

〈논 문〉

매개변수 종속 최적화에서 최대치형 목적함수 처리에 관한 연구

김민수* · 최동훈**

(1996년 10월 7일 접수)

A Study on the Treatment of a Max-Value Cost Function in Parametric Optimization

Min-Soo Kim and Dong-Hoon Choi

Key Words : Parametric Optimization(매개변수 종속 최적화), Max-value Cost Function(최대치형 목적함수), Parametric Constraint(매개변수 종속구속조건), Direct Treatment(직접처리방법), Transformation Treatment(변환처리방법)

Abstract

This study explores the treatment of the max-value cost function over a parameter interval in parametric optimization. To avoid the computational burden of the transformation treatment using an artificial design variable, a direct treatment of the original max-value cost function is proposed. It is theoretically shown that the transformation treatment results in demanding an additional equality constraint of dual variables as a part of the Kuhn-Tucker necessary conditions. Also, it is demonstrated that the usability and feasibility conditions on the search direction of the transformation treatment retard convergence rate. To investigate numerical performances of both treatments, typical optimization algorithms in ADS are employed to solve a min-max steady-state response optimization. All the algorithms tested reveal that the suggested direct treatment is more efficient and stable than the transformation treatment. Also, the better performing of the direct treatment over the transformation treatment is clearly shown by contrasting the convergence paths in the design space of the sample problem. Six min-max transient response optimization problems are also solved by using both treatments, and the comparisons of the results confirm that the performances of the direct treatment is better than those of the transformation treatment.

1. 서 론

매개변수 종속 최적화 문제는 목적함수와 구속조건이 설계변수뿐만 아니라 매개변수의 연속 함수로

도 표현된 문제를 의미한다. 일반적으로, 매개변수 종속 최적화 문제가 기존의 최적화 문제에 비하여 풀기가 힘든 이유는 매개변수 영역에서 최대치로 표현되는 목적함수와 구속조건의 매개변수 종속성 때문이다. 따라서, 매개변수 종속 최적화분야는 매개변수에 종속되지 않은 기존의 최적화분야에 비하여 상대적으로 발전이 늦었다.

*한양대학교 대학원 기계설계학과

**회원, 한양대학교 기계설계학과

매개변수 종속 최적화에 대한 기존의 연구^(1~5)를 살펴보면, 최대치형 목적함수의 처리를 위하여 인위변수를 도입함으로써, 부가적인 매개변수 종속구속조건으로 만드는 변환처리방법을 사용하고, 매개변수 종속구속조건의 효과적인 처리에 관한 연구가 대부분이었다.^(1~4) 즉, 최대치형 목적함수의 효과적인 처리에 대한 연구는 거의 없는 실정이다. 수학적 관점에서 보면 최대치형 목적함수를 구속조건으로 변환한 문제가 원래 문제와 동일하더라도, 수치 최적화관점에서 보면 변환된 문제는 원래 문제에 비하여 복잡해지기 때문에 수렴성과 효율성면에서 많은 어려움을 야기시킨다.

본 연구에서는, 최적해 조건인 Kuhn-Tucker 1차 필요조건에 기초를 두고서, 변환된 문제의 최적해 필요조건이 쌍대변수(dual variables)에 대한 등식조건을 만족을 부가적으로 요구함을 증명하고자 한다. 또한, 유용-가용(usable-feasible) 탐색방향관점에서, 변환된 문제의 탐색벡터의 성분들 간에 부등식조건이 존재함도 보이고자 한다. 그리고, 이와 같은 사항들이 변환처리방법의 수렴을 힘들게 하거나 수렴속도를 더디게 만든다는 사실을 예제를 통하여 보이고자 한다.

또한, 본 연구에서는 이와 같은 변환처리방법의 문제점을 근본적으로 해결하기 위하여, 원래의 최대치형 목적함수를 최적화 알고리즘에서 직접처리하는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 제안하는 직접처리방법과 기존의 변환처리방법의 수치적인 성능을 검증하기 위하여 우선, 매개변수가 주파수인 최대-최소 동적반응 최적화 문제 1가지를 범용 최적화 프로그램인 ADS⁽⁶⁾의 대표적인 알고리즘들을 이용하여 풀고, 이에 대한 결과를 상대 비교하고자 한다. 그리고, 매개변수가 시간인 최대-최소 동적반응 최적화 문제 6가지를 자체 개발한 최적화 프로그램인 Integrated Design Optimization Library (IDOL 3.0)⁽⁷⁾을 이용하여 두 방법의 성능을 상대 평가하고자 한다.

2. 최대치형 목적함수의 처리

제안하는 방법을 설명하기 위하여, 단순한 형태로 표현된 매개변수 종속 최적화 문제를 먼저 기술하고자 한다. 단, 설명하는 최대치형 목적함수 처리방법은 보다 복잡한 형태의 매개변수 종속 최적화 문제에도 바로 적용할 수 있다. 이제, 매개변수

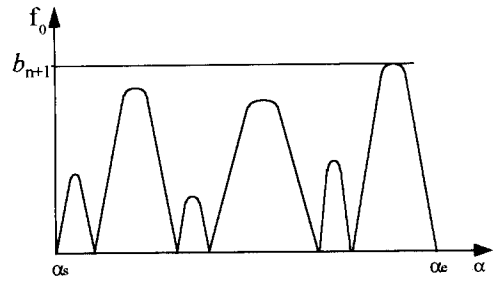


Fig. 1 Graphical description of the transformation treatment

종속 최적화 문제를 다음과 같이 정의하자.

$$\text{Minimize } \Psi_0 = \max_{\alpha \in [\alpha_s, \alpha_e]} f_0(b, z, \alpha) \quad (1)$$

subject to

$$\Psi_j(b, z, \alpha) \leq 0, \quad \alpha_s \leq \alpha \leq \alpha_e; \quad j=1, \dots, m \quad (2)$$

여기서, $b \in R^n$ 는 설계변수벡터이고, $z \in R^k$ 는 매개변수의 함수인 상태변수이고, α 는 시간 또는 주파수와 같은 매개변수이다. 식 (1)은 최대치형 목적함수를, 식 (2)는 매개변수의 전 영역 (α_s, α_e)에서 만족시켜야만 하는 구속조건이다.

2.1 변환처리방법

식 (1)의 최대치형 목적함수를 처리하기 위하여, 변환처리방법은 최대치형 목적함수를 식 (3)과 같이 인위변수인 b_{n+1} 로 대체하고 원래의 목적함수를 식 (4)와 같이 부가적인 구속조건으로 변환한다.

$$\text{Minimize } b_{n+1} \quad (3)$$

subject to

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1}(b, z, \alpha) = f_0(b, z, \alpha) - b_{n+1} &\leq 0, \\ \alpha_s &\leq \alpha \leq \alpha_e \end{aligned} \quad (4)$$

Fig. 1은 변환처리방법을 도식적으로 설명한다. 즉, 최적화가 진행됨에 따라 인위변수 b_{n+1} 를 의미하는 직선은 점점 낮아질 것이고, 매개변수 영역에서 f_0 는 인위변수인 직선보다 아래에 놓임으로써, 식 (4)의 구속조건을 충족시키게 된다는 개념이다.

2.1.1 Kuhn-Tucker 1차 필요조건

$\mu_j(\alpha)$ 를 j 번째 매개변수 종속구속조건에 대한 라그랑지승수함수라고 하고, \bar{b} 를 $\{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\}^T$ 로 정의한 확장설계변수벡터라고 하자. 그러면, Kuhn-Tucker의 필요조건은 다음과 같이 정의된다.

만약 \bar{b}^* 가 변환된 최적화 문제[식 (2) ~ (4)]의 국부 최소점이고, 매개변수 종속구속조건에 대

한 정칙점(regular point)이라면

$$\begin{aligned} \frac{db_{n+1}^*}{db} + \frac{d}{db} \int_{a_s}^{a_{e_m+1}} \sum_{j=1}^{a_{e_m+1}} \mu_j^*(\alpha) \Psi_j(\bar{b}^*, z, \alpha) d\alpha = 0 \quad (5) \\ \mu_j^*(\alpha) \Psi_j(b, z, \alpha) = 0 \\ a_s \leq \alpha \leq a_e; j=1, \dots, m+1 \quad (6) \end{aligned}$$

을 만족하는 $\mu_j^*(\alpha) \geq 0, a_s \leq \alpha \leq a_e; j=1, \dots, m+1$ 가 존재한다.

식 (5)는 n 번째까지의 요소로 구성된 식 (7)과 $n+1$ 번째 요소로 구성된 식 (8)로 나누어 생각할 수 있다.

$$\int_{a_s}^{a_e} \left[\sum_{j=1}^m \mu_j^*(\alpha) \frac{d\Psi_j(b^*, z, \alpha)}{db} + \mu_{m+1}^*(\alpha) \frac{df_0(b^*, z, \alpha)}{db} \right] d\alpha = 0 \quad (7)$$

$$1 - \int_{a_s}^{a_e} \mu_{m+1}^*(\alpha) d\alpha = 0 \quad (8)$$

식 (7)과 (8)에서 보면, 변환된 문제의 최적해 조건은 식 (8)이 충족해야만 원래의 최적해 문제와 동등한 최적해 조건이 된다. 이에 대한 상세 증명은 부록에서 다루기로 한다.

따라서, 변환된 문제가 수학적으로는 원래 문제와 동등한 의미를 가질지라도 최적해 필요조건에서 보면 식 (4)에 대한 라그랑지승수함수가 매개변수 영역에 걸쳐서 적분값이 '1'이 되어야만 한다는 부가적인 구속조건이 요구된다. 즉, 부가적 구속 조건인 식 (8)을 쌍대공간(dual space)에서 보면 등식조건으로 볼 수 있다. 원래 문제의 최적해 필요 조건은 쌍대공간에서 구속조건이 없다는 사실을 상기하면, 변환된 문제가 수치 최적화관점에서 상대적으로 풀기가 어렵다는 것을 알 수 있다.

2.1.2 탐색방향벡터의 강하조건

설계변수 b_{n+1} 에 대한 식 (3)의 목적함수와 식 (4)의 구속조건의 도함수가 반대방향을 가진다는 것에 주목할 필요가 있다. 이와 같은 사실을 알고리즘 관점에서 보면, 원래의 목적함수인 식 (1)이 두 개의 상충되는 함수인 식 (3)과 (4)로 나뉘어져 탐색 방향 결정시 상호간에 갈등을 갖게 됨을 의미한다.

이러한 갈등은 가용방향방법(method of feasible directions)의 개념을 이용하여 설명할 수 있다. 식 (2)로 표현된 구속조건들은 목적함수 처리방법과 상관없이 원래의 최적화 문제에서도 동일한 역할을 할 것이기 때문에 다음의 수식전개에서 생략하기로 한다. 가용방향방법에서는, 식 (4)의 구속

조건을 위배하지 않으면서 식 (3)의 목적함수를 줄일 수 있는 탐색방향벡터 \tilde{S} 를 구하고자 할 것이다. 이를 수학적으로 표현하면 식 (9)와 같다.

$$\frac{db_{n+1}}{db} \cdot \tilde{S} \leq 0 \quad (9a)$$

$$\frac{d\{f_0(b, z, \alpha_k) - b_{n+1}\}}{db} \cdot \tilde{S} \leq 0, k \in K \quad (9b)$$

여기서, $\tilde{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}\}^T$ 이고, 집합 K 는 매개변수 구속조건인 식 (4)가 매개변수영역 $[a_s, a_e]$ 에서 활동(active) 또는 위배(violation)된 구간들을 포함하는 활동성 집합이다. 식 (9a)는 유용성 조건(usability condition)을, 식 (9b)는 가용성 조건(feasibility condition)을 의미한다.

$db_{n+1}/d\bar{b} = \{00 \dots 01\}^T$ 를 유용성 조건인 식 (9a)에 대입하면 식 (9a)의 좌변은 S_{n+1} 이 된다. 따라서, 식 (9a)는 식 (10a)와 같이 단순화될 수 있다.

$$S_{n+1} \leq 0 \quad (10a)$$

또한, 식 (9b)에도 $ab_{n+1}/d\bar{b} = \{00 \dots 01\}^T$ 을 대입하면

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{df_0(b, z, \alpha_k)}{db_i} \cdot S_i \right) - S_{n+1} \leq 0, k \in K \quad (10b)$$

로 단순화 된다. 탐색방향벡터의 요소간 부등식관계인 식 (10b)는 n 번째까지의 요소의 선형조합이 $n+1$ 번째 요소보다 작거나 같아야 한다는 것을 의미한다. 또한, $n+1$ 번째 요소는 식 (10a)의 조건에 따라서 양의 부호를 가지면 안된다는 제한이 있다. 따라서, 변환처리방법의 최적화과정에서 n 번째까지의 설계변수(실제 설계변수)들이 상대적으로 적게 변하여 수렴속도가 떨어지거나 수렴경로가 지그재그로 되는 현상이 발생한다. 이에 대한 예시는 3장의 수치검증단계에서 제시하고자 한다.

2.2 직접처리방법

2.1절에서 살펴본 변환처리기법의 문제점을 해결하기 위하여, 본 연구에서는 식 (1)의 최대치형 함수를 직접 다루고자 한다. Fig. 2는 매개변수의 영역에서의 광역 최대치(global maximum peak)만을 최소화하는 직접처리방법의 개념을 도식적으로 보여 준다.

Fig. 2에서와 같이 광역 최대치만을 최소화할 경우에는 수렴과정에서 서로 다른 매개변수값들에서 교대로 광역 최대치가 나타나는 진동(oscillation)

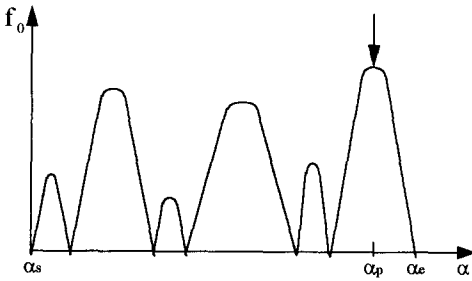


Fig. 2 graphical description of the direct treatment

현상이 발생할 수도 있다. 이러한 현상은 SLP (Sequential Linear Programming)와 같은 근사 최적화기법 또는 선탐색을 동반하지 않는 최적화 알고리즘에서 직접처리방법의 수렴을 힘들게 한다. 따라서, 본 연구에서는 선탐색 또는 그에 준하는 검색과정을 포함하는 최적화 알고리즘을 사용할 것을 요구한다. 선탐색은 선탐색 후의 목적함수 값이 선탐색 전의 목적함수 값보다 작아지도록 보장하므로 대부분의

비선형 최적화 알고리즘들은 광역 수렴성(globalconvergence)을 보장하기 위하여 선탐색과정을 기본적으로 채택하고 있다. 따라서, 이와 같은 알고리즘들 중의 하나를 사용함으로써 본 연구의 요구사항을 쉽게 충족할 수 있다. 그러나, 이와 같은 알고리즘들은 탐색방향벡터를 구하기 위하여 설계 민감도해석을 필요로 하므로, 최대치형 목적함수를 직접처리하려면 이 함수에 대한 설계 민감도해석방법이 정립되어야 한다. 이 방법을 다음 절에 기술한다.

2.2.1 매개변수 영역에서의 국부 최대치에 대한 설계 민감도해석

최대치가 발생하는 매개변수 점을 $\alpha_p \in [a_s, a_e]$ 라고 하자. 그러면, 식 (1)의 최대치형 목적함수는 식 (11)과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi_0 = f_0(b, z(b, \alpha_p), \alpha_p(b)) \tag{11}$$

식 (11)에서, 설계변수벡터 b 에 대한 목적함수 Ψ_0 의 일차 도함수는

$$\frac{d\Psi_0}{db} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial b} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \left(\frac{dz}{db} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{d\alpha_p}{db} \right) + \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \frac{d\alpha_p}{db} \right]_{\alpha=\alpha_p} \tag{12}$$

가 된다. 식 (12)를 다시 쓰면

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial b} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial b} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \frac{dz}{db} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right) \frac{d\alpha_p}{db} \right]_{\alpha=\alpha_p}$$

즉,

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial b} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial b} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \frac{dz}{db} + \frac{df_0}{d\alpha} \frac{d\alpha_p}{db} \right]_{\alpha=\alpha_p} \tag{13}$$

이 된다.

국부 최대치가 발생하는 점 α_p 는 매개변수 영역 내의 점일 수도 있고 경계상의 점일 수도 있다. α_p 가 영역 내의 점일 때는 매개변수에 대한 함수의 기울기가 최대점에서 '0'이므로 $(df_0/d\alpha)_{\alpha=\alpha_p} = 0$ 이 된다.⁽⁴⁾ 따라서, $d\alpha_p/db$ 가 '0'이 아닐지라도 식 (13)의 마지막 항은 '0'이 된다. α_p 가 경계상에 위치할 때는 경계점에서의 기울기가 '0'이 되지 않으면, 즉 $(df_0/d\alpha)_{\alpha=\alpha_p} \neq 0$ 이면, α_p 점은 변하지 않는다.^(8,9) 따라서, $d\alpha_p/db = 0$ 이므로 식 (13)의 마지막 항은 '0'이 된다. 결국, 식 (13)의 마지막 항은 국부 최대치가 발생하는 매개변수 점이 영역내에 있던지 또는 경계상에 있던지 항상 '0'이 된다. 따라서, 식 (1)의 최대치형 목적함수에 대한 일차 도함수는 식 (14)와 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{d\Psi_0}{db} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial b} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \frac{dz}{db} \right]_{\alpha=\alpha_p} \tag{14}$$

식 (14)의 일차 도함수 값은 설계 민감도해석을 위하여 이미 잘 정립된 직접 미분 방법(direct differentiation method) 또는 보조변수방법(adjoint variable method)을 이용하여 계산할 수 있다.⁽⁴⁾

2.2.2 매개변수 영역에서의 광역 최대치에 대한 설계 민감도해석

최적화의 탐색방향벡터를 따라 수행되는 선탐색이 목적함수 값의 크기가 지속적으로 줄어들도록 보장할지라도, 연속되는 최적화의 반복단계에서 광역 최대치가 발생하는 점의 개수는 바뀔 수 있다. 즉, k 번째 반복단계에서는 광역 최대치가 한 점에서 발생하였지만, $k+1$ 번째 단계에서는 크기가 동일한 광역 최대치가 여러 점에서 동시에 발생할 수 있다. 광역 최대치의 개수가 달라지는 설계점은 비평활(non-smooth)하게 되므로 해석적인 도함수가 존재하지 않게 된다. 이와 같은 경우를 고려하여 식 (11)의 목적함수를 다중 목적함수 최적화의 가중치방법의 개념을 도입하기로 한다. 즉, 목적함수 Ψ_0 는

$$\Psi_0 = \sum_{p=1}^p \omega_p f_0(b, z(b, \alpha_p), \alpha_p(b)) \tag{15a}$$

$$\sum_{p=1}^p \omega_p = 1 \tag{15b}$$

로 표현된다. 여기서, ρ 는 광역 최대치(global maximum peak)의 갯수이고 $\bar{\omega}_p$ 는 각 광역 최대치에 대한 가중치계수이다. 본 연구에서는, 각 광역 최대치를 동등하게 취급하기 위하여 각 광역 최대치에 대한 가중치로 $1/\rho$ 을 사용한다. 물론, 광역 최대치가 하나인 경우는 $\rho=1$ 이 되므로, 식 (15)는 식 (11)과 같아진다. 그래서, 식 (15a)의 일차 도함수는

$$\frac{d\Psi_0}{db} = \sum_{p=1}^{\rho} \omega_p \cdot \left[\frac{\partial f_0}{\partial b} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \cdot \frac{dz}{db} \right]_{a=a_p} \quad (16)$$

로 표현된다. 식 (16)에서의 각 국부 최대치의 일차 도함수는 식 (14)로 계산한 값을 대입하면 된다.

3. 예제를 통한 수치검증 및 토의

본 연구에서 제안한 직접처리기법과 기존의 변환처리기법의 수치적 성능을 비교하기 위하여, 두 기법을 적용하여 하나의 최대-최소 정상상태(steady state) 최적화 문제와 6개의 최대-최소 과도응답(transient response) 최적화 문제를 풀기로 한다.

3.1 최대-최소 정상상태 최적화 문제

제안하는 직접처리기법과 기존의 변환처리기법의 성능을 상세 비교하는데, 최대-최소 정상상태(steady state) 최적화 문제를 사용한 이유는 이 문제가 비교적 단순하고 정확한 최적치가 존재하기 때문이다.^(1,10) 또한, 성능비교에 사용되는 최적화 알고리즘이 ADS⁽⁶⁾의 가용방향법(MFD), 반복 이차계획법(SQP)과 일반적인 확장 라그랑지승수기법(ALM)이기 때문에 최대-최소 과도응답 최적화 문제를 고려하면 구속조건의 갯수가 너무 많아지기 때문이었다. 따라서, 매개변수가 주파수인 최적화 문제를 사용하였다.

이 예제는 Fig. 3의 2자유도 진동결연기를 주파수 영역에서 설계하는 문제이다. 이 시스템의 주질량과 댐퍼의 주파수 영역에서의 변위는 다음과 같이 구해진다.

$$z_1(\xi, f, \zeta) = \left\{ \frac{[\zeta^2 - f^2]^2 + 4\xi^2 \zeta^2}{[(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - f^2) - \bar{\mu} f^2 \zeta^2]^2 + 4\xi^2 \zeta^2 [\zeta^2 - 1 + \bar{\mu} \zeta^2]^2} \right\}^{1/2}$$

$$z_2(\xi, f, \zeta)$$

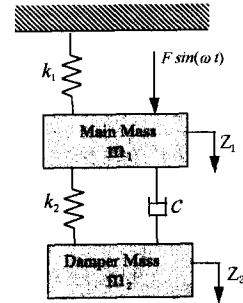


Fig. 3 Vibration absorber

$$= \left\{ \frac{f^4 + 4\xi^2 \zeta^2}{[(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - f^2) - \bar{\mu} f^2 \zeta^2]^2 + 4\xi^2 \zeta^2 [\zeta^2 - 1 + \bar{\mu} \zeta^2]^2} \right\}^{1/2}$$

여기서, $\zeta = \omega / \Omega_n$ 는 주질량의 비연성 고유주파수(uncoupled natural frequency)에 대한 가진 주파수(exciting frequency)의 비, $\xi = c / C_c$ 는 임계감쇠에 대한 댐퍼가 가진 감쇠계수의 비, $f = \omega_n / \Omega_n$ 는 주질량의 비연성 고유주파수에 대한 댐퍼의 비연성 고유주파수 비이고, $\bar{\mu} = m_2 / m_1$ 는 주질량에 대한 댐퍼질량의 비이다.

이 시스템의 설계문제는, ζ 가 영역 (0.5, 1.5)에서 연속적으로 작용할 때, 주질량의 진폭을 최소화시키는 ξ 와 f 를 결정하는 것이다. 이때, 구속조건으로는 ζ 의 영역 (0.5, 1.5)에 걸쳐서 주질량과 댐퍼의 상대변위에 대한 제한과 설계변수 상/하한치에 대한 제한이 있다. 이 문제에 대한 최적화 수식은 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \Psi_0(b) = \max_{\zeta \in \{0.5, 1.5\}} \left[\frac{z_1(\xi, f, \zeta)}{z_{st}} \right]$$

subject to

$$\Psi_1(\xi, f, \zeta) = \left| \frac{z_2(\xi, f, \zeta) - z_1(\xi, f, \zeta)}{z_1(\xi, f, \zeta)} \right| - Q_{\max} \leq 0, \quad 0.5 \leq \zeta \leq 1.5$$

$$0 \leq \xi \leq [3\bar{\mu}/8(1 + \bar{\mu}^3)]^{1/2}, \quad 0 \leq f \leq 2$$

여기서, $\bar{\mu} = 0.3$ 이고, $Q_{\max} = 3.0$ 이다. Den Hartog⁽¹⁰⁾에 따르면 이 예제에 대한 최적치는 $\xi^* = 0.2263$, $f^* = 0.7692$ 이고 $\Psi_0^* = 2.7736$ 이다.

ADS는 매개변수 종속구속조건함수를 연속함수로 다룰 수 없기 때문에, 주파수비 (ζ)의 영역 (0.5, 1.5)에 걸쳐 만족되어야 할 주질량과 댐퍼 질량의 충돌에 관한 매개변수에 종속된 구속조건을 주파수비의 영역을 30개의 점으로 이산화하여 30개의 부등식 구속조건들로 처리하였다. 이 때, 설계 민감도는 유한차분법을 사용하였다. 설계변수의 초

기치는 $(\zeta, f, b_3) = (0.1, 1, 10)$ 으로 하였다.

최적화의 결과치를 보면, MFD 방법은 2.7734, SQP 방법은 2.7774, 그리고 ALM 방법은 2.7770로 모든 경우에 유사한 최적 목적함수 값을 얻었으나, 각 경우의 설계변수의 최적치와 함수 계산량은 차이가 있었다. Fig. 4는 성능평가에 사용된 세 알고리즘에서 계산한 함수계산 회수를 비교, 도시한 것이다. 여기서, 함수 계산량은 유한차분법에서 사용한 것도 포함한 것이다. Fig. 13에서 보면 변환처리방법이 도함수를 구할 때 함수계산을 한번 더 필요로 하는 것을 감안할 지라도 모든 알고리즘에서 제안하는 직접처리방법이 기존의 변환처리방법에 비하여 함수 계산량이 훨씬 적음을 알 수 있다.

참고로, 인위 설계변수인 b_3 의 초기치를 5, 1 및 0. 1로 변경해가면서 최적설계를 수행한 결과, 초기치가 1 또는 0. 1인 경우에 SQP와 MFD는 수렴에 실패하였고, ALM은 221번의 함수 계산을 요구하였다. 이는 변환처리방법을 사용할 때는 인위 설계변수의 초기치 설정이 수렴 또는 효율에 큰 영향을 미친다는 것을 의미한다. 따라서, 수치 최적화

관점에서 볼 때 변환처리방법은 직접처리방법에 비하여 인위 설계변수의 초기치를 적절히 설정해야만 한다는 부가적인 어려움이 있다.

제안한 방법이 기존의 변환처리방법에 비하여 효율이 좋은 원인을 밝히기 위하여, 가용방향방법(MFD)을 사용하였을 경우에 두 방법의 수렴경로를 Fig. 5에 비교해 보았다. 동일한 초기점에서 출발해서 직접처리방법과 변환처리방법은 각각 6번 및 11번의 도함수 계산을 하여 유사한 최적치에 도달하였다.

Fig. 5는 변환방법의 설계변수 변화량의 길이, 즉 선탐색의 스텝이 직접처리방법보다 짧음을 보여 준다. 특히, 설계점 7에서 11까지 단계에서 보면, 변환처리방법의 최적화 경로가 다소 지그재그로 진행됨을 알 수 있다. 이에 대한 원인을 규명한 결과에 따르면, 이 설계점에서의 탐색방향벡터의 요소들이 식 (10)의 조건을 만족하지 않음을 알 수 있었다. 또한, 이러한 점들에서는 변환된 구속조건들의 활동성 집합(active set)에 속하는 요소들이 빈번하게 바뀌고 있음을 알 수 있었다. 이에 대한 원인은 인위 설계변수(b_3)와 변환된 구속조건들의 최대치들이 교대로 나타나는 현상에 의한 것이었다.

SQP 알고리즘을 사용한 경우에, 설계변수 공간에서 두 방법의 수렴경로를 Fig. 6에 비교하였다. 동일한 초기 설계점에서 출발하여 수렴할 때까지, 직접처리방법과 변환처리방법은 각각 6회 및 17회의 도함수 계산을 요구하였다. 이들의 효율차이에 대한 주된 원인은 앞서서도 밝혔지만 변환처리방법은 항상 부가적인 구속조건 함수가 있기 때문에 대부분의 선탐색단계에서 설계변수의 변화량이 작을 뿐만 아니라, 14번째 설계점부터 17번째 설계점까지 탐색방향의 거의 설계변수 좌표축과 평행하게 됨을 알 수 있다. 반면에, 직접처리방법에서는 주

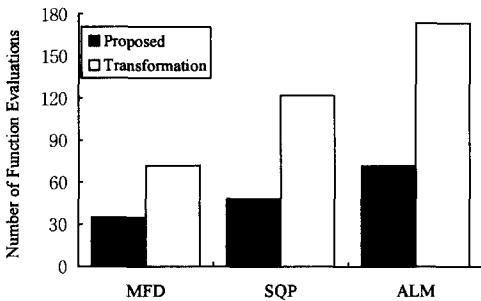


Fig. 4 Performance comparison between two treatments with using three popular nonlinear programming algorithms

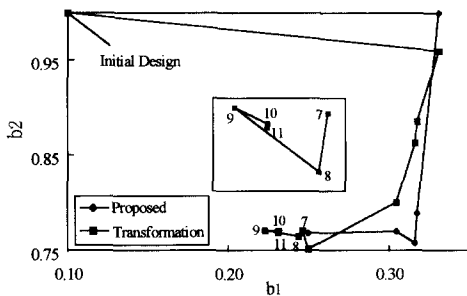


Fig. 5 Convergence paths of the two treatments with the method of feasible directions

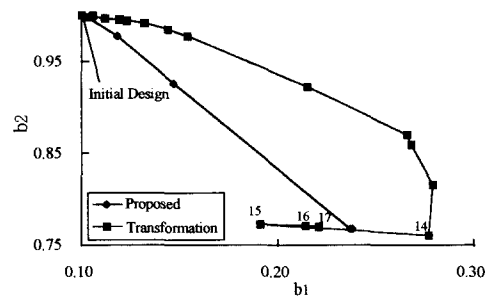


Fig. 6 Convergence paths of the two treatments with SQP

질량과 댐퍼의 간섭을 피하기 위한 매개변수 증속 구속조건의 위배량을 줄이기 위하여, 초기 설계점 근처에서 설계변수의 작은 변화를 시도한 후, 구속조건이 충족되자 세번의 반복 후에 최적치 근처에 도달하였다.

3.2 최대-최소 과도응답 최적화 문제

제안하는 방법의 유효성을 평가하기 위하여, 최대-최소 과도응답 최적화를 위한 프로그램 IDOL 3.0⁽⁷⁾을 개발하였다. 이 프로그램에서는 최대치형 목적함수 처리방법을 선택할 수 있으며, 두 처리방법의 성능을 직접적으로 비교 가능하게 하기 위하여 최대치 목적함수를 처리하는 부분을 제외한 다른 모든 부분은 공통으로 이용하도록 하였다. 특히, 본 프로그램에서는 대형 동적반응 최적화를 위하여 ALM 방법을 최적화의 기본알고리즘으로 선정하였다.^(4,5,11) ALM 방법의 가함수를 풀기위한 구속조건이 없는 최적화기법은 BFGS 를, 선타색을 위한 기법은 순차적 다항식 근사화기법⁽¹²⁾을 적용하였다. 동적반응해석을 위하여 Runge-Kutta 5차 및 6차 방법을 이용하였고, 설계 민감도 해석방법은 직접미분방법을 적용하였다.

개발한 최적화 프로그램을 적용하여 4가지의 1자유도 비선형 충격흡수기 설계문제, 2자유도 선형 진동절연기 설계문제 및 5자유도 차량시스템 현가장치 설계문제의 6가지 대표적인 과도 응답 최적화 문제들을 풀어 보았다. 이 문제에 대한 자세한 사항은 참고문헌 (1)의 338~354쪽을 참조하기 바란다. 최적화 결과들을 수록한 Tables 1~3에서 NG는 설계 민감도 계산횟수를, NF는 함수 계산횟수를, f^* 는 목적함수의 최적치를 뜻한다.

[1자유도 비선형 충격흡수기 설계문제] Fig. 7에 도시한 1자유도 비선형 충격흡수기는 고정된 질량 m 과 설계변수 b_1 과 b_2 로 각각 특성이 주어지는 스프링과 댐퍼로 구성되어 있다. 이 시스템은 시간 $t=0$ 일 때, 주어진 초기 속도로 벽에 충돌한다.

설계의 목적은 질량의 최대 변위에 대한 제한조건을 만족하면서, 질량의 최대 가속도를 최소화 할 수 있는 설계변수 b_1 과 b_2 를 결정하는 것이다. 이 설계문제는 Fig. 7의 댐퍼에서 ω 가 1, 2, 3 및 인 경우에 대한 4가지 설계문제가 있다. 설계변수에 대한 초기치로는 참고문헌과 동일하게 (0.50, 0.50)을 사용하였다. 이 예제에 대한 두 처리기법의 최적설계 결과치를 Table 1에 정리하였다.

[2자유도 선형 진동절연기 설계문제] Fig. 3에 도시한 2자유도 선형 진동절연기 최적설계문제는 주어진 주파수에 대하여 주질량의 최대진폭을 최소화하는 주질량과 댐퍼 질량의 고유진동수 비(b_1)와 감쇠비(b_2)를 구하는 것이다. 구속조건으로는 주질량과 댐퍼의 충돌에 대한 과도응답량과 정상상태 응답량 제한과 설계변수에 대한 상/하한치 제한이 있다. 두 처리방법을 사용해서 구한 최적화 결과를 초기 설계치와 함께 Table 2에 정리하였다.

[5자유도 차량시스템 현가장치설계] Fig. 8의 5자유도 차량이 Fig. 9에 도시한 노면을 주어진 속

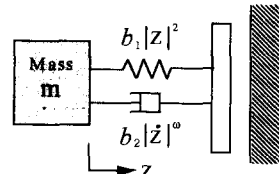


Fig. 7 Nonlinear impact absorber

Table 1 Optimization results for the nonlinear impact absorber designs

	$\omega=1$		$\omega=2$		$\omega=3$		$\omega=4$	
	M-1	M-2	M-1	M-2	M-1	M-2	M-1	M-2
b_1	0.4474	0.4414	0.5970	0.5974	0.6833	0.7012	0.7718	0.8840
b_2	0.5276	0.5265	0.5972	0.5974	0.6833	0.6878	0.7509	0.7956
b_3	-	0.5265	-	0.5972	-	0.6898	-	0.7960
f^*	0.5292	0.5265	0.5972	0.5972	0.6833	0.6898	0.7626	0.7960
NG	11	20	16	41	14	29	14	19
NF	37	52	47	105	46	105	40	77

M-1 : Proposed Direct Treatment, M-2 : Transformation Treatment, - : N/A

Table 2 Optimization results for the linear dynamic absorber design

Initial value		Optimization results	
		Proposed	Transformation
b_1	1.60	1.3456	1.3275
b_2	0.02	0.0205	0.0303
b_3	3.189	-	2.3551
f^*	3.182	2.3559	2.3551
NG	-	13	26
NF	-	41	70
- N/A			

Table 3 Optimization results for the vehicle suspension system design

Initial value		Optimization results	
		Proposed	Transformation
b_1	100.00	50.00	50.00
b_2	300.00	200.00	202.26
b_3	300.00	200.00	870.50
b_4	10.00	30.46	27.70
b_5	25.00	77.51	78.07
b_6	25.00	80.00	74.27
b_7	332.60	-	255.50
f^*	331.79	254.90	255.50
NG	-	17	34
NF	-	51	85
- N/A			

도로 달릴 때, 운전석의 수직방향 최대 가속도가 최소가 되도록 현가장치를 설계하고자 한다. 설계 변수는 강성계수인 k_1, k_2 및 k_3 , 감쇠계수인 c_1, c_2 및 c_3 이다. 구속조건으로는 운전석과 차체의 상대 변위, 차체와 앞/뒤 바퀴 축간의 상대변위 및 앞/뒤 바퀴와 노면간의 상대변위에 대한 제한과 설계 변수에 대한 상/하한치 제한조건이 있다. 이 설계 문제에 대한 두 가지 처리방법의 최적화 결과를 초기 설계치와 함께 Table 3에 정리하였다.

이상의 Table 1부터 3까지의 결과로부터, 제안한 직접처리방법이 변환처리방법에 비하여 거의 동

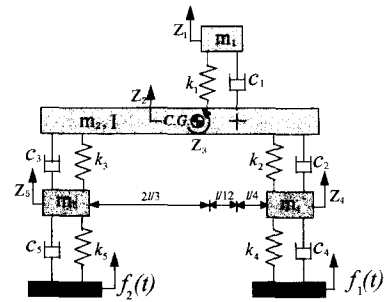


Fig. 8 Five degree of freedom vehicle model

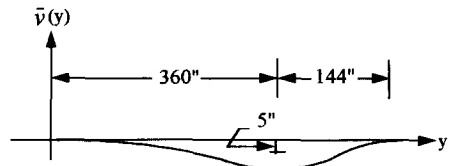


Fig. 9 Road surface profile

일한 목적함수의 최적치를 구하면서도, 설계 민감도 계산횟수를 26~70%, 함수 계산횟수를 40~67% 줄였음을 알 수 있다. 이로서, 최대-최소 과도응답 최적화 문제의 경우에도 직접처리방법이 변환처리 방법보다 성능이 우수함을 알 수 있었다.

5. 결론

본 연구에서는 매개변수 종속 최적화 문제에서 최대치형 목적함수를 직접처리하는 방법을 제시하고, 이를 기존의 방법과 비교 분석하였다. 기존의 변환처리방법은, 인위변수를 도입하여, 원래의 최대치형 목적함수를 매개변수 종속구속조건으로 변환처리하였다. 본 연구에서는, 이와 같이 변환처리된 최적화 문제가 원래의 최적화 문제보다 복잡하고 수렴이 힘든 이유를, 최적화 이론 측면뿐만 아니라 수치 최적화 알고리즘측면에서 밝히고 예제를 통하여 제시한 근거를 입증하였다.

본 연구에서는 최적화 이론 및 민 수치 최적화관점에서 문제점을 야기시키는 변환처리기법 대신에 최대치형 목적함수를 직접처리하는 방법을 제시하였다. 세안한 직접처리기법의 유일한 요구사항은 연속되는 최적화과정에서 최대치의 진동 현상을 방지하기 위하여, 선탐색 또는 그에 준하는 수치적 기법을 동반한 최적화 알고리즘을 사용해야 한다는 것이다. 그런데 대부분의 비선형 최적화 알고리즘들은 선탐색과정을 포함하고 있으므로, 이 요구사

항은 쉽게 충족될 수 있다.

제안한 방법과 기존의 변환처리방법의 수치적 성능을 비교하기 위하여, 두 방법을 7가지의 매개 변수 최적화 문제에 적용하였으며, 그 최적화 결과들을 비교하였다. 이 비교에 따르면, 제안한 직접처리방법이 기존의 변환처리방법에 비하여 효율성이 훨씬 우수함을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 기초연구비 지원(과제 번호 ADD-90-5-09)으로 수행되었습니다. 이에 감사료를 드립니다.

참고문헌

(1) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, Wiley-Interscience, New York.
 (2) Hsieh, C. C. and Arora, J. S., 1984, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response," *Computer Methods in Applied mechanics and Engineering*, Vol. 43, pp. 195~219.
 (3) Hsieh, C. C. and Arora, J. S., 1985, "Hybrid Formulation for Treatment of Point-wise State Variable Constraints in Dynamic Response Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, pp. 171~189.
 (4) Paeng, J. K. and Arora, J. S., 1989, "Dynamic Response Optimization of Mechanical Systems with Multiplier Methods," *ASME Journal of mechanism, Transmission and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 73~80.
 (5) Chahande, A. I. and Arora, J. S., 1994, "Optimization of Large Structures Subjected to Dynamic Loads with the Multiplier method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 413~430.
 (6) Vanderplaats, G. N., 1985, *ADS-A FORTRAN Program for Automated Design Synthesis Version 1. 10*, Engineering Design Optimization, Inc.
 (7) 김민수, 최동훈, 1996, *Integrated Design Optim-*

ization Library 3. 0 for Advanced Design, 기술논문 OPT-9601, 한양대학교 기계설계학과 AMOD Lab.

(8) Haftka, R. T. and Gurdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers.
 (9) Grandhi, R. V., Haftka, R. T. and Watson, L. T., 1986, "Design-Oriented Identification of Critical Times in Transient Response," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 649~656.
 (10) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 1956.
 (11) Conn, A. R., Gould, N. and Toint, Ph. L., 1992, "Large Scale Nonlinear Constrained Optimization," in *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications*, Moonen, M. S., Gould, G. H., and De Mour, Bart L. R. (eds), Kluwer Academic Publishers, pp. 21~48.
 (12) 김민수, 최동훈, 1995, "순차적 다항식 근사화를 적용한 효율적 선 탐색기법의 개발," 대한기계학회논문집, 제19권, 제2호, pp. 433~442.

부 록

최적해 조건의 동등성

b^* 가 식 (1)과 (2)로 표현된 원래 최적화 문제에 대한 국부 최소점이면서 매개변수 종속구속조건에 대한 정칙점(regular point)이라면, 다음의 두 조건을 만족하는 $\mu_j^*(\alpha) \geq 0$ 인 $\mu_j^*(\alpha)$ 가 구간 $a_s \leq \alpha \leq a_e$ 내에서 존재한다.

$$\frac{d\Psi_0(b^*)}{db} + \frac{d}{db} \int_{a_s}^{a_e} \sum_{j=1}^m \mu_j^*(\alpha) \Psi_j(b^*, z, \alpha) d\alpha = 0 \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} \mu_j^*(\alpha) \Psi_j(b, z, \alpha) &= 0 \\ a_s \leq \alpha \leq a_e : j &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (A2)$$

이제, 최적해에서 최대치가 하나뿐이라고 가정하고, $\alpha_p \in [a_s, a_e]$ 를 함수 $f_0(b, z, \alpha)$ 의 최대치가 발생하는 점이라고 하자. 그러면, 식 (A1)은

$$\begin{aligned} \frac{df_0(b^*, z, \alpha_p)}{db} + \frac{d}{db} \int_{a_s}^{a_e} \sum_{j=1}^m \mu_j^*(\alpha) \Psi_j(b^*, z, \alpha) d\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (A3)$$

이 된다.

한편, 변환처리기법의 최적해 조건(Kuhn-Tucker conditions)의 부가적 등식 조건인 식 (8)에도 최적해에서 함수 $f_0(b, z, \alpha)$ 의 최대치가 하나뿐이라는 가정을 적용하면, 식 (8)은 식 (A4)로 표현된다.

$$1 - \mu_{m+1}^*(\alpha_p) = 0 \tag{A4}$$

식 (A4)를 식 (7)에 대입하면, 식 (7)은 식 (A3)과 동일해진다. 따라서, 변환처리기법의 최적해 조건은 원래 문제의 최적해 조건과 동일하다.

최적해에서 최대치가 다중일 때의 최적해 조건을 살펴보자. 이 때, 식 (A3)은 식 (15)를 이용하여 식 (A5)로 쓸수 있다.

$$\sum_{p=1}^p \omega_p \cdot \frac{df_0(b^*, z, \alpha_p)}{db} + \frac{d}{db} \int_{\alpha_s}^{\alpha_e} \sum_{j=1}^m \mu_j^*(\alpha) \Psi_j(b^*, z, \alpha) d\alpha = 0; \sum_{p=1}^p \omega_p = 1 \tag{A5}$$

또한, 여기에 델타함수 $\bar{\omega}_p = \omega(\alpha) \cdot \delta(\alpha - \alpha_p)$ 를 도입하면, 식 (A5)는 식 (A6)과 (A7)과 같이 표현

된다.

$$\int_{\alpha_s}^{\alpha_e} \left[\omega(\alpha) \cdot \delta(\alpha - \alpha_p) \frac{df_0(b^*, z, \alpha)}{db} + \sum_{j=1}^m \mu_j^*(\alpha) \cdot \frac{d\Psi_j(\bar{b}^*, z, \alpha)}{db} \right] d\alpha = 0 \tag{A6}$$

$$1 - \int_{\alpha_s}^{\alpha_e} \omega(\alpha) \cdot \delta(\alpha - \alpha_p) d\alpha = 0 \tag{A7}$$

식 (A6)~(A7)은 변환처리기법의 최적해 조건인 식 (7), (8)과 유사한 형태를 갖는다. 이제, $\bar{\omega}(\alpha)$ 를 $\mu_{m+1}^*(\alpha)$ 로 설정한다면, 식 (A6)~(A7)은 식 (7), (8)과 동일하다. 따라서, 변환처리기법과 원래의 최적화 문제는 최대치가 다중일 때도 최적해 조건이 동일해진다. 그러나, 식 (A7)의 부가적인 구속조건은 가중치 함수의 기본 정의에 의하여 최적화과정 중에 항상 만족될 수 있는 반면, 변환처리방법의 경우 요구되는 식 (8)의 부가적인 구속조건이 최적해에서만 만족이 되고 최적화과정 중에서는 만족이 보장되지 않으므로 수치적인 어려움을 야기할 수 있다.