A Variable-step Central Difference Method for Structural Dynamics Analysis - Part 2. Implementation and Performance Evaluation," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 23, pp 259~279.
- (12) Bergan, P. G. and Mollestad, E., 1985, "An Automatic Time Stepping Algorithm for Dynamic Problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 49, pp 299~318.
- (13) Lee, S. H. and Hsieh, S. S., 1990, "Expedient Implicit Integration with Adaptive Time Stepping Algorithm for Nonlinear Transient Analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 81, pp 151~172.
- (14) Lee, S. H. and Hsieh, S. S., 1991, "Application of a Self-adaptive Algorithm to Non-linear Finite Element Analysis," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 32, pp 1057~1077.
- (15) Zienkiewicz, O. C., Wood, W. L. and Hine, N. W., 1984, "A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 1 : General Formulation and Applications," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 20, pp 1529~1552.
- (16) Zienkiewicz, O. C. and Xie, Y. M., 1991, "A Simple Error Estimator and Adaptive Time Stepping Procedure for Dynamic Analysis," *Earthquake Engrg. Struct. Dynam.*, 20, pp 871~887.
- (17) Zeng, L. F., Wiberg, N. E., Li, X. D. and Xie, Y. M., 1992, "A Posteriori Local Error Estimation and Adaptive Time-stepping for Newmark Integration in Dynamic Analysis," *Earthquake Engrg. Struct. Dynam.*, 21, pp 555~571.
- (18) Givoli, D. and Henigsberg, I., 1993, "A Simple Time-step Control Scheme," *Commun. Numer. Methods Engrg.*, 9, pp 873~881.
- (19) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation : the Generalized- $\alpha$  Method," *ASME J. Appl. Mech.*, 60, pp 371~375.
- (20) Hulbert, G. M. and Jang, I., 1995, "Automatic Time Step Control Algorithm for Structural Dynamics," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 126, pp 155~178.
- (21) Hilber, H. M. Hughes, T. J. R. and Taylor, R. L., 1977, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics," *Earthquake Engrg. Struct. Dynam.*, 5, pp. 283~292.
- (22) Wood, W. L., Bossak, M. and Zienkiewicz, O. C., 1981, "An Alpha Modification of Newmark's method," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 15, pp 1562~1566.