

< 논 문 >

자유단이 회전스프링으로 구속된 Beck 기둥의 안정성

윤한익* · 임순홍** · 유진석***

(1996년 9월 30일 접수)

Stability of Beck's Column with a Rotatory Spring Restraining its Free End

H. I. Yoon, S. H. Lim and J. S. Yu

Key Words : Beck's Column(Beck 기둥), Stability(안정성), Flutter Load (플러터하중), Flutter Frequency(플러터진동수), Follower Force(종동력), Nonconservative System(비보존적 계)

Abstract

An analysis is presented on the stability of an elastic cantilever column subjected to a concentrated follower force as to the influence of the elastic restraint and a tip mass at the free end. The elastic restraint is formed by the rotatory springs. For this purpose, the governing equations and boundary conditions are derived by using Hamilton's principle, and the critical flutter loads and frequencies are obtained from the numerical evaluation of the eigenvalue functions of the considered system.

1. 서 론

안정성 개념은 시대에 따라서 변천되어 왔다. 역학의 역사가 시작되었다고 하는 Aristoteles의 시대에는 오늘날의 운동학적 관점이 안정성의 기준이 되었다. 즉 정지상태 또는 운동상태에 있는 물체에 외력이 작용하여 그 상태가 바뀌어지면 안정성을 잃는 것이다.

다음으로는 Archimedes에 의하여 제안되었다고 생각되는 안정성의 기하학적인 관점으로 Toricelli, Baldi, Lagrange, Euler 등에 의하여 발전되어 왔다. 이 기하학적인 관점으로부터 Euler는 탄성안정성의 이론을 정립하였다.⁽¹⁾ Euler에 의하면 충분히 작은 하중에 대하여 탄성계가 초기 평형상태로부터 이탈(bifurcation)되어 평형을 유지하며 안정되어

있는 최소변위점을 갖게 된다. 그러므로 탄성계의 임계하중은 초기형태와 아주 근사한 다른 형태의 평형을 유지할 수 있는 최소의 하중이 된다. 이 Euler의 방법은 정역학적 탄성계의 안정성 해석에 거의 유일한 방법으로 사용되어 왔으나 최소변위의 평형상태가 모든 탄성안정성의 문제에 적용되지는 않았다. 관계(pipes)와 로켓의 좌굴은 진폭이 증가하는 진동, 즉 플러터(flutter)가 수반되어 일어남이 그 증거이었다. 따라서 Ziegler는 탄성안정성 문제의 해석에 Euler의 정역학적 방법대신에 동역학적 방법을 적용하게 되었다.⁽²⁾ 이 유명한 동역학적 방법의 정의와 해설은 Liapunov⁽³⁾에 의하여 주어졌으며, 동역학적 탄성계뿐만 아니라 정역학적 탄성계의 안정성 해석에도 매우 유용하다.

안정성 문제 해석의 셋째 방법은 Routh⁽⁴⁾와 Timoshenko⁽⁵⁾에 의하여 제안된 에너지방법이다. 이 방법은 에너지보존의 법칙을 이용하므로 주로 보존적 계(conservative system)에 사용된다. 그러므로 Euler 방법(기하학적 방법)과 에너지방법은 비보존

*회원, 동의대학교 기계공학과

**회원, (주) 진영금속

***동의대학교 대학원

적 계(nonconservative system)에는 사용될 수 없으며, 탄성계에 작용하는 외력이 보존력(conservative force)일 경우에만 유용하다.

비보존적인 탄성계의 안정성 문제의 해석에는 계의 평형위치 근방에서 일어나는 미소진동에 기초하는 동역학적인 방법이 기본이다. 이 동역학적 방법은 탄성안정성의 이론을 운동의 일반적 안정성 이론에 더욱 접근시켰으며, 자동제어의 이론, 점성유체역학, 그리고 역학의 많은 다른 분야에 응용되었다.^(6,7) 따라서 Euler의 방법은 동역학적 방법의 한 특수한 경우로 취급될 수 있다.

비보존력의 대표격인 중동력은 시간과 속도에 관계없이 그 작용방향이 변환되는 일정한 크기의 힘으로서⁽⁸⁾ 그 작용선은 탄성계의 변형에 의하여 결정된다. 탄성봉에 작용하는 축하중은 집중중동력과 분포중동력으로 나누어지며, 집중중동력은 변형된 탄성봉의 자유단에서 그 접선방향으로 작용하며,⁽⁹⁾ 분포중동력은 변형된 탄성봉의 축선을 따라서 그 접선방향으로 분포되어 작용한다.⁽¹⁰⁾ 축하중을 받는 탄성봉의 안정성에 있어서 Euler의 정역학적 방법으로 해석한 결과와 실험결과치가 잘 맞지 않는 원인은 탄성봉이 변형함에 따라서 축하중이 중동력으로 변환되기 때문이다.⁽¹¹⁻¹³⁾

본 연구에서는 집중중동력이 작용하는 Beck 기둥⁽⁹⁾의 자유단이 회전스프링으로 탄성구속되고, 그 자유단에 말단질량이 부가될 경우, 이 자유단의 조건들이 계의 안정성에 미치는 영향을 수치해석하여 연구하였다. 이 비보존적 탄성계의 운동에너지와 변형에너지 이외에 비보존력에 의하여 이루어진 일을 포함하는 Hamilton의 원리⁽¹⁴⁾를 사용하여 계의 운동방정식과 경계조건의 식을 유도하여 해석하였다. 계의 안정성에 영향을 미치는 자유단의 부가질량 및 그 관성모멘트, 그리고 회전스프링 각각의 특성과 이들 상호간의 연성특성을 다각적으로 면밀히 구명하였다.

2. 이론해석

집중중동력이 작용하는 외팔보기둥의 자유단이 회전스프링으로 구속되고, 그 자유단에 일정질량이 부가된 비보존적 탄성계의 개략도는 Fig. 1과 같다. 이러한 자유단의 조건들이 계의 운동학적 안정성에 미치는 영향을 해석하기 위한 계의 운동방정식과 경계조건의 식은 Hamilton의 원리로부터 다

음과 같이 유도되었다.

운동방정식

$$EIy'''' + Py'' + \rho A \ddot{y} = 0 \quad (1)$$

경계조건의 식

$x=0$ 에서

$$y(0, t) = y'(0, t) = 0 \quad (2)$$

$x=l$ 에서

$$EIy''(l, t) + C_R y'(l, t) + J \dot{y}'(l, t) = 0 \quad (3)$$

$$EIy'''(l, t) - M \dot{y}(l, t) = 0 \quad (4)$$

여기서, y 는 외팔보기둥의 횡변위이고, EI 는 외팔보기둥의 굽힘강성계수, ρ 는 외팔보기둥의 밀도, A 는 외팔보기둥의 단면적, M 은 외팔보기둥의 자유단에 부가된 말단질량, J 는 M 의 질량관성모멘트, C_R 는 외팔보기둥의 자유단을 구속하는 회전스프링상수, P 는 집중중동력, l 은 외팔보기둥의 길이, $y(l, t)$ 는 외팔보기둥의 자유단의 횡변위, (\cdot) 는 변수 x 에 대한 미분, $(\dot{\cdot})$ 는 시간에 대한 미분, 그리고 t 는 시간이다.

식 (3)에서 $C_R = J = 0$ 이면 외팔보기둥의 자유단에 집중질량이 부가된 탄성계의 경계조건식이 되고 Pflüger⁽¹⁵⁾의 문제가 된다.

식 (1)의 해는

$$y(x, t) = v(x) e^{i\omega t} \quad i = \sqrt{-1} \quad (5)$$

의 형태이다. 여기서, ω 는 외팔보기둥의 원진동량이다.

식 (5)와 무차원 독립변수 $\xi = x/l$ ($0 \leq \xi \leq 1$)을 식 (1)~(4)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 무차원화된 비자기수반(non-self adjoint)의 고유치문제가 된다.

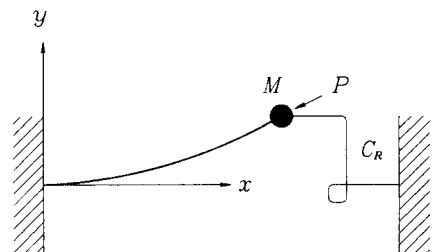


Fig. 1 An elastically restrained cantilever column with a tip mass subjected to a concentrated follower force

운동방정식

$$\frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} + P_L \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} - \Omega^2 v(\xi) = 0 \quad (6)$$

경계조건의 식

$\xi=0$ 에서

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial \xi} = 0 \quad (7)$$

$\xi=1$ 에서

$$\frac{\partial^2 v(1)}{\partial \xi^2} + (K_R - \Omega^2 \bar{J}) \frac{\partial v(1)}{\partial \xi} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 v(1)}{\partial \xi^3} + \Omega^2 \bar{M} v(1) = 0 \quad (9)$$

여기서,

$$P_L = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho Al^4 \omega^2}{EI}, \quad \bar{M} = \frac{M}{\rho Al} \quad (10)$$

$$\bar{J} = \frac{J}{\rho Al^3}, \quad K_R = \frac{C_R l}{EI}$$

의 무차원 매개변수이다.

무차원 운동방정식 (6)의 해는

$$v(\xi) = Ce^{i\xi} \quad (11)$$

의 형태이고, 그 일반해는

$$v(\xi) = A_1 \cos h\lambda_1 \xi + A_2 \sin h\lambda_1 \xi + A_3 \cos \lambda_2 \xi + A_4 \sin \lambda_2 \xi \quad (12)$$

가 된다. 여기서,

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [(P_L^2 + 4\Omega^2)^{\frac{1}{2}} + (-1)^n P_L]^{\frac{1}{2}}, \quad n=1, 2 \quad (13)$$

이다.

계의 일반해는 경계조건의 식을 만족하여야 하므로 식 (12)와 그 미분항들을 경계조건의 식 (7)~식 (9)에 대입하여 정리하면, 다음 4개의 선형제차대수방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} A_k = 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

여기서,

$$a_{11}=1 \quad a_{12}=0 \quad a_{13}=1 \quad a_{14}=0 \quad (15)$$

$$a_{21}=0 \quad a_{22}=\lambda_1 \quad a_{23}=0 \quad a_{24}=\lambda_2 \quad (16)$$

$$a_{31}=\lambda_1^2 \cos h\lambda_1 + (K_R - \Omega^2 \bar{J}) \lambda_1 \sin h\lambda_1$$

$$a_{32}=\lambda_1^2 \sin h\lambda_1 + (K_R - \Omega^2 \bar{J}) \lambda_1 \cos h\lambda_1$$

$$a_{33}=-\lambda_2^2 \cos \lambda_2 - (K_R - \Omega^2 \bar{J}) \lambda_2 \sin \lambda_2$$

$$a_{34}=-\lambda_2^2 \sin \lambda_2 + (K_R - \Omega^2 \bar{J}) \lambda_2 \cos \lambda_2 \quad (17)$$

$$a_{41}=\lambda_1^3 \sin h\lambda_1 + \Omega^2 \bar{M} \cos h\lambda_1$$

$$a_{42}=\lambda_1^3 \cos h\lambda_1 + \Omega^2 \bar{M} \sin h\lambda_1$$

$$a_{43}=\lambda_2^3 \sin \lambda_2 + \Omega^2 \bar{M} \cos \lambda_2$$

$$a_{44}=-\lambda_2^3 \cos \lambda_2 + \Omega^2 \bar{M} \sin \lambda_2 \quad (18)$$

이다.

대수방정식 (14)가 뜻을 갖는 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 그 계수행렬의 행렬식이 영(零)이어야 한다. 즉,

$$\det(a_{jk}) = 0, \quad j, k=1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

고유치방정식 (19)을 전개하면 집중중동력을 받는 비보존적 탄성계 Fig. 1의 횡진동 진동수방정식이 된다.

또 식 (19)는

$$f(P_L, \Omega^2) = 0 \quad (20)$$

의 함수로 표현되며, 식 (20)이 $P_L = P_{Lcr}$ 일때 하나의 중근 Ω^2 을 갖는다는 조건으로부터 계의 임계플러터하중(critical flutter load) P_{Lcr} 을 구한다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

계의 안정성에 영향을 미치는 자유단의 무차원매개변수 \bar{M} , \bar{J} , K_R 들의 값을 변화시키면서 수치해석하여 임계플러터하중 P_{Lcr} 을 구하고, 이 자유단의 부가조건들이 계의 안정성에 미치는 영향을 구명한다.

식 (19)는 무차원 점진중동력 P_L 과 무차원 진동량 Ω^2 을 변수로 가지며, (4×4) 행렬식이므로 여인자(cofactor)에 의하여 간단히 전개된다. 그러므로 기존의 수치해석 Algorithm을 사용하는 대신에 짧은 program을 개발하고, PC에서 반복계산하여 시간과 경비를 절약하였다. 충분히 작은 중동력 P_L 을 선택하여 식 (19)를 만족시키는 Ω^2 을 구하면 탄성봉의 횡진동 1, 2차 또는 3, 4차 모드(mode)에 해당되는 진동수를 얻게 된다. 특히 $P_L=0.0$ 일 때는 탄성봉의 각 모드에 해당되는 고유진동수가 계산된다.

P_L 이 점차 증가되면 계의 1차와 2차의 진동수는 차츰 가까워져서 겹치게 되는데, 그 때의 P_L 이 임계플러터하중 P_{Lcr} 이고, 또 겹쳐지는 그 진동수가 임계플러터진동수(critical flutter frequency) Ω_{cr}^2 이 된다.

P_L 이 이 P_{Lcr} 의 값 이상으로 증가하면 진동수방

정식의 실근은 없으며, 탄성봉의 횡진동 진폭은 지수적으로 증가하여, 즉 플러터(flutter)가 발생하여 계는 안정을 상실하게 된다.

Fig. 2는 자유단에 종동력이 작용하는 외팔보 기둥의 안정성을 해석하는 고유치곡선이다. 즉, 식 (20)의 두 고유치 P_L 과 Ω^2 의 관계이다. 이 그림에서 고유치곡선의 최대의 종좌표 20.05가 임계플러터하중 P_{Lcr} 가 된다. 그러므로 횡좌표 121.4는 임계플러터진동수 Ω_{cr}^2 가 되고, P_L 의 값이 P_{Lcr} 이상이 되면 계는 불안정해진다. 계의 안정영역은 P_{Lcr} 이하의 전영역이다. P_L 이 0.0일 때의 두 진동수는 각각 계의 1, 2차 고유원진동수 ω 의 제곱의 무차원 값, 즉 무차원 고유진동수 12.36과 485.52가 된다. 이러한 수치들은 Bolotin의 연구와 잘 일치한다.⁽⁶⁾

Fig. 3은 회전스프링상수 K_R 이 0.0이 된 외팔보 기둥의 자유단에 질량관성모멘트를 무시할 수 있는 집중질량 \bar{M} 가 부가된 경우 그 부가질량이 계의 안정성에 미치는 영향을 도시한 것이다. \bar{M} 의 질량이 고밀도의 재료인 경우에는 그 질량관성모멘트를 무시할 수 있는 집중된 질량이라고 생각할 수 있다. Fig. 3에서 \bar{M} 가 0.6, 즉 탄성봉 질량의 60% 일 때 임계플러터하중 P_{Lcr} 은 16.053으로서 가장 낮으며, \bar{M} 가 0.6이상으로 커지면 P_{Lcr} 도 다시 조금씩 증가함을 알 수 있다. 이 현상은 기둥의 전단 변형과 단면회전관성의 효과를 고려한 계⁽¹⁶⁾에서도 동일하였으며, 등분포 종동력이 작용하는 Leipholz 기둥에서는 \bar{M} 가 0.16일 때 임계플러터하중이 최소로 되는 현상과 비교가 된다.^(17,18)

Fig. 4는 회전스프링상수 K_R 이 0.0인 외팔보기둥의 자유단에 부가된 말단질량의 관성모멘트가 계의 안정성에 미치는 특성을 도시하였다. 자유단에 부가한 말단질량의 관성모멘트는 계의 임계플러터하중을 크게 감소시키지만 그 질량관성모멘트가 커지면 오히려 임계플러터하중을 증가시킨다. 이러한 영향은 큰 말단질량에서는 작게 나타나고, 가벼운 말단 질량일수록 그 영향이 크게 작용한다.

Fig. 5는 외팔보기둥의 자유단이 회전스프링으로 탄성구속되고, 자유단의 말단질량의 관성모멘트 \bar{J} 가 0.0일 때 회전스프링의 상수 K_R 이 계의 안정성에 미치는 영향을 도시하였다.

K_R 이 0.3보다 크게 되면 Fig. 2와 같은 고유치곡선이 그려지지 않고, 고유치곡선이 발산하게 되어 K_R 의 작은 값(0.0~0.3)에서만 플러터가 존재하고, 그 작은 값에서 말단질량의 크기나 유무에 관

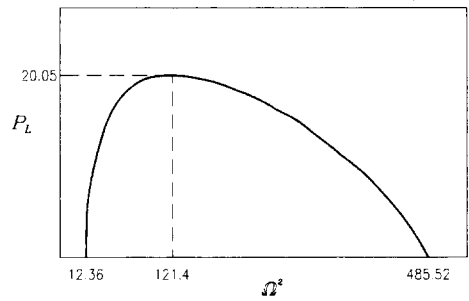


Fig. 2 Eigenvalue curve and the critical flutter load and frequency ($K_R = \bar{M} = \bar{J} = 0$)

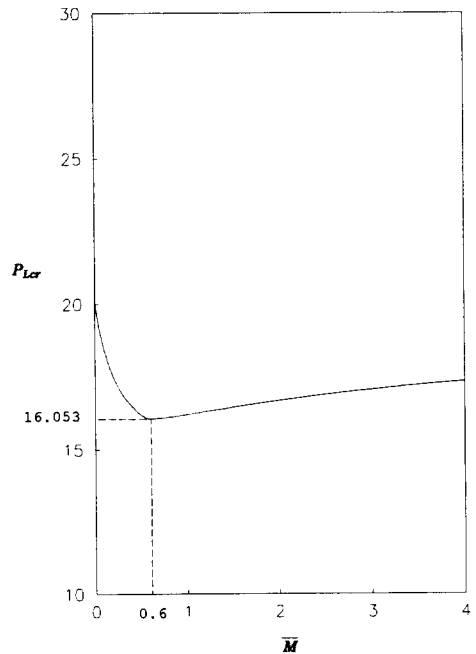


Fig. 3 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the tipmass \bar{M} ($\bar{J} = K_R = 0$)

계없이 계의 안정성을 조금씩 향상시킨다. 이러한 현상은 계의 안정성을 크게 향상시키는 병진스프링의 영향⁽¹⁹⁾과는 대조적이다.

Fig. 6~Fig. 9에는 외팔보기둥의 자유단을 탄성 구속하는 회전스프링상수 K_R 와 자유단의 부가말단 질량의 관성모멘트 \bar{J} 의 연성이 계의 안정성에 미치는 영향을 도시하였다.

\bar{J} 를 고려하지 않았던 Fig. 5와 달리 K_R 값의 적용범위가 대단히 커졌음은 곧 K_R 과 \bar{J} 가 크게 연성됨을 알 수 있다. 그 결과로 \bar{J} 가 작은 값

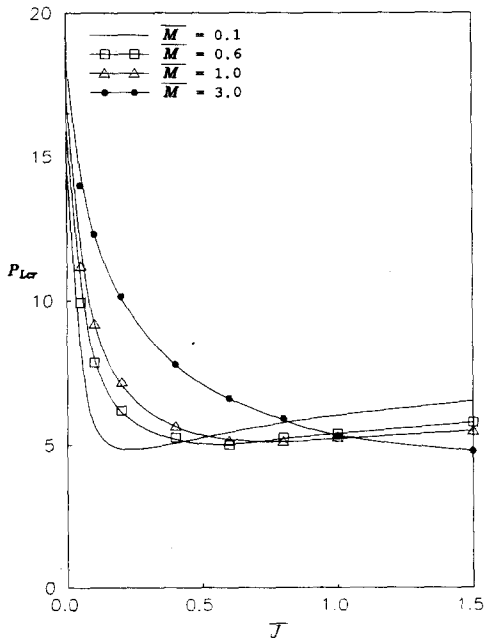


Fig. 4 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the moment of inertia of tip mass \bar{J} ($K_R=0$)

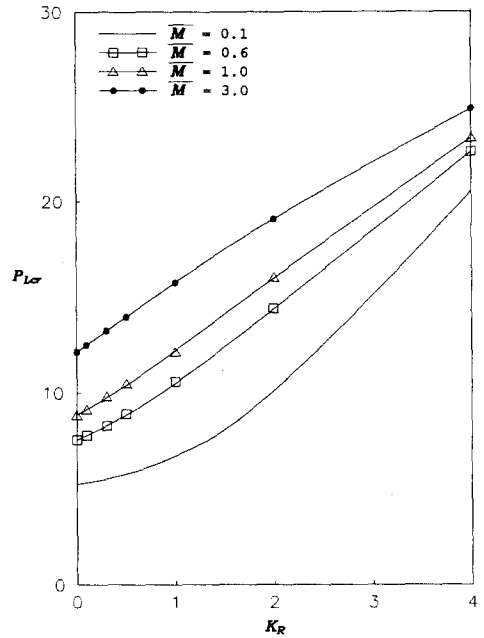


Fig. 6 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the spring constant K_R ($\bar{J}=0.1$)

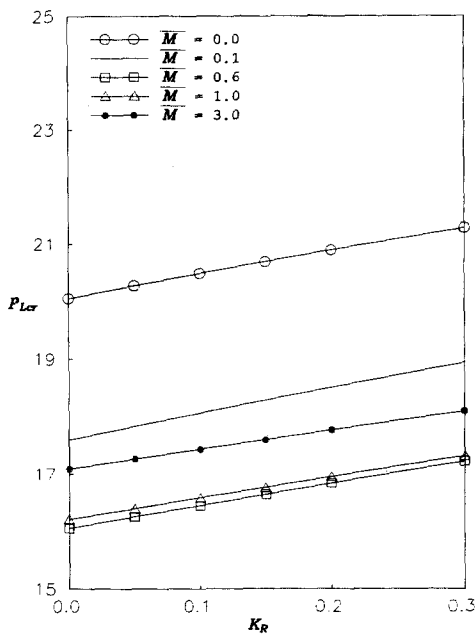


Fig. 5 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the spring constant K_R ($\bar{J}=0$)

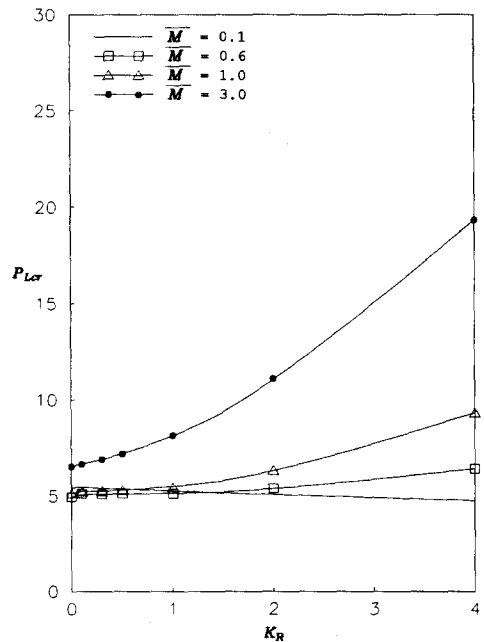


Fig. 7 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the spring constant K_R ($\bar{J}=0.6$)

0.1인 Fig. 6에서는 K_R 이 커짐에 따라서 계의 임계

플러터하중은 크게 증가하여 K_R 의 영향이 뚜렷하며, \bar{J} 와 K_R 이 연성되어 \bar{J} 를 무시한 집중질량의

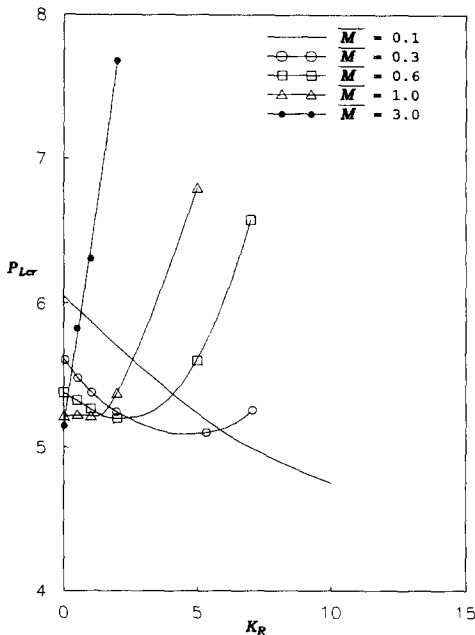


Fig. 8 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the spring constant K_R ($\bar{J}=1.0$)

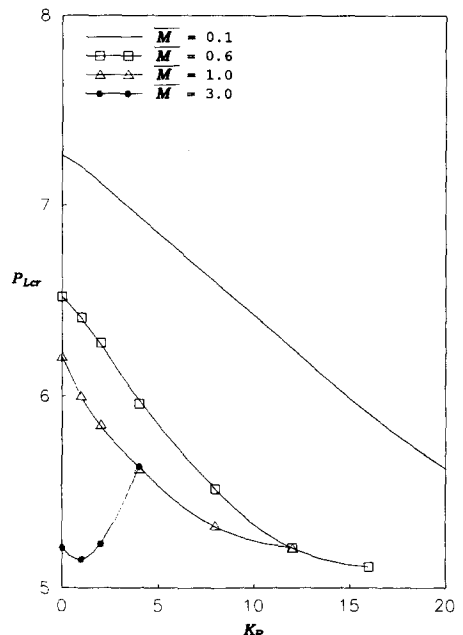


Fig. 9 Variation of the critical flutter load P_{Lcr} versus the spring constant K_R ($\bar{J}=3.0$)

경우보다 K_R 의 적용범위가 넓어졌다.

\bar{J} 가 0.6인 Fig. 7에서 말단질량의 크기가 작은 곡선에는 K_R 의 영향보다 \bar{J} 의 영향이 더 크게 작용하며, 말단질량이 큰 곡선은 K_R 의 증가와 함께 크게 증가하며, K_R 의 영향이 뚜렷하다.

\bar{J} 가 1.0인 Fig. 8에서는 K_R 이 증가함에 따라서 \bar{M} 가 0.1인 곡선은 크게 감소하고, \bar{M} 가 3.0인 곡선은 크게 증가하며, 동시에 K_R 의 적용범위가 매우 좁아졌다. 즉, \bar{M} 가 0.3일 때 K_R 이 2.0 이상이 되면 플러터가 일어나지 않는다. 다른 곡선도 각각 플러터가 일어나는 K_R 의 범위가 제한적이다. 또 \bar{M} 가 0.6과 1.0인 곡선에는 최소점이 존재한다.

\bar{M} 가 0.1인 곡선에서는 \bar{J} 와 K_R 의 연성이 \bar{M} 와 K_R 의 연성보다 매우 크게 나타나고, \bar{M} 가 3.0인 경우에는 \bar{M} 와 K_R 의 연성이 매우 크며, \bar{M} 가 0.6과 1.0인 곡선에서 최소점이 나타나는 이유는 그 점에서부터 K_R 과 부가말단질량 \bar{M} 의 연성효과가 \bar{J} 의 영향을 능가하기 때문이다.

\bar{J} 가 3.0인 Fig. 9에서는 \bar{J} 가 크므로 Fig. 8에 비하여 K_R 의 적용범위가 매우 커졌다. 따라서 \bar{J} 와 K_R 의 연성효과가 매우 크다.

4. 결 론

자유단에 집중중동력이 작용하는 외팔보기둥의 그 자유단이 회전스프링으로 탄성구속되고, 동시에 집중질량이 부가된 비보존적 탄성계의 안정성을 수치해석으로 연구하였다. 자유단의 부가질량과 회전스프링상수가 계의 안정성에 미치는 영향은 다음과 같다.

- (1) 부가말단질량의 관성모멘트가 증가하면 계의 안정성은 크게 감소한다.
- (2) 말단질량의 관성모멘트를 무시한 집중질량의 경우에는 회전스프링상수의 극히 작은 값(0.0~0.3)에서만 플러터가 존재한다.
- (3) 회전스프링은 말단질량의 관성모멘트와 크게 연성되어, 회전스프링상수가 증가함에 따라서 계의 안정성이 크게 향상된다.
- (4) 말단질량의 관성모멘트가 커질수록 회전스프링상수의 큰 값에까지 계의 플러터가 존재한다.

후 기

여 지원되었습니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Love, A. E. H., 1944, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth Ed., Dover Publications Inc., New York, pp. 401~405.
- (2) Ziegler, H., 1952, "Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik," *Ingenieur Archiv*, Vol. 20, pp. 49~56.
- (3) Chatayev, N. G., 1961 *The Stability of Motion*, Pergamon Press, Oxford London, New York, Paris.
- (4) Routh, E. J., 1955, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Dover Publ. Inc., New York.
- (5) Timoshenko S. and Gere, J. M., 1961, *The Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Inc., New York, pp. 156~157.
- (6) Bolotin, V. V., 1963, *Nonconservation Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, Oxford.
- (7) Leipholz, H., 1980, *Stability of Elastic Systems*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen Ann den Rijn, Netherlands.
- (8) Ziegler, H., 1968, *Principles of Structural Stability*, Blaisdell Pub. Co., Waltham.
- (9) Beck, M., 1952, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten, Tangential Gedrückten Stabes," *ZAMP*, Vol 3, pp. 225~228.
- (10) Leipholz, H., 1970, *Stability Theory*, Academy Press Inc., New York.
- (11) Leipholz, H., 1975, *Six Lectures on Stability of Elastic Systems*, University of Waterloo Press, pp. 18~19.
- (12) Ziegler, H., 1953, "Stabilitätsprobleme bei Geraden Stäben und Wellen," *ZAMP*, Vol. 2, pp. 265~289.
- (13) Ziegler, H., 1952, "Knickung Gerader Stäbe unter Torsion," *ZAMP*, Vol. 3, pp. 96~119.
- (14) Leipholz, H., 1977, "On the Application of the Energy Method of the Stability Problems of the Nonconservative Mechanical System," *Acta Mechanica*, Vol. 28, pp. 113~138.
- (15) Pflüger, A., 1955, "Zur Stabilität des Tangential Gedrückten Stabes," *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 35, No. 5.
- (16) 윤환익, 김광식, 1984, "말단질량의 관성모멘트가 Beck's column의 안정성에 미치는 영향," 대한기계학회논문집, 제8권, 제2호, pp. 119~126.
- (17) 진종태, 1994, "자유단이 탄성지지되고 말단 질량을 가진 Leipholz 기둥의 안정성," 박사학위논문, 동의대학교, 부산.
- (18) 박일주, 1996, "등분포중동력을 받는 탄성봉의 안정성에 미치는 양단의 탄성구속과 말단질량의 영향," 박사학위논문, 동의대학교, 부산.
- (19) 윤환익, 진종태, 김현수, 1993, "중동력을 받는 탄성봉의 동적응답," 한국창조공학회지, 제19권, 제1호, pp. 25~31.