

<논 문>

공액근사개념과 Loubignac의 반복계산법을 이용한 국부응력장 개선에 대한 연구

송 기 남

(1997년 2월 1일 접수)

A Study on the Improvement of the Local Stress Field Using the Theory of Conjugate Approximations and Loubignac's Iterative Method

Kee-Nam Song

Key Words : Displacement-Formulated Finite Element Method(변위형 유한요소법), Local Stress Field(국부 응력장), Conjugate Stress(공액응력), Fundamental Matrix(기본행렬), Ratio of Force Imbalance Norm(힘 불균형 크기의 비), Theory of Conjugate Approximations(공액근사이론)

Abstract

Based on the application of the theory of conjugate approximations and the Loubignac's iterative method in a local region, a method to improve the stress field in a displacement-formulated finite element solution has been proposed. The validity of the proposed method has been tested through two examples: a thick cylinder under internal pressure loading and an infinite plate with a central circular hole subjected to uniaxial tension. As a result of analysis of the examples, it was found that the stress field obtained for the local region model by the proposed method approximates well for the whole domain model. In addition, it was found that because of a significant decrease in the computing time to obtain the improved stress field, the proposed method is efficient and useful for the detailed stress analysis in local regions.

기 호 설 명

$[N]$: 요소의 형상함수행렬	$\{u\}^e$: 요소의 변위장
$\Phi_{\Delta}(x)$: 변위형 유한요소에서 절점의 형상함수	$\{d\}^e$: 요소의 절점변위벡터
$[B]$: 요소의 변형률행렬	$\{\sigma\}^e$: 요소의 변위기초응력장
$[D]$: 재료의 구성행렬	σ^* : 연속인 응력장
Ω_e : 요소의 영역	S^i : 절점(i)에서 공액응력(식 (10)의 S^{ij} 과 동일함)
$[K]^e$: 요소의 강성행렬	S_i : 절점(i)에서 응력의 공액성분(식 (9)의 S_{Δ}^{ij} 과 동일함)
$\{F\}^e$: 요소의 절점력벡터	$C_{\Delta I}$: 기본행렬(fundamental matrix)
$[K]_L$: 국부영역 모델의 강성행렬	
u_L : 국부영역 모델에서 절점변위	
f_L : 국부영역 모델에서 절점력	

1. 서 론

*회원, 한국원자력연구소 신형핵연료기술개발과제

변위형 유한요소법은 총 포텐셜에너지의 최소화

원리에 근거하여 형성된 이론의 간단성, 우수한 수학적 특성 및 수치해석의 용이함 등의 장점으로 인하여 여러 가지 공학문제에 대한 해를 구하는데 가장 보편적이며 효과적인 도구로 사용되고 있으며 상업용 프로그램에도 널리 이용되고 있다. 그러나 변위형 유한요소법의 단점중에 하나는 이 방법에서 얻은 일차적인 수치해인 변위장은 유한요소들의 경계에서 연속성(C^0 continuity)이 유지되고 있으며, 정확도도 비교적 높은 편이나 변위-변형도 및 응력-변형도 구성방정식에서 구한 변위기초응력장은 요소경계면에서 불연속일 뿐만 아니라 정확도가 변위장에 비해 떨어진다는 것이다.⁽¹⁾

이러한 단점을 해소하기 위해 크게 3가지 분야로 연구가 진행되어 왔다. 첫째, 응력의 불연속을 근본적으로 해결하기 위해 변위장 이외에 응력과 변형도를 추가적인 독립변수로 취급하는 혼합 유한요소법이 발전되어 비압축성 물질의 문제해석을 비롯하여 우수한 수치적 특성을 갖는 판/셸요소 개발에 성공적으로 이용되었으나 독립변수가 늘어남에 따라 해를 구하기 위한 수치계산량이 다소 늘어나며⁽²⁾ 상업용 프로그램에의 사용이 일반화되고 있지 않다. 둘째, 변위형 유한요소법에서 얻은 불연속한 변위기초응력장을 기초로 하여 영역내에서 응력의 분포를 재구성하는 방법들이, 즉 개선된 응력장을 불연속한 변위기초응력장과 완전히 별개로 취급하여 최소자승오차법(least square error method)에 바탕을 둔 전체/국부 평탄화법(smoothing method),^(3,4) 공액근사(conjugate approximation)개념을 이용하여 전영역에서 연속인 응력분포를 계산하는 방법⁽⁵⁻⁹⁾ 그리고 정해에 빠르게 수렴하는(super-convergent) 절점응력 계산방법 등이⁽¹⁰⁻¹³⁾ 제시되고 있다. 이들 중 개개의 유한요소내에서 응력장을 평탄화하는 국부 평탄화법으로부터 구한 절점응력은 요소들 사이에서 연속성이 없으나 이들을 절점에서 평균할 경우 대부분 개선된 절점응력을 구할 수 있으며, 계산에 소요되는 계산량이 매우 작기 때문에 현재 ANSYS 코드를 비롯한 여러 상업용 유한요소 프로그램의 후처리과정(postprocess)⁽¹⁴⁾으로 널리 사용되고 있는 반면, 전체 평탄화법 및 공액근사법으로부터 구한 응력장은 영역내에서 연속이나 이러한 연속응력장을 구하는데 소요되는 추가계산량이 유한요소법의 변위해를 얻는데 필요한만큼 되어서, 그리고 빠르게 수렴하는 절점응력방법은 연구단계에 있어서 아직까지는 상업용 프로그램에 널리 사

용되고 있지 않다. 셋째, 변위형 유한요소법에서 얻고 수정한 연속응력장은 영역내에서 유한요소 평형방정식을 만족하고 있지 않기때문에 유한요소 평형방정식을 맞추기 위해 변위장을 반복적으로 개선하는 반복적 알고리즘(iterative algorithm)을 개발하여 변위장을 개선하고 아울러 연속 응력장을 개선하는 것이다.⁽¹⁵⁻¹⁸⁾ 그러나 이 방법에 의해서 개선된 변위해와 연속응력장은 원래의 변분식을 만족한다는 장점이 있으나 반복적인 알고리즘의 특성상, 추가로 요구되는 계산량이 너무 많다는 단점을 갖고 있다.

본 연구에서는 계산량이 추가로 소요되어서 사용하는 데 제한이 있으나 에너지개념을 도입하여 물리적으로 의미가 있는 공액근사법의 특성과 반복적 알고리즘에 의한 변위장 개선방법의 장점을 이용하고 이들 방법을 전체영역에 적용하는 대신에 국부 영역에 적용할 수 있는 근사방법을 제안함으로써 공학문제에서 상세한 응력장 해석이 요구되는 국부 영역에서의 연속응력장의 정확도를 향상시킬 수 있는 방안을 제시하고자 한다. 아울러 응력장에 대한 정해가 알려진 문제들, 즉 내압을 받고 있는 두꺼운 실린더와 중앙에 원형구멍이 내재된 무한평판에서 단일방향의 인장하중을 받는 예제에 대하여 본 연구에서 제안한 방법을 적용하여 유용성을 검증하고자 한다.

2. 선형 탄성문제의 변위형 유한요소해석 및 응력평가

선형 탄성문제를 변위형 유한요소법으로 해석하는 경우 유한요소 (e)에서 응력벡터 $\{\sigma\}^e$ 와 변형률 벡터 $\{\epsilon\}^e$ 그리고 변위벡터 $\{u\}^e$ 는 다음과 같이 표현된다.^(9,19)

$$\{\epsilon\}^e = [S] \cdot \{u\}^e \quad (1)$$

$$\{\sigma\}^e = [D] \cdot \{\epsilon\}^e = [D] \cdot [S] \cdot \{u\}^e \quad (2)$$

$$\{u\}^e \approx [N] \cdot \{A\}^e \quad (3)$$

단, $[S]$, $[D]$, $[N]$ 은 각각 변위-변형률(미분) 행렬, 구성행렬, 형상함수행렬이며, $\{A\}^e$ 는 요소의 절점변위벡터이다.

위의 식을 가중잔차법(weighted residual method) 또는 포텐셜에너지 최소화조건에 대입하여 정리하면 요소에서의 유한요소 방정식은 다음과 같이 표

현된다.

$$[K]^e \cdot \{\Delta\}^e = \{F\}^e \quad (4)$$

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} ([S] \cdot [N])^T \cdot [D] \cdot [S] \cdot [N] d\Omega \quad (5)$$

이들 식에서 상첨자 e 는 요소를 나타내고 $[K]^e$, $\{F\}^e$ 는 각각 요소의 강성행렬과 절점력벡터이다.

식 (4)의 유한요소 방정식을 유한요소법의 표준 절차에 의하여 계 전체에 대한 유한요소 방정식으로 조합하고 경계조건을 적용하여 행렬방정식을 풀면 각 절점에서의 변위를 구할 수 있다. 이와같이 요소의 절점변위벡터 ($\{\Delta\}^e$)가 결정되면 요소내에 분포하는 변위기초응력 ($\{\sigma\}^e$)은 절점변위 ($\{\Delta\}^e$)와 형상함수 그리고 변위-변형률, 변형률-응력의 구성 관계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\{\sigma\}^e = [D] \cdot [S] \cdot [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad (6)$$

3. 공액근사법에 의한 응력계산방법

변위형 유한요소법에서 변위장은 유한차원 공간의 비직교성 기저함수들의 선형조합으로 근사화되며 변위장과 공액관계인 힘(응력)은 변위장을 근사화하는데 사용한 기저함수들과 직교성을 갖는 새로운 기저함수로 표시되어야 하는 것이 물리적인 의미에서 힘과 변위의 내적으로 표현되는 에너지 범함수에 근거한 유한요소법의 취지에 맞는다는 관점에서 공액근사론이 제안되었다.⁽⁶⁾ 공액근사법에 의한 응력계산 방법을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 유한요소내에서 변위장(u_i)은 절점(Δ)에서의 기저함수($\Phi_{\Delta}(x)$)와 절점변위(u_i^{Δ})를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$u_i = u_i^{\Delta} \Phi_{\Delta}(x) \quad (7)$$

둘째, 변위기초응력장(σ^{ij})은 변위-변형률, 변형률-응력 구성식에서 다음과 같이 표현된다. 여기서 E^{ijmn} 은 재료의 탄성모듈텐서이며, $\Phi_{\Delta,n}(x)$ 은 형상함수($\Phi_{\Delta}(x)$)를 공간좌표(x_n)로 편미분한 것이다.

$$\sigma^{ij} = E^{ijmn} u_m^{\Delta} \Phi_{\Delta,n}(x) \quad (8)$$

셋째, 공액응력($S^{ij\Delta}$)은 변위기초응력에 근거하여 다음과 같은 방정식에서 계산된다.

$$S_{\Delta}^{ij} = \langle \sigma^{ij}, \Phi_{\Delta}(x) \rangle = \int_{\Omega} \sigma^{ij} \Phi_{\Delta}(x) d\Omega \quad (9)$$

$$C_{\Delta r} S^{ij\Delta} = S_{\Delta}^{ij} \quad (10)$$

여기서, 기초행렬(fundamental matrix) $C_{\Delta r}$ 은 유한요소 공간에서 변위장을 근사하는 기저함수($\Phi_{\Delta}(x)$)들의 내적으로 정리된다. 즉,

$$C_{\Delta r} = \langle \Phi_{\Delta}(x), \Phi_r(x) \rangle = \int \Phi_r(x) \cdot \Phi_{\Delta}(x) d\Omega \quad (11)$$

넷째, 영역내에서 연속인 응력장($\sigma^*(x)$)은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma^*(x) = S_{\Delta}^{ij} \Phi^{\Delta}(x) = S^{ij\Delta} \Phi_{\Delta}(x) \quad (12)$$

여기서, $\Phi^{\Delta}(x)$ 는 변위장의 기저함수인 $\Phi_{\Delta}(x)$ 와 직교성을 갖는 공액기저함수로 아래와 같이 표현된다.

$$\Phi^{\Delta}(x) = C_{\Delta r}^{-1} \Phi_r(x) \quad (13)$$

공액근사론에 입각하여 응력을 나타낼 경우 물리적 의미에서 일관성이 있는 응력장일 뿐만 아니라 영역내에서 연속이어서 요소간의 불연속한 응력 분포를 갖는 변위기초응력의 단점을 해소할 수 있으며 또한 경계상에서 응력의 정확도가 향상되는 것으로 알려져 있으나⁽⁶⁻⁷⁾ 공액응력을 계산하기 위해서는 유한요소 방정식에 비견되는 식 (10)의 방정식을 추가로 풀어야 하는 단점이 있다.

4. 평형조건 만족을 위한 반복해법

일반적으로 불연속한 변위기초응력장을 평탄화하여 재구성한 연속응력장은 유한요소 평형방정식을 만족하지 못한다. 따라서 유한요소 평형방정식을 만족할 수 있도록 변위장을 반복적으로 개선함으로써 연속응력장의 정확도를 향상시키는 반복적 알고리즘이 Loubignac 등⁽¹⁵⁾에 의하여 제안되었는데 이를 요약하면 다음과 같다. 여기서, $[K]$ 를 구조강성행렬, $\{D\}$ 를 절점의 변위벡터 그리고 $\{R\}$ 을 절점의 하중을 나타낸다.

(1) $[K]\{D\} = \{R\}$ 에서 $\{D\}$ 를 구한다.

(2) $\{D\}$ 와 변위-변형률, 변형률-응력 구성식으로부터 요소사이에서의 불연속한 응력을 구하고 절점에서의 평균응력을 사용하여 영역내에서 연속인 응력장 $\{\bar{\sigma}\} = [N]\{\bar{\sigma}_N\}$ 을 가정한다.

(3) 연속인 응력장을 사용하고 유한요소의 응력-등가절점력 관계식으로부터 절점력 $\{Q\}$ 를 구한다.

$$\{Q\} = \sum_{\text{element}} \int_V [B]^T \{\bar{\sigma}\} dV$$

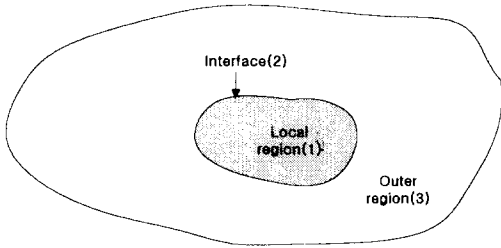


Fig. 1 Illustration of the whole domain and the local region

(4) 위의 (1)에서 식이 정해지면 $\{Q\}$ 는 $\{R\}$ 과 동일하여야 하며, $\{Q\}-\{R\}$ 를 “힘 불균형”으로 정의한다. 이러한 “힘 불균형”을 보정하기 위해 새로운 변위장을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } \{\Delta D\}_1 &= K^{-1}(\{R\}-\{Q\})_1 \\ \{D\}_2 &= \{D\}_1 + \{\Delta D\}_1 = K^{-1}(2\{R\}-\{Q\})_1 \end{aligned}$$

(5) $\{D\}_2$ 을 (2)~(4)의 과정에 대입하여 새로운 변위장($\{D\}_3$)을 구한다.

$$\{D\}_3 = \{D\}_2 + \{\Delta D\}_2 = K^{-1}(3\{R\}-\{Q\})_1 - \{Q\}_2$$

(6) 상기 (1)~(5)의 과정을 $\{\Delta D\}_1$ 가 미리 정해진 값보다 작아질 때까지 반복수행한다.

5. 국부영역의 응력장 개선방안

Fig. 1은 변위형 유한요소 모델에서 국부영역, 국부영역과 외부영역의 경계선(영역) 그리고 외부영역을 나타낸 것으로 전영역에 대한 유한요소 방정식을 영역별로 구분하여 나타내면 다음과 같이 표현된다. 여기서, 하첨자 1은 국부영역, 하첨자 2는 경계선(영역) 그리고 하첨자 3은 외부영역을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

식 (14)에서 첫째 열 및 둘째 열의 식만을 취하여 국부영역 및 경계선(영역)에서의 방정식만으로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 - K_{23}u_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

즉, $[K]_L u_L = f_L$ 로 표현된다. 여기서, 하첨자 L

은 국부영역과 경계선(영역)을 지칭한다.

Jara-Almonte 등⁽²⁰⁾은 외부영역에서 유한요소를 세분화하지 않으면서 국부영역에서만 유한요소를 세분화하고 외부영역의 변위(u_3)와 외부영역과 경계선(영역)간의 강성행렬(K_{23})로 경계절점에서의 하중을 보정한 식 (15)의 유한요소 방정식을 풀면 국부영역에서의 유한요소 해가 개선될 수 있음을 보였다. 물론 이 경우에도 유한요소들 간의 경계면에서 응력이 불연속하게 되므로 별도의 응력 평탄화 과정을 거쳐야만 연속된 응력장을 얻을 수 있다. 그러나 본 연구에서는 Jara-Almonte의 방법과는 다르게 식 (15)의 방정식을 이용하되 국부영역에서 유한요소의 크기 및 형태를 그대로 유지하며 공액근사개념 및 반복적인 변위장 개선알고리즘을 국부영역에 적용함으로써 얻어진 연속 응력장이 유한요소 평형방정식을 만족하는, 즉 정확도가 개선된 응력해를 구하고자 한다. 이를 간략히 설명하면 다음과 같다.

Fig. 1의 전영역에 대하여 공액근사법을 적용할 경우 식 (10)의 방정식을 영역별로 구분하여 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, S^i 는 공액응력을 나타내고, S_i 는 식 (9)에서와 같이 불연속한 변위기초응력장과 변위장의 기저함수의 내적으로 정의되는 ‘응력의 공액성분’이다. 그런데, 공액기저함수의 특성상, 즉 공액기저함수들은 식 (13)과 같이 유한요소법의 기저함수들의 선형적인 관계로 표현되며 기저점에서 멀어질수록 그 크기가 현격히 감소하는 감쇠특성이 있는 것으로 알려져 있고 응력의 구배가 심하지 않은 부위에서 변위기초응력장에 근거한 절점의 평균응력이 공액응력(S^3)과도 크게 차이가 나지 않는 것으로 알려져 있다.⁽⁵⁾ 따라서 식 (16)에서 첫째 열 및 둘째 열의 방정식만을 취하고 국부영역의 범위를 응력의 구배가 심하지 않은 곳까지 정하면 외부영역의 공액응력(S^3)은 변위기초응력장에 근거한 절점 평균응력(σ_3)으로 대체할 수 있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 - C_{23}S_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 - C_{23}\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (17)에서 얻은 절점(i)의 공액응력(S^i)과 형상함수(N_i^*)로 표시되는 유한요소 응력장(σ^*)을 유한요소 평형방정식에 대입하여 요소의 절점력을 계산하면 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma^* = N_i^* S^i \quad (18)$$

$$f_e = \int_{\Omega_e} [B]^T \sigma^* d\Omega_e = \int_{\Omega_e} [B]^T N_i^* d\Omega_e S^i \quad (19)$$

국부영역 및 경계선(영역)을 포함한 영역의 유한요소들에 대하여 식 (19)를 적용하고 조합하면 영역내에서 절점력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f^* &= \sum_{\text{element}} f_e = \sum_{\text{element}} \int_{\Omega_e} [B]^T \sigma^* d\Omega_e \\ &= \sum_{\text{element}} \int_{\Omega_e} [B]^T N_i^* d\Omega_e S^i \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 절점력은 식 (19)의 유한요소 평형조건에서의 절점력과 일치하지 않으며 이러한 절점력 차이의 크기($\|\Delta f\|$)를 ‘힘 불균형의 크기’(force imbalance norm)로 정의하고 국부영역에서 다음과 같은 반복적 알고리즘을 적용하여 ‘힘 불균형의 크기’가 감소하도록 변위장 반복계산을 수행한다.

$$(1) \Delta u_i^1 = K_L^{-1}(f_L - f^*) \quad (21)$$

$$(2) \Delta u_i^{t+1} = u_i^t + \Delta u_i^t \quad (22)$$

$$(3) \sigma_i^{t+1} = [D] \cdot [B] u_i^{t+1} \quad (23)$$

(4) 식 (19) 및 (20)를 이용하여 영역에서의 절점력을 계산한다.

(5) 식 (23)의 변위기초응력장을 이용하고 식 (17)의 방법으로 공액응력장을 계산한다.

(6) 식 (15)과 식 (20)에서의 절점력 차이의 크기(즉, ‘힘 불균형 크기’; $\|\Delta f\|_i$)를 보정하기 위한 ‘섭동 변위장의 크기의 변화량’($\|\Delta u\|_i - \|\Delta u\|_{i+1}$)이 미리 정해논 값보다 크면(본 논문에서는 1.0×10^{-3} 을 사용하였음) 상기 (1)~(5)의 과정을 반복한다.

6. 수치계산 및 검토

유한요소 크기 및 형태를 유지하면서 국부영역에서 유한요소 평형방정식을 만족하도록 반복적으로 변위장을 개선시키고 아울러 공액근사개념을 사용하여 연속응력장을 개선할 수 있도록 앞의 5절에서

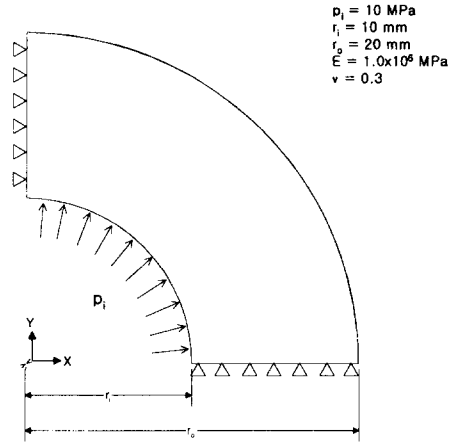


Fig. 2(a) Thick cylinder under internal pressure

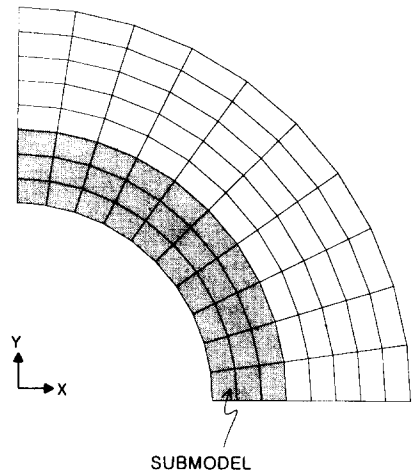


Fig. 2(b) Finite element model

제안된 방법을 정해가 알려진 문제들, 즉, 내압을 받고 있는 두꺼운 실린더 및 중앙에 원형 구멍이 내재된 무한평판에 적용하였다.

6.1 내압을 받는 두꺼운 실린더

Fig. 2(a)는 실린더 해석모델의 영역과 경계조건을 나타낸 것이며, Fig. 2(b)는 사각형 평면응력요소로 모델링한 유한요소 모델을 보여주고 있다. Fig. 2(b)에서 빗금친 영역은 국부영역 모델을 나타낸 것이다. Fig. 2(b)의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법(ANSYS 코드)으로 해석하여 얻은 응력장(개개의 유한요소에 대하여 국부응력 평

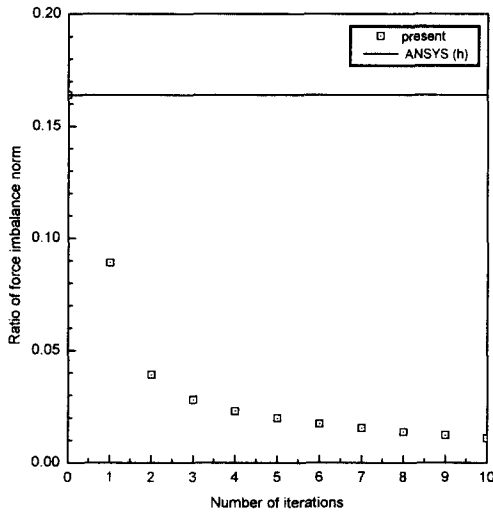


Fig. 3 Ratio of force imbalance norm vs. Number of iteration in the whole domain

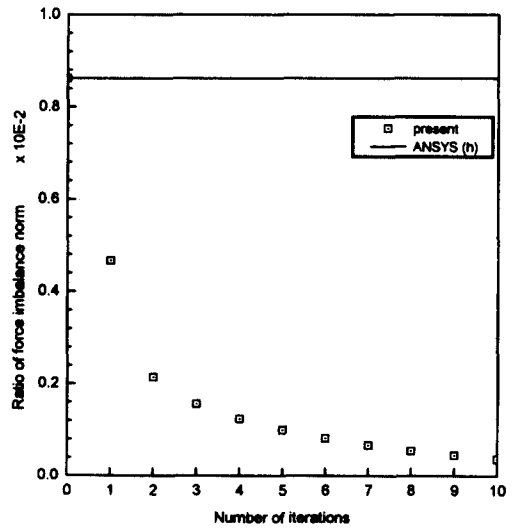


Fig. 4 Ratio of force imbalance norm vs. Number of iteration in the local region

탄화법을 적용하여 얻은 절점응력들의 평균값에 기초한 연속응력장)과 전체영역 모델 및 국부영역 모델에서 변위장을 개선하여 구한 응력장 그리고 엄밀해에서 얻은 응력장들을 비교하였다.

Fig. 3과 Fig. 4는 각각 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대하여 반복적인 변위장 개선 및 공액근사개념을 적용하였을 때에 개선된 연속응력장에서 '힘 불균형 크기의 비' ($\| \Delta f \|_i / \| f \|_0$)가 반복계산횟수에 따라 변화하는 모습을 나타낸 것이며 여기서 $\| f \|_0$ 은 원래의 유한요소 평형방정식에서 '힘 크기'를 나타내며, $\| \Delta f \|_i$ 은 i 번째 반복계산횟수에서의 개선된 응력장에 근거한 '힘 불균형 크기'를 나타낸다. Fig. 3과 Fig. 4에서 보면 반복계산횟수가 증가함에 따라 '힘 불균형 크기의 비'가 현격히 감소하고 있는데 이것은 반복계산횟수가 증가함에 따라 응력장이 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 개선되고 있음을 보여준다. 또한 반복계산 초기에 '힘 불균형 크기의 비'가 급격히 감소하고 이후에는 점차로 감소량이 둔화되는 수렴현상을 보여주고 있고 수차 이내의 반복계산 횟수에서도 응력장이 현격히 개선될 수 있음을 보여주고 있다.

Fig. 5는 Fig. 2(b)의 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대하여 응력장을 개선한 결과 실린더 내면에서 원주방향으로 반경방향응력(σ_r)의 분포를 나타낸 것이다. Fig. 5에서 보면 다음의 3가지 사항을 관찰할 수 있다. 첫째, 변위형 유한요소해석

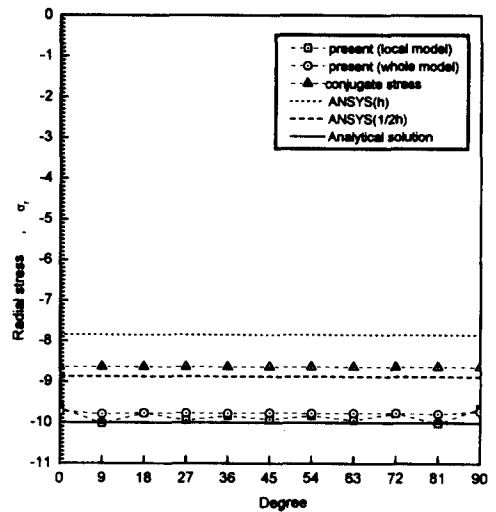


Fig. 5 Radial stress along the inner radius

에서 얻은 반경방향응력은 엄밀해보다 21.53% 작으며 Fig. 2(b)의 모델에 사용된 유한요소보다 요소의 크기를 1/2로 세분화하여도(절점의 수가 99개에서 357로 증가) 변위형 유한요소해석에서 얻은 반경방향응력은 엄밀해보다도 11.31% 작은 반면 Fig. 2(b)의 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대하여 본 연구에서 제시한 방법을 적용하여 얻은 응력은 엄밀해에 비하여 최대 3.47% 정도밖에 차이가 나지 않아서 응력의 정확도가 크게 향상되었음을 알 수 있다. 둘째, 반복적 알고리즘을 사용하지

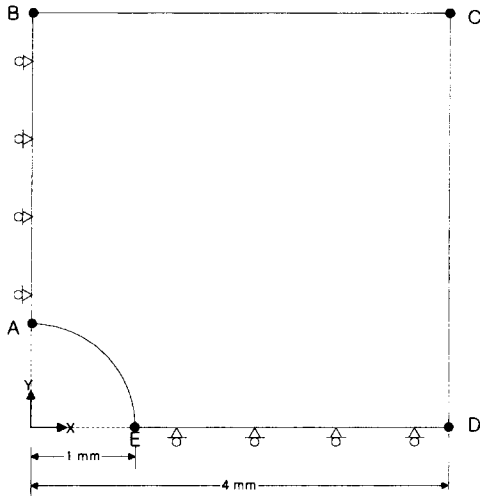


Fig. 6(a) Infinite plate with a central circular hole subjected to unidirectional tension

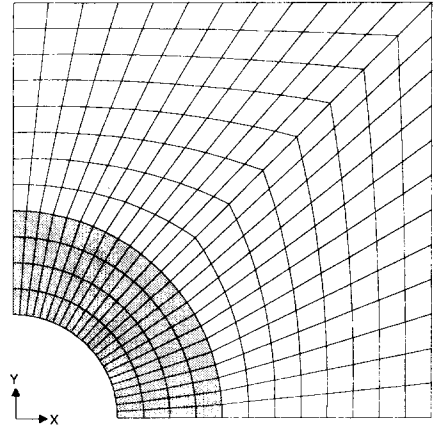


Fig. 6(a) Finite element model of infinite plate with a central circular hole

않고 공액근사개념만을 적용한 경우에 전체영역 모델 및 국부영역 모델의 해석결과를 살펴보면 실린더 내면에서 원주방향으로의 반경방향응력은 엄밀해에 비하여 13.6 % 정도 작으며 요소의 크기를 1/2로 세분화한 변위형 유한요소해와는 약 2.3% 정도 밖에 차이가 나지 않는다. 이것은 공액근사개념이 경계상에서 응력을 개선시킨다는 예전 연구자들의 연구결과⁽⁶⁻⁷⁾와 일치하고 있다. 셋째, 국부영역 모델에서 얻은 응력분포는 전체영역 모델에서 얻은 결과와 비교할 때 응력의 크기는 비교적 잘 일치하고 있으나 원주방향(θ)으로 응력값이 약간 진동(oscillation)하는 현상이 발견되었다. 이러한 현상은 공액기저함수의 특성중의 하나로 전체영역 모델에서도 발견되고 있으나 국부영역 모델에서 다소 심화되는 것은 실제로는 전체영역 모델에서는 국부영역 모델에 사용된 외부영역의 변위장(u_3) 및 응력장(S^3)이 반복계산시에 약간 변화하고 있으나 본 연구에서의 국부영역 모델에서는 외부영역의 변위장 및 응력장이 고정되어 있다고 가정하여서 기인되는 것으로 추정된다.

한편 본 연구에서 제시한 방법으로 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대한 수치계산 시간을 비교한 결과, $\|A\|_1$ 가 $\|A\|_0$ 의 10% 이하가 될때까지 소요된 수치계산시간은 CYBER-970으로 계산할 때 전체영역 모델(절점수 99개)에서는 316.052초(Fig. 3의 반복계산횟수 7회에 해당됨) 그리고 국부영역 모델(절점수 33개)에서는 7.076초(Fig. 3의

반복계산횟수 7회에 해당됨)가 소요되고 있다. 여기서 본 논문 5절의 알고리즘 (5)에서 설정한 '섭동 변위장의 크기의 변화량'이 $1.0E-03$ 이하로 될 때의 반복계산횟수는 전체영역 모델인 경우 10회, 국부영역 모델인 경우 3회이었다. 위에서 '힘 불균형 크기의 비'로 비교한 것은 힘 불균형을 개선하기 위해 변위장을 개선한 것이므로 힘 불균형의 정도를 보기위해 편의상 비교한 것이다. 따라서 본 연구에서 제안한 방법으로 얻은 국부영역에서 응력장은 전체영역 모델에서 얻은 결과와 비견되나 수치계산 시간이 훨씬 줄어들 수 있어서 국부영역에서 응력을 개선하는데 유용하게 이용될 수 있다.

6.2 중앙에 원형구멍이 내재된 무한평판

Fig. 6(a)는 중앙에 원형구멍이 내재된 무한평판 해석모델의 영역과 경계조건을 나타낸 것이며, 각 경계들에서 응력경계조건은 다음과 같다.

경계 BC, CD

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \\ \sigma_y &= -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \\ a &= 1.0 \end{aligned}$$

경계 AB, ED

$$\tau_{xy} = 0$$

경계 AE

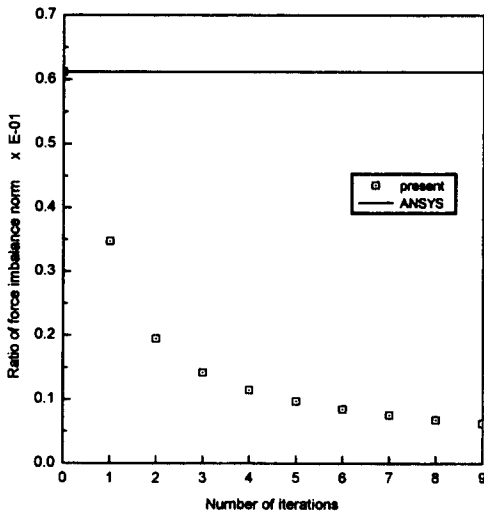


Fig. 7 Ratio of force imbalance norm vs. number of iteration in the whole domain

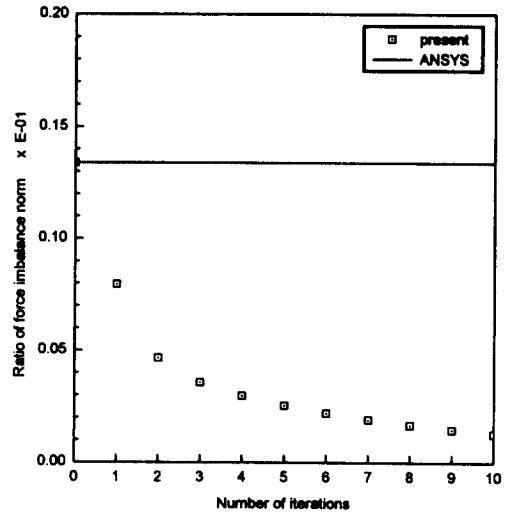


Fig. 8 Ratio of force imbalance norm vs. number of iteration in the submodel

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Fig. 6(b)는 사각형 평면응력요소로 모델링한 유한요소 모델을 보여주고 있는데 Fig. 6(b)에서 빗금친 영역은 국부영역 모델을 나타낸 것이다. Fig. 6(b)의 유한요소 모델에 대하여 변위형 유한요소법으로 해석하여 얻은 응력장(ANSYS 코드에서와 같이 국부응력 평탄화법에서 얻은 절점응력들의 평균값에 기초한 연속응력장)과 전체영역 모델 및 국부영역 모델에서 변위장을 개선하여 구한 응력장 그리고 엄밀해에서 얻은 응력장을 비교하였다.

Fig. 7과 Fig. 8은 각각 전체영역 모델(절점수 325개) 및 국부영역 모델(절점수 125개)에 대하여 반복적인 변위장 개선 및 공액근사개념을 적용하였을 때 개선된 연속응력장에서 ‘힘 불균형 크기의 비’ ($\|df\|_0 / \|f\|_0$)가 반복계산횟수에 따라 변화하는 모습을 나타낸 것이다. Fig. 7과 Fig. 8에서 보면 반복계산횟수가 증가함에 따라 ‘힘 불균형 크기의 비’가 현격히 감소하고 있는데 이것은 반복계산횟수가 증가함에 따라 응력장이 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 개선되고 있음을 보여준다. 또한 반복계산 초기에 ‘힘 불균형 크기의 비’가 급격히 감소하고 이후에는 점차로 감소량이 둔화되는 수렴현상을 보여주고 있고 수차 이내의 반복계산횟수에서도 응력장이 현격히 개선될 수 있음을 보여주고 있다.

Figs. 9, 10, 11은 Fig. 6(b)의 전체영역 모델 및 국부영역 모델에 대하여 응력장을 개선한 결과 원형 구멍의 원주(즉, 경계 AE)를 따라, 반경방향의 수직응력(σ_r), 전단응력($\tau_{r\theta}$) 및 원주방향응력(σ_θ)의 분포를 나타낸 것이다. Figs. 9, 10에서 보면 다음의 2가지 사항을 관찰할 수 있다. 첫째, Fig. 6(b)와 같이 비교적 세밀한 유한요소를 사용하고 있음에도 불구하고 변위형 유한요소 응력장(국부응력 평탄화법을 이용하여 절점의 평균응력으로 재구성한 연속응력장)은 이론해와 많은 차이를 보이고 있다. 반면 전체영역 모델에 대하여 공액근사개념을 적용한 응력해석결과는 변위형 유한요소 응력장보다도 어느 정도 개선되어 이론해에 접근하고 있으며 공액근사개념에 반복적 변위장 개선방법을 추가적으로 적용할 경우의 응력해는 이론해에 더욱 접근하고 있다. (참고로 Fig. 6(b)의 유한요소 모델보다 조야한 유한요소를 사용한 경우에도 유사한 경향을 보이고 있으나 수렴속도가 본 예제의 경우보다 약간 늦어짐.) 둘째, 국부영역에서의 응력장들이 전체영역에서 구한 응력장들과 큰 차이가 없다. 이것은 국부영역에 공액근사개념 및 변위장 개선방법을 근사적으로 적용할 경우 전체영역에 대하여 공액근사개념과 반복적인 변위장 개선방법을 적용할 경우보다 계산시간이 크게 줄어들 수 있을 뿐만 아니라 국부영역에서 얻은 결과가 전체영역에서 얻은 결과와 비견할 수 있어서 국부영역에 대한 상세응력 해석시에 본 연구에서 제안한 방법이 유용

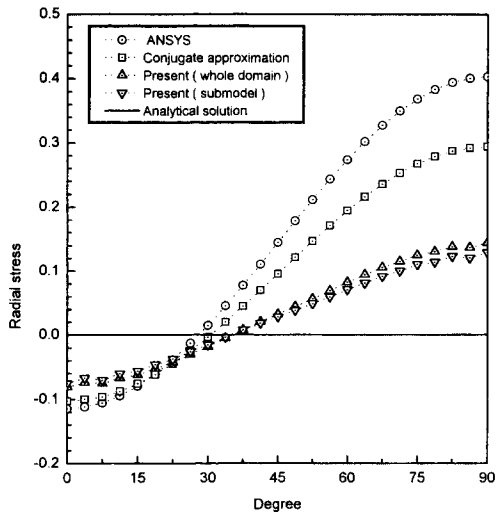


Fig. 9 Variation of the Radial stresses along the boundary AE

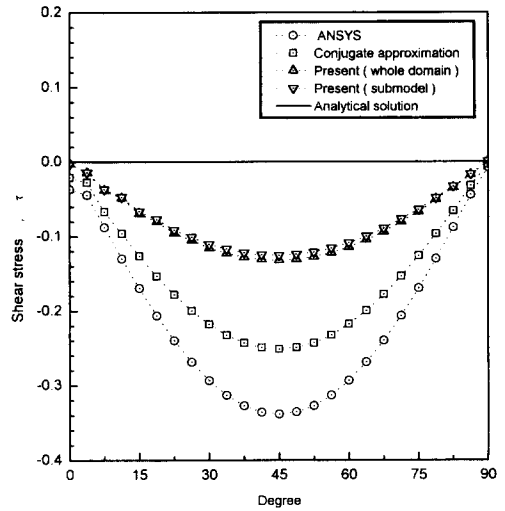


Fig. 10 Variation of the shear stresses along the boundary AE

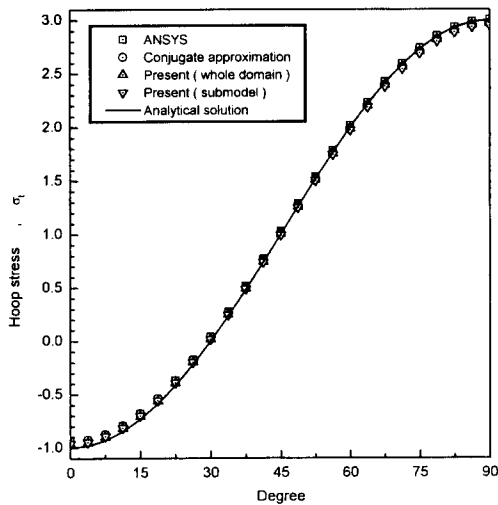


Fig. 11 Variation of the hoop stresses along the boundary AE

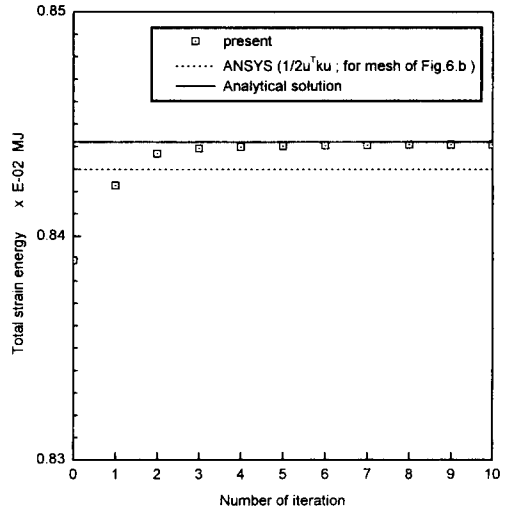


Fig. 12 Total strain energy vs. Number of iteration in the whole domain

함을 시사해 준다. 한편 Fig. 9와 10에서 보면 국부영역에서의 해가 전체영역에서의 해보다 이론해에 더 근접하고 있으나 이것은 공액근사개념에서 공액기저함수의 크기가 기저점을 중심으로 진동하며 기저점에서 멀어질수록 감소하는 특성이 있기 때문에^(6,8) 선정된 국부영역의 범위(혹은 크기)에 기인한 것으로 추정된다. Fig. 11에서 보면 원주방향응력은 변위형 유한요소 응력장 및 본 연구에서의 결과가 모두 이론해와 매우 근접하고 있음을 알 수 있다. Fig. 12는 전체영역 모델에서 얻은 응력

장으로부터 계산한 변형률에너지가 반복계산횟수에 따라 변화하는 모습을 나타낸 것으로 반복계산이 진행됨에 따라 2~3회의 반복계산에서 변형률에너지가 이론해에 근접하고 수렴하고 있다. 이것은 공액근사개념 및 Loubignac의 변위장 개선방법을 결합한 방법으로 응력장을 개선하는 것이 수회이내의 반복계산에서 응력장을 개선할 수 있음을 시사해 준다. Fig. 12에서 ANSYS의 결과는 Fig. 6(b)의 유한요소 모델(유한요소 크기; h)에서의 변형률에너지와 이론적인 변형률에너지에 근접

하는 것으로 추정된 상세 유한요소 모델(유한요소 크기 ; $\frac{1}{4}h$)에서의 변형률에너지를 표기한 것이다.

7. 결 론

에너지개념에 근거하여 물리적으로 의미가 있는 공액근사개념 및 유한요소 평형방정식을 만족하기 위한 반복적인 변위장 개선방법등을 결합하여 국부 영역내의 연속응력장 개선에 근사적으로 적용하는 방법을 제안하였다. 본 연구에서 제안한 방법을 내압을 받는 두꺼운 실린더 및 중앙에 원형구멍이 내재된 무한평판이 단일방향의 인장하중을 받는 경우에 대하여 적용한 결과, 국부영역에서의 연속응력장이 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 응력장이 개선되고 있으며 아울러 전체영역 모델에 대하여 공액근사개념 및 반복적인 변위장 개선방법을 적용하여 얻어진 해석결과와 비교할 때 응력의 정확도가 비견될 수 있을 정도로 근접하고 있다. 또한 국부영역의 개선된 연속응력장을 얻는데 소요되는 수치계산시간이 전체영역에 대한 그것보다 훨씬 줄어들고 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 국부응력장 개선방법은 주어진 유한요소의 크기 및 형태를 유지하면서도 평형방정식을 만족하며 정확도가 향상된 응력장을 짧은 시간내에 계산할 수 있어서 국부영역의 상세 응력해석에 효과적이고 적절하게 이용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Oden, J. T. and Reddy, J. N., 1983, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- (2) Im, Jong-Soon, 1993, "Design Sensitivity Analysis of Boundary Stress Constraints for Shape Optimization of Structural Systems," Ph. D Thesis, KAIST.
- (3) Hinton, E., Scott, F. C. and Ricketts, R. E., 1975, "Local Least Squares Stress Smoothing for Parabolic Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 235~256.
- (4) Hinton, E. and Campbell, J. S., 1974, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 461~480.
- (5) Oden, J. T. and Reddy, J. N., 1973, "Note on an Approximate Method for Computing Consistent Conjugate Stresses in Elastic Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, pp. 1492~1506.
- (6) Brauchli, H. J. and Oden, J. T., 1971, "Conjugate Approximation Function in Finite-Element Analysis," *Quarterly of Applied Mathematics*, No. 1, April, pp. 65~90.
- (7) Oden, J. T. and Brauchli, H. J., 1971, "On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Approximation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 317~325.
- (8) Oden, J. T., 1972, *Finite Elements of Non-linear Continua*, McGraw-Hill, New York, pp. 54~92.
- (9) Richard H. Gallagher, 1975, *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice Hall.
- (10) Zienkiewicz O. C., and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331~1364.
- (11) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. 1992, "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 101, pp. 207~224.
- (12) Nils-Eric Wieberg and Fethi Abdulwahab, 1993, "Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2703~2724.
- (13) Michal Krizek and Pekka Neittaanmoeki, 1987, "On Superconvergence Techniques," *Acta Applicandae Mathematicae*, Vol. 9, pp. 175~198.
- (14) ANSYS User's Manual for Revision 5.0, 1992, Swanson Analysis System, Inc.
- (15) Loubignac, G., Cantin, G. and Touzot, G., 1977, "Continuous Stress Field in Finite Element

- Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 11, pp. 1645~1646.
- (16) Cantin, G., Loubignac, G. and Touzot, G., 1978, "An Iterative Algorithm to Build Continuous Stress and Displacement Solutions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 1492~1506.
- (17) Zienkiewicz, O. C., Li Xi-Kui and Nakazawa, S., 1985, "Iterative Solution of Mixed Problems and the Stress Recovery Procedures," *Communications in Applied Numerical Method*, Vol. 1, pp. 3~9.
- (18) Hwang, W. C. and Sun, C. T., 1987, "Iterative Study for Three-Dimensional Finite Element Stress Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 12, pp. 1636~1638.
- (19) Bathe, K-J., 1982, *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*, Prentice-Hall.
- (20) Jara-Almonte, C. C. and Knight, C. E., 1988, "The Specified Boundary Stiffness/Force (SBSF) Method for Finite Element Subregion Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 1567~1578.