

〈논 문〉

구조물의 토폴로지 최적화에 관한 연구

박 상 훈* · 윤 성 기**

(1996년 8월 29일 접수)

A Study on the Topology Optimization of Structures

Sang-Hoon Park and Sung-Kie Youn

Key Words : Topology Optimization(토폴로지 최적화), Shape Optimization(형상 최적화), Structural Design(구조설계)

Abstract

The problem of structural topology optimization can be relaxed and converted into the optimal density distribution problem. The optimal density distribution must be post-processed to get the real shape of the structure. The extracted shape can then be used for the next process, which is usually shape optimization based on the boundary movement method. In the practical point of view, it is very important to get the optimal density distribution from which the corresponding shape can easily be extracted. Among many other factors, the presence of checker-board patterns is a powerful barrier for the shape extraction job. The nature of checker-board patterns seems to be a numerical locking. In this paper, an efficient algorithm is presented to suppress the checker-board patterns. At each iteration, density is re-distributed after it is updated according to the optimization rule. The algorithm also results in the optimal density distribution whose corresponding shape has smooth boundary. Some examples are presented to show the performance of the density re-distribution algorithm. Checker-board patterns are successfully suppressed and the resulting shapes are considered very satisfactory.

1. 서 론

구조물의 형상 최적화를 위해서는 구조물의 형상을 수학적으로 표현하여야 한다. 형상을 표현하는 방법은 크게 두가지로 나누어 볼 수 있다. 우선, 직접적인 방법으로 공간상의 모든 점에서 재료가 있고 없음을 나타내어 형상을 표현할 수 있다. 다음으로, 간접적인 방법으로 재료와 공간의 경계로서 형상을 표현할 수 있다. 지금까지 형상 최적화와 관련하여 관심을 끌어난 방법은 경계이동법(boundary movement method)으로서, 설계 민감도 해석을 통해서 경계를 이동시키면서 최적의 형상을 찾아가는 방법이다. 이 방법은 다음의 문제점들을 가지고 있다. 설계 민감도해석을 위해서 유한요소법을 사용하는 경우에 경계의 변화에 따라서 요소 재분할(remeshing)이 필요하게 된다. 유한요소법 대신에 경계요소법을 사용하면 까다로운 요소재분할 대신에 간단한 경계만의 분할로 충분하다. 그러나, 경계이동법의 근본적인 한계점은 역시 극복할 수 없다. 경계이동법에서는 경계를 연속적으로 변화시키기 때문에 구멍(hole)의 생성이나 제거와 같은 토폴로지의 변화가 불가능하다. 즉, 최적의 형상이 초기에 주어진 토폴로지에 의해서 제한받게

*한국과학기술원 기계공학과

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

된다. 이는 설계자가 최적 토폴로지를 경험에 의해서 가정해야 함을 의미한다.

따라서, 토폴로지 최적화를 위해서는 형상을 직접적인 방법으로 표현하여야 한다. 다시 말해서, 재료가 있으면 1, 없으면 0을 가지는 지시함수(indicator function)를 통해서 형상을 표현하여, 목적함수를 최적화하는 지시함수를 주어진 설계영역에서 구하면 된다. 그런데, 0과 1만을 가지는 지시함수를 사용할 경우에 형상 최적화 문제는 일반적으로 해를 가지지 아니한다.⁽¹⁾ 따라서, Kohn과 Strang,⁽¹⁾ 그리고 Chenais⁽²⁾가 지적하였듯이, 형상 최적화에서 토폴로지의 변화를 위해서는 균질화법(homogenization method)과 같은 방법을 도입하여 주어진 문제를 완화(relaxation)하는 것이 필요하다.

이에 Bendsoe와 Kikuchi⁽³⁾는 균질화법을 이용하여 구조물의 최적 토폴로지를 찾는 방법을 제안하였다. 이들은 무한히 반복되는 사각형 구멍을 가진 미시구조(microstructure)를 도입하고 균질화법을 이용하여 주어진 재료의 밀도와 탄성계수 사이의 관계를 구해내었다. 이를 매개로 형상 및 토폴로지 최적화 문제를 완화하여 주어진 목적함수를 최적화하는 밀도분포를 구하였다. 이렇게 구해진 밀도분포로부터 구조물의 형상을 결정할 수 있다. 이 방법은 요소재분할이 필요가 없으며, 형상과 토폴로지를 동시에 최적화한다. Suzuki와 Kikuchi⁽⁴⁾는 이 방법을 구조물의 강성설계에 이용하였으며, Bendsoe⁽⁵⁾는 균질화법을 이용하는 대신에 두 차례에 걸친 적층(layering)으로 이루어진 2차적층재료(rank-2 material)을 도입하여 사용하였다. 이외에도 균질화법 또는 2차적층재료를 이용한 토폴로지 최적화 연구를 살펴보면 다음과 같다. Diaz와 Kikuchi⁽⁶⁾는 구조물의 고유치를 최적화하는 형상 및 토폴로지 설계에 응용하였으며, Diaz와 Belding⁽⁷⁾은 트리스형 구조물의 설계에 응용하였다. Bendsoe, Diaz와 Kikuchi⁽⁸⁾는 여러 종류의 하중 및 경계조건에 대하여 동시에 최적화하는 문제에 응용하였을 뿐 아니라, 토폴로지 최적화와 관련된 다양한 언급을 하였다. Allaire와 Kohn⁽⁹⁾은 설계 변수를 소거하여 주어진 최적화 문제를 비선형 문제로 바꾸어서 해결하는 방법을 제안하였고, Allaire와 Francfort,⁽¹⁰⁾ 그리고, Jog, Haber와 Bendsoe⁽¹¹⁾는 해석적인 방법을 통해서 주어진 설계 변수를 소거하여 줄이는 방법을 제안하였다.

지금까지 언급한 방법들은 형상 최적화 문제를 완화하여 최적의 밀도분포를 구하는 것이다. 이 방법은 경계이동법과 결합하여 통합된 형상 최적화 방법을 구축할 수 있다.⁽¹²⁾ 즉, 최적 밀도분포로부터 최적의 토폴로지와 함께 최적에 매우 근접한 형상을 얻을 수 있고, 이렇게 얻어진 형상을 초기 형상으로 하여 경계이동법을 이용하면 최종의 최적 형상을 얻을 수 있다. 여기서, 최적 밀도분포 결정 단계에서는 그리 영향이 크지 않은 설계조건들은 생략하고 중요한 설계조건들만으로 밀도분포를 구해낸 뒤에, 경계이동법을 이용한 최종 형상 결정단계에서 모든 설계조건을 고려할 수도 있다.⁽¹²⁾

일단 최적의 밀도분포가 구해지면 이로부터 형상을 결정하는 후처리단계를 거치게 된다. 이를 용이하게 하기 위해서는 다음과 같은 사항들이 요구된다. 우선, 구해진 밀도분포에 중간값(intermediate value)들이 적을수록 좋다. 즉, 설계영역에서의 각 점의 밀도가 0 또는 1에 가까울수록 좋다. 이를 위해서는 밀도와 탄성계수 사이의 관계의 비선형성을 강하게 하거나,⁽⁸⁾ 또는 중간값을 가지는 밀도분포에 대해서 벌칙화하는 방법⁽⁹⁾이 있다. 이 중에서 밀도와 탄성계수 사이의 관계를 조절하는 방법은 그 관계를 임의로 가정하는 가상재료를 도입함으로써 가능하다.^(8, 14) 가상재료는 이외에도 모델링이 간단하다는 점과 설계변수의 수를 최소화할 수 있다는 장점도 있다. 다음으로는, 유한요소해석에 사용되는 요소의 안정성이 부족하여 생기는 문제가 있다. 통상적으로 요소내에서는 밀도를 상수로 가정하는데, 이 경우에 4절점 선형요소를 사용하면 밀도분포가 바둑판무늬(checker-board patterns)처럼 되는 경우가 있다.⁽⁸⁾ 이는 일종의 잠김현상(locking)으로 추정된다.⁽⁸⁾ 이는 이론적으로는 고차요소를 사용하면 해결할 수 있으나, 막대한 계산비용이 필요하게 되어 현실성이 없다.

따라서, 본 연구에서는 용이하게 하기 위해서 필수적인 요소의 하나인 바둑판무늬의 형상억제를 위한 효율적인 알고리즘인 밀도재분배 알고리즘(density re-distribution algorithm)을 제안하고자 한다. 제안하는 알고리즘을 보다 효과적으로 사용하기 위해서는 탄성계수를 밀도만의 함수로 표현하는 것이 유리하다. 이에 가상재료를 사용하여 밀도와 탄성계수 사이의 관계를 정의하여 사용하기로 한다. 또한, 가상재료는 최적 밀도분포에 중간값들을 줄여주는 효과도 가질 수 있는 잇점이 있다. 최

적화 알고리즘에 관해서는, 본 연구의 목적이 후처리의 용이성에 있으므로, 구현이 편리하여 토폴로지 최적화기법의 연구에 많이 사용되어온 최적조건법(optimality criteria method)을 사용하기로 한다. 다음장에서는 토폴로지 최적화를 위한 수식화 와 이에 따라 본 연구에서 사용된 최적화 알고리즘인 최적조건법을 간단히 소개한뒤, 바둑판무늬 형성억제를 위한 밀도재분배 알고리즘을 제안하고자 한다.

2. 이 론

2.1 문제 정의

구조물의 형상 최적화 문제의 일반적인 표현은 다음과 같다.

Find the shape of the structure such that
minimize the objective function
subject to state equations
design constraints

정적 하중하에 있는 구조물의 형상 최적화 문제에서 상태방정식(state equation)은 평형방정식과 경계조건 등이 된다. 목적함수와 설계제한조건은 여러가지가 있을 수 있으나, 본 연구에서는 주어진 양의 재료를 이용하여 평균굴성(mean compliance)를 최소화하는 형상을 찾도록 한다. 평면응력상태에 있는 선형탄성 문제를 가정하고, 체적력을 f , 경계에서의 하중을 t 라고 하면, 위의 표현은 다음과 같이 구체화된다.

$$\text{Minimize } L(u) \quad (1a)$$

Subject to

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in U \quad (1b)$$

$$|\Omega| \leq \Omega_s \quad (1c)$$

여기서,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \epsilon_{ij}(v) dx \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_t} t \cdot v ds \quad (4)$$

여기서, U 는 기구학적 가용변위장(kinematically admissible displacement field)이고, Ω 는 구조물

이 존재하는 영역이며, Ω_s 는 주어진 재료의 양을 나타낸다.

그런데, 식 (1b)의 해 u 는 전체 포텐셜에너지 $\Pi(u)$ 를 최소화하는 변위장이 되며, 평균굴성 $L(u)$ 는 전체 포텐셜에너지 $\Pi(u)$ 와 다음의 관계를 가진다.

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) = -\frac{1}{2} L(u) \quad (5)$$

따라서, 전체 포텐셜에너지를 사용하면 다음과 같이 형상 최적화 문제를 정의할 수 있다.

$$\text{Maximize minimize } \Pi(v) \quad (6a)$$

$$\Omega \quad v \in U$$

$$\text{Subject to } |\Omega| \leq |\Omega_s| \quad (6b)$$

2.2 균질화법을 이용한 수식화

2.2.1 형상표현방법

구조물의 형상 최적화를 위해서는 구조물 형상의 표현이 필요하다. 형상표현의 방법으로는 형상의 경계를 매개변수화하는 방법과 지시함수(indicator function)를 이용하는 방법이 있다. 경계의 매개변수화는 스플라인(spline)이나 직선 등의 간단한 함수를 이용하는 방법과 경계의 절점(node)을 매개변수로 하는 방법이 있다. 이 방법의 문제점은 토폴로지의 변화가 불가능하다는 것이다. 지시함수는 재료가 있으면 1, 없으면 0을 갖는 함수로서 다양한 토폴로지를 표현할 수 있다. 즉, 지시함수는 다음과 같이 정의된다.

$$x(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega^m \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega^m \end{cases} \quad (7)$$

$$E_{ijkl}(x) = x(x) E_{ijkl}^m \quad (8)$$

여기서, Ω^m 는 재료가 있는 영역, 즉 구조물이 차지하는 영역이다.

이와 같이 정의된 지시함수를 이용하면 형상 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Maximize minimize } \Pi(x, v) \quad (9a)$$

$$x \quad v \in U$$

$$\text{Subject to } \int_{\Omega_0} x dx \leq \Omega_s \quad (9b)$$

그러나, 식 (9)는 일반적으로 해를 가지지 아니한다.⁽³⁾ 이는 지시함수가 매끄러운(smooth) 함수가 아니기 때문이다. 0과 1만을 가지는 지시함수를 사용하는 대신에 0에서 1까지의 모든 값을 가질 수

있는 밀도분포를 도입하면 식 (7)은 잘 정의된 문제로 되어 해를 구할 수 있게 된다.

2.2.2 형상 최적화 문제의 완화

균질화법(homogenization method)은 미시구조를 가지는 복합재료의 거시적인 유효 물성치를 결정하는 방법이다. 따라서, 주어진 재료와 빈 공간으로 이루어진 미시구조를 가지는 복합재료를 도입하고 균질화법을 이용하면, 주어진 재료의 유효 탄성계수를 밀도의 함수로 구할 수 있다. 이렇게 구해진 관계를 이용하여, 형상 최적화 문제를 다음과 같이 밀도분포를 구하는 문제로 바꾸어 줄 수 있다.

$$\text{Maximize minimize } \rho \quad v \in U \quad \Pi^H(\rho, v) \quad (10a)$$

$$\text{Subject to } 0 \leq \rho \leq 1 \quad (10b)$$

$$\int_{\Omega_D} \rho dx \leq \Omega_S \quad (10c)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Pi^H(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} E_{ijkl}^H(\rho) \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx \\ & - \int_{\Omega_D} f \cdot v dx - \int_{\Gamma} t \cdot v ds \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, Ω_D 는 고정된 설계영역이고, $E_{ijkl}^H(\rho)$ 는 균질화된 유효 탄성계수로서 밀도의 함수가 된다.

2.2.3 미시구조의 종류와 특성

$E_{ijkl}^H(\rho)$ 를 구하는 방법은 여러가지가 있다. 한 가지 방법은 사각형 구멍을 가진 미시구조를 도입하고 균질화법 이론을 이용하여 무한히 반복되는 미시구조를 가지는 재료의 유효 탄성계수를 유한요소법을 이용하여 몇 개의 밀도에 대해서 구한 후, Legendre 다항식 등을 이용하여 보간하여 사용하는 방법이 있다. 다른 한 가지 방법은 한 방향으로 주어진 재료와 빈 공간을 적층하여 1차적층재료라 불리는 복합재료를 구성하고, 1차적층재료와 주어진 재료를 서로 수직하게 다시 적층하여 2차적층재료라는 복합재료를 구성할 수 있다. 2차적층재료를 사용하면 유효 탄성계수를 해석적인 방법으로 구할 수 있다. 참고로, 2차적층재료는 주어진 밀도에 대해서 가장 효과적으로 하중을 지탱할 수 있는 구조로 알려져 있다.⁽⁶⁾ 위의 두가지 미시구조를 사용하면 유효 탄성계수는 3가지 설계변수의 함수가 된

다. 이중 2개는 밀도와 관련되고, 나머지는 미시구조의 방향(orientation)이다. 사각형 구멍을 가지는 미시구조의 경우는 구멍의 모양이 정사각형이 되도록 하여 밀도와 관련된 설계변수를 1개로 줄일 수 있다. 2차적층재료의 경우에는 해석적인 방법을 통하여 설계변수를 줄일 수 있는데,⁽⁹⁾ 변위에 관한 수식화에서는 1개로 줄일 수 있으며, 응력에 관한 수식화에서는 설계변수를 모두 소거할 수도 있다. 그러나, 설계변수를 줄임에 따라서 지배방정식이 비선형화하고 해를 찾기가 어려워지는 단점도 있다. 위와 같이 특정한 미시구조를 도입하여 그로부터 유효 탄성계수를 구해내는 방법 이외에 특정한 미시구조의 도입없이 임의로 유효 탄성계수를 밀도의 함수로 가정하는 방법이 있다. 이를 가상재료(artificial material)라 한다. 예를 들어, 주어진 재료의 탄성계수에 밀도의 n 승을 곱하여 줌으로써 유효 탄성계수를 정의할 수 있다.

사각형 구멍을 가지는 미시구조는 유효 탄성계수를 해석적인 방법으로 구할 수 없다는 문제가 있으나, 이를 이용해서 구한 밀도분포는 2차적층재료의 경우보다 중간값이 적게 나온다.⁽⁸⁾ 이에 반해서 2차적층재료의 경우는 유효 탄성계수가 해석적으로 간단하게 구해지며, 설계변수의 소거를 해석적으로 행하기가 쉬운 반면에,⁽⁸⁻¹⁰⁾ 계산되는 최적 밀도분포에 중간값을 가지는 구역이 많아서 구해진 밀도분포를 최적의 형상과 연결시키기가 다소 어려운 단점을 가지고 있다. 이는 2차적층재료의 경우 주어진 밀도에서 강성이 크기 때문이다. 그러나, 이는 벌칙함수의 도입으로 어느 정도는 해결이 가능하다.^(9,10) 가상재료는 탄성계수와 밀도와의 관계를 임의로 정하기 때문에 별다른 소거과정이 없이 설계변수를 1개로 할 수 있다. 사각형 구멍을 가지는 미시구조와 2차적층재료의 경우에 설계변수가 3개이며, 이는 3차원 문제의 경우에는 더욱 늘어난다. 또한 사각형 구멍을 가지는 미시구조와 2차적층재료의 경우에는 비등방성 문제가 되지만, 가상재료를 사용하면 등방성을 유지할 수 있다. 또한, 유효 탄성계수를 매우 간단하게 구할 수 있으며, 가상재료를 정의하는 관계식을 적당히 조절하여 원하는 특성을 가지게 할 수 있다. 예를 들면, 최적 밀도분포에 중간값들을 줄이기 위해서 밀도와 유효 탄성계수 사이의 비선형성을 증가시킬 수 있다. 이외에도, 가상재료 자체가 가지는 단순성에 힘입어 최적화 알고리즘의 보완이 용이해지기도 한다. 실제

로 본 연구에서 제시하는 바둑판무늬 억제 알고리즘은 이같은 사실에 기초하고 있다. 한편, 가상재료의 경우에는 물리적인 배경이 없다는 것이 문제를 일으킬 소지를 가지고 있으며, 사각형 구멍을 가지는 미시구조나 2차적층재료의 경우 물리적인 의미를 이용하여 토폴로지 최적화 알고리즘의 개선에도 사용하고 있다. 그러나, 본 연구에서는 토폴로지 최적화의 수식화나 최적화 알고리즘 자체보다는 후처리과정과 관계된 부분에 관심이 있고, 가상재료의 사용이 이러한 목적에 여러가지로 부합된다. 따라서 다음과 같이 정의되는 가상재료를 사용하기로 한다.^(8, 14)

$$[E^H] = \rho^H [E] \quad (12)$$

여기서, E^H 는 유효 탄성계수이며, E 는 원래 재료의 탄성계수이다.

2.3 최적화 알고리즘

앞에서 유도한 형상 최적화 문제의 최적 밀도분포를 구하기 위해서는 최적화 알고리즘이 필요하다. 토폴로지 최적화 문제의 특성을 감안하면 다음과 같은 최적화 알고리즘이 사용가능하다.

우선 최적조건법(optimality criteria method)을 이용하는 방법이 있다.^(3, 4) 라그랑지승수(Lagrange multiplier)를 도입하여 설계제한조건을 전체 포텐셜에너지에 포함시켜 새로운 목적함수를 만들어 제한이 없는 문제형태로 바꾸어 준 뒤, 변분법을 이용하여 최적조건을 찾아낸다. 이렇게 구해진 최적조건은 경계조건 등을 포함한 평형방정식과 최적의 밀도분포 및 그에 대한 제한을 내포하고 있다. 이제 최적조건을 만족시키도록 밀도분포와 이에 따른 변위장을 번갈아 가면서 개선시키면 원하는 해에 도달할 수 있다. 여기서 변위장은 유한요소법을 이용하여 수치적으로 구하며, 이렇게 구해진 변위장으로부터 밀도분포를 개선시키는 것은 또 하나의 축차를 필요로 한다.

최근에는 수학적 계획법(mathematical programming method)을 이용한 방법들이 제안되었는데, Tenek과 Hagiwara⁽¹³⁾는 사각형 구멍을 가진 미시구조를 사용하고 가용방향법(method of feasible directions)에 근거한 순차적 선형계획법(sequential linear programming)을 이용하였으며, Yang과 Chuang⁽¹⁴⁾은 밀도의 거듭제곱형태를 가진 가상 재료를 이용하고 순차적 선형계획법을 이용하였다.

설계조건이 매우 복잡한 경우에는 최적조건법은 사용이 곤란해진다. 예를들어, 최대 응력을 제한조건으로 가지는 문제의 경우는 수학적 계획법을 사용해야 한다. 그런데, 토폴로지 최적화에서 수학적 계획법을 사용할 때에는 설계변수의 수가 매우 많기 때문에 순차적 선형계획법을 사용해야 하며, 여기에는 일차원 탐색이 포함되기 때문에 유한요소해석의 횟수가 커진다. 그런데, 최적 밀도분포를 구한 후에 이를 초기 형상으로 하여 경계이동법을 이용하여 최적 형상을 구하는 단계를 고려하면, 최적 밀도분포를 구하는 단계에서는 구조물의 토폴로지 및 형상에 결정적인 영향을 미칠 수 있는 설계조건들만 고려해도 무방할 것이다. 예를 들면, 설계조건 중에서 최대 응력의 제한조건 등은 제외할 수도 있다. 이런식으로 설계조건을 단순화하면 수학적 계획법 대신에 최적조건법을 사용하기가 쉬워진다. 최적조건법은 설계변수가 많은 경우에도 효과적으로 쓰일 수 있으며, 알고리즘을 간단히 구현할 수 있다. 더구나 본 연구에서는 형상을 유추하기에 보다 용이한 최적 밀도분포를 얻어내는 데에 관심이 있으므로, 최적화 알고리즘은 앞에서 언급한 간단한 설계조건에 대하여 최적조건법을 이용하기로 한다.

식 (10)의 각각의 제한조건에 대하여 라그랑지승수를 도입하여 최적조건을 구하고, 이로부터 다음과 같은 밀도분포 개선 알고리즘을 얻을 수 있다.⁽⁴⁾

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \max\{(1-\zeta)\rho_k, 0\} & \text{if } \rho_k D_k^\eta \leq \max\{(1-\zeta)\rho_k, 0\} \\ \rho_k D_k^\eta & \text{if } \max\{(1-\zeta)\rho_k, 0\} \leq \rho_k D_k^\eta \leq \min\{(1+\zeta)\rho_k, 1\} \\ \min\{(1+\zeta)\rho_k, 1\} & \text{if } \min\{(1+\zeta)\rho_k, 1\} \leq \rho_k D_k^\eta \end{cases} \quad (13)$$

여기서,

$$D_k = \Lambda^{-1} \frac{\partial E_{\text{tot}}^H}{\partial \rho_k} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) \quad (14)$$

여기서, η 와 ζ 는 각각 가중인자(weighting factor)와 이동한계(move limit)로서 알고리즘의 수렴 속도 및 안정성과 관련이 있다. Λ 는 체적제한(volume constraint)와 관련된 라그랑지승수로서 밀도분포 개선단계마다 체적 제한을 맞추도록 해주어야 한다. 여기서, 가중인자는 0.5~1.0, 이동한계는 1.0 이상을 사용하면 알고리즘의 수렴에 큰 문제가 없었으며, 각각의 결과에도 커다란 차이는 보이지 않았다. 본 연구에서는 가중인자는 0.5, 이동한계는 1.0을 사용하였다.

2.4 바둑판무늬 억제 알고리즘

최적 밀도분포를 구해내기 위해서 밀도분포를 개선해 나가기 위해서는 평형방정식을 풀어서 개선에 필요한 정보를 얻어야 한다. 이를 위해서는 유한요소해석이 필요하게 된다. 유한요소해석에 쓰이는 요소의 안정성때문에 생기는 문제로 바둑판무늬의 형성이 있다.^(6,8) 계산의 효율성때문에 각 요소내에서 밀도는 보통 상수로 가정하게 되는데, 이때에 4절점의 사각형 요소를 사용한다면 바둑판무늬의 형성을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 일종의 잠김현상으로 추정되고 있다.⁽⁸⁾ 바둑판무늬가 형성된 부분은 형상을 추출해 내기가 곤란하다. 따라서 바둑판무늬가 형성되지 않도록 해야 하는데, 여기에는 두가지 방법이 있을 수 있다. 첫째, Babuska-Brezzi 조건에 의해서 안정성이 보장된 요소를 사용하는 것이다. 즉, 이런 경우에는 8절점의 사각형 요소를 사용하면 된다고 알려져 있다.⁽¹¹⁾ (물론, 요소내에서 밀도가 상수가 아니라면 안정성 보장을 위해서는 더욱 고차의 요소가 필요하다. 이 경우에는 안정성 문제가 바둑판무늬가 아닌 다른 형태로 나타날 수도 있다.) 그런데, 이 방법을 사용하면 유한요소해석에 필요한 선형방정식의 크기가 기하급수적으로 커져서 쓸만한 해상도의 밀도분포를 얻기가 현실적으로 곤란해지는 단점이 있다. 둘째, 바둑판무늬의 형성을 억제하는 특별한 알고리즘을 사용하는 것이다. 알려진 방법으로는 바둑판무늬형태의 밀도분포를 밀도분포의 함수공간에서 제외하는 방법이 있다.⁽⁸⁾ 그러나, 이 방법을 적용하기 위해서는 매 밀도 개선때마다 바둑판무늬를 점검해야 하는데, 바둑판무늬는 한가지 형태로만 나타나는 것이 아니기 때문에 바둑판무늬의 형성여부를 판단하기가 곤란하다.

바둑판무늬의 형성을 억제하고, 형상을 추출해 내기에 보다 용이한 최적 밀도분포로 수렴하도록 하는 새로운 알고리즘이 요구된다. 바둑판 무늬의 형성을 관찰해 보면, 일종의 잠김현상(locking)과 같음을 알 수 있다. 즉, 바둑판무늬의 구조가 하중을 효과적으로 지탱할 수 있는 것처럼 계산되기 때문에 재료의 밀도가 중간값을 갖게 되는 부분은 바둑판무늬를 형성하게 된다. 다시 말해서, 하중이 크게 걸리는 곳에는 재료가 많이 분배되어 그 주위의 밀도가 1에 가까워지고, 하중이 거의 걸리지 않은 곳에는 재료가 분배되지 않아서 그 주위의 밀도가 0에 가까워진다. 그러나, 하중이 중간부분의 값

을 취하는 곳에는 재료가 중간정도로 분배되고, 이러한 재료를 효과적으로 사용하려다 보면, 계산상으로는 강도가 크게 나오는 바둑판무늬가 형성되는 것이다. 이러한 현상을 방지하고 보다 매끄러운 최적 밀도분포를 얻어내기 위해서 다음과 같이 밀도분포를 재분배하는 알고리즘을 제안하고자 한다.

(1) 식 (13)에 따라서 밀도를 개선한다.

(2) 각 절점에서, 주위의 요소들의 밀도를 평균하여 각 절점에서의 밀도를 구한다.

(3) 각 절점의 밀도로부터 형상함수를 이용하여 각 요소의 중심에서의 밀도를 구한다.

(4) 위와 같이 새로 분배된 밀도분포를 가지고 최적화를 계속 진행한다.

이 방법은 각 요소내에서 밀도를 상수로 가정하고, 4절점 사각형요소를 사용한 경우에 해당된다. 토폴로지 최적화에서는 전 설계영역에서 요소의 크기가 상당히 규칙적이기 때문에, 통상적으로 각 절점에서의 밀도를 구할 때는 주위의 요소의 갯수로 평균을 내면 된다. 본 연구에서 사용한 예제는 모두 같은 모양과 크기를 가진 요소만을 사용했다. 그러나, 설계영역이 복잡하거나 적응형 방법들이 이용될 경우는 요소의 크기가 조금씩 다를 수 있다. 이 경우에는 밀도재분배 전후의 총질량이 일정하게 유지되도록 하여주어야 한다. 또한, 보다 복잡한 요소나 밀도분포를 사용하는 경우에 대해서는 밀도와 변위에 대한 형상함수를 이용할 수 있을 것이다. 요점은 각 요소의 절점에서의 밀도를 계산하고, 이를 각 요소의 형상함수를 이용하여 밀도를 보간하여 재분배하는 것이다. 이러한 재분배에 의해서, 바둑판무늬가 형성된 부분에서는 밀도가 평균화되어 바둑판무늬의 형성을 억제한다. 다른 부분, 즉 하중이 크게 걸려서 재료가 많이 사용되는 부분과 하중이 작게 걸려서 재료가 거의 필요없는 부분은 거의 변화가 없다. 구조물의 경계부에서는 밀도재분배가 경계를 좀 더 매끄러운 모양으로 수렴해 가도록 하여준다. 다시 말해서, 밀도재분배 알고리즘은 고주파수의 오차를 걸러내는 필터(low-pass filter)와 같은 역할을 하는 것이다.

다음 장에서는 지금까지 언급한 일련의 방법, 밀도의 거둬들여 공급을 곱하여 얻은 가상재료를 사용하고, 라그랑지승수를 도입한 최적조건법에 의한 밀도 개선 알고리즘에 각 개선단계에서 밀도를 재분배하는 알고리즘을 도입한 최적화 방법을 몇 가지 예제에 적용해 보고자 한다.

3. 예제 및 고찰

모든 예제에 대해서 $n=3$ 인 가상재료를 사용하였다. 이 값을 사용한 이유는 $n=2$ 인 경우는 탄성계수와 밀도사이의 비선형성이 너무 작아 중간값의 밀도가 너무 많이 나오는 경향이 있고, $n=4$ 이상인 경우에는 탄성계수가 밀도에 따라 너무 급격히 변화하는 부분때문에 결과가 다소 매끄럽지 못한 경향을 보이기 때문이었다. 그러나, 필요에 따라 다른 값을 사용해도 아래에 언급한 내용에는 차이가 없다.

3.1 한쪽이 고정된 보구조물

Fig.1과 같이 한쪽 끝이 고정된 설계영역의 반

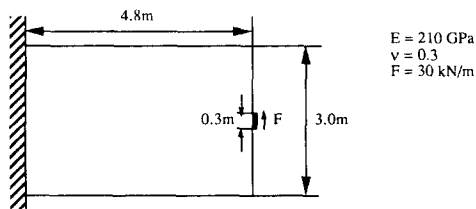
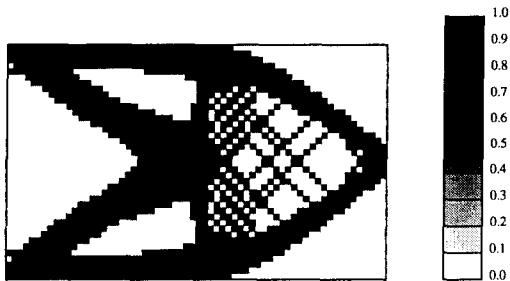
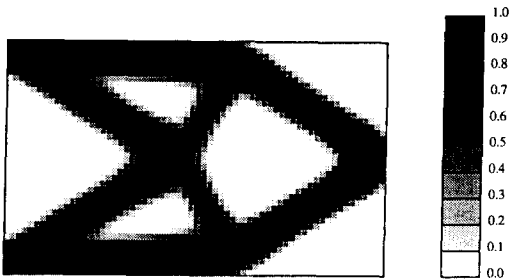


Fig. 1 Design domain for bending of a short cantilever



(a) Without suppression of checker-board pattern



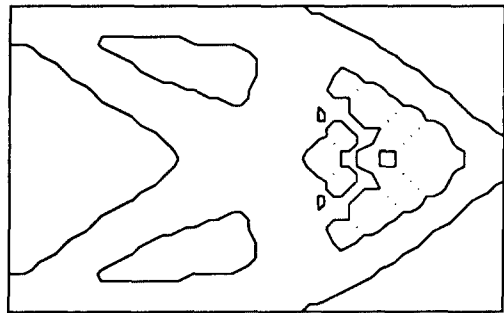
(b) With suppression of checker-board pattern

Fig. 2 Density distribution after 40 iterations

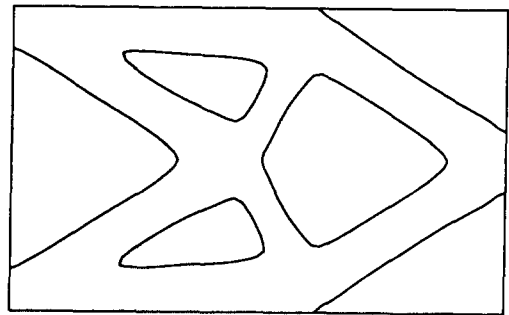
대편의 일부분에 중방향의 분포하중을 주었다. 가로방향으로 64개의 요소, 세로방향으로 40개의 요소를 사용하였으며, 50%의 재료를 사용한 경우에 대해서 밀도재분배 알고리즘을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우를 비교하여 보았다.

Fig.2는 40회 축차 후의 밀도분포를 나타내고 있다. 밀도재분배 알고리즘을 사용하지 않은 경우에 바둑판무늬가 심하게 나타나고 있는데, 밀도재분배 알고리즘을 사용하자 바둑판 무늬가 사라졌음을 알 수 있다. 수렴에 필요한 축차횟수는 두 경우에 거의 차이가 없다. 계산에 소요되는 시간의 대부분은 유한요소해석에 쓰이므로, 밀도재분배 알고리즘을 도입하더라도 계산시간은 거의 변화가 없다. Fig.3은 최적 밀도분포로부터 밀도가 0.5인 등고선을 그려본 것이다. 밀도재분배 알고리즘을 사용한 경우에는 구조물의 경계가 매끄럽게 나옴을 알 수 있다.

이 예제로부터 제안된 밀도재분배 알고리즘은 바둑판무늬의 형성을 억제할 뿐만 아니라 구조물의 경계를 매끄럽게 하여줌을 알 수 있다. 또한, 밀도재분배 알고리즘을 도입하더라도 계산시간에는 거



(a) Without suppression of checker-board pattern



(b) With suppression of checker-board pattern

Fig. 3 Contour lines of $\rho=0.5$

의 차이가 없었다.

3.2 트러스구조물

이번에는 제시된 알고리즘이 트러스형태의 구조물을 제대로 구해낼 수 있는지를 알아보기로 하였다. 경계 및 하중조건과 설계영역은 Fig. 4와 같고, 25%의 재료를 사용하였다. 가로방향으로 120개, 세로방향으로 60개의 요소를 사용하였다. Fig. 5는 수렴된 최적 밀도분포이다. 바둑판무늬가 생기지 않음을 알 수 있다. Fig. 6은 밀도가 0.5인 점들을 연결하여 얻은 구조물의 경계이다. 그림에서 알 수 있듯이 경계가 매끄럽게 표현되어 있다.

이 예제는 제시된 알고리즘이 재료가 차지하는 비중이 큰 경우뿐만 아니라 작은 경우에도 잘 적용될 수 있음을 나타낸다. 이는 트러스와 같은 구조물의 layout을 결정하는 데에도 제시된 알고리즘이 효과적으로 쓰일 수 있음을 나타낸다. 즉, 구해진

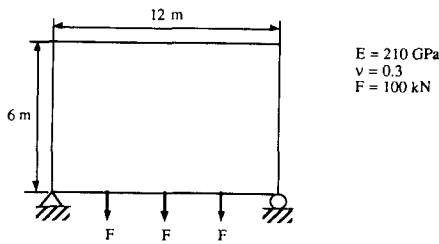


Fig. 4 Design domain for truss-like structure

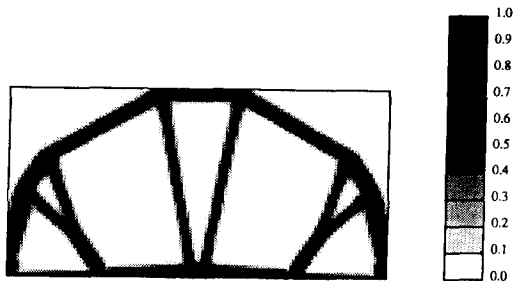


Fig. 5 Optimal density distribution

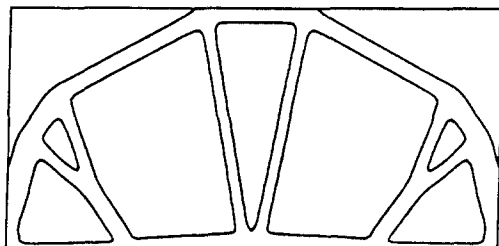


Fig. 6 Contour lines of $\rho=0.5$

밀도분포로부터 트러스의 연결부의 위치 및 부재의 치수를 대략 결정할 수 있다. 단지, 이 경우에는 트러스의 연결부가 핀으로 이루어지지 때문에 최종적인 layout은 다소 차이가 날 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 토폴로지 최적화에서 후처리를 용이하게 하기 위한 방법의 일환으로 형상추출에 장애가 되는 바둑판무늬의 형성을 억제하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 기존의 가상재료의 장점과 잘 부합되어 효율적으로 바둑판무늬의 형성을 억제하였다. 즉, 적절한 가상재료를 선택하여 밀도분포에 중간값이 적게 나오도록 할 수 있었으며, 여기에 제안된 알고리즘을 동시에 사용하여 계산시간을 거의 그대로 유지하면서 바둑판무늬의 형성을 효과적으로 억제하였다. 더우기 결과로 나온 형상은 매우 매끄러운 경계를 가지고 있었다.

제안된 알고리즘은 보다 일반적인 경우로 확장 가능하리라 보여진다. 우선, 본 연구에서 사용한 예제에서는 밀도가 요소내에서 상수이며, 크기와 모양이 동일한 4절점 선형요소들만을 사용했으나, 약간의 수정만 가하면 크기와 모양이 다른 요소들 간에도 사용할 수 있고, 나아가서는 보다 일반적인 경우에 대해서도 적용이 가능할 것으로 기대된다. 또한 본 연구에서는 최적화 알고리즘으로 최적조건법만을 사용했으나, 수학적 계획법을 이용하는 경우에도 마찬가지로 적용이 가능할 것이다. 이전 단계의 정보를 사용해야 하는 알고리즘의 경우에는 다소 수렴이 느려지는 등의 문제가 발생할 가능성도 있으나, 현단계에서의 해석정보만을 사용하는 알고리즘의 경우에는 아무런 문제가 없을 것이다.

참고문헌

- (1) Kohn, R. V. and Strang, G., 1986, "Optimal Design and Relaxation of Variational Problems," *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 39, pp. 113~137(Part I), pp. 139~182(Part II), pp. 353~377(Part III).
- (2) Chenais, D., 1993, "Why Does It Seem to Difficult to Avoid Homogenization Type Methods in order to Change Topology in Shape Optimization," in *Topology Design of Structures* (Eds. M.

- P. Bendsoe and C. A. Mota Soares), Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, pp. 331~336.
- (3) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 71, pp. 197~224.
- (4) Suzuki, K. and Kikuchi, N., 1991, "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 93, pp. 291~318.
- (5) Bendsoe, M. P., 1989, "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem," *Struct. Optimization*, Vol. 1, pp. 193~202.
- (6) Diaz, A. R. and Kikuchi, N., 1992, "Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 35, pp. 1487~1502.
- (7) Diaz, A. R. and Belding, B., 1993, "On Optimum Truss Layout by a Homogenization Method," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 115, pp. 367~373.
- (8) Bendsoe, M. P., Diaz, A. R. and Kikuchi, N., 1993, "Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures," in *Topology Design of Structures* (Eds. M. P. Bendsoe and C. A. Mota Soares), Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, pp. 159~205.
- (9) Allaire, G. and Kohn, R. V., 1993, "Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization," in *Topology Design of Structures* (Eds. M. P. Bendsoe and C. A. Mota Soares), Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, pp. 207~218.
- (10) Allaire, G. and Francfort, G. A., 1993, "A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization," in *Topology Design of Structures* (Eds. M. P. Bendsoe and C. A. Mota Soares), Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, pp. 239~248.
- (11) Jog, C. S., Haber, R. B. and Bendsoe, M. P., 1993, "A Displacement-based Topology Design Method with Self-Adaptive Layered Materials," in *Topology Design of Structures* (Eds. M. P. Bendsoe and C. A. Mota Soares), Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, pp. 219~238.
- (12) Bremicker, M., Chirehdast, M., Kikuchi, N. and Papalambros, P. Y., 1991, "Integrated Topology and Shape Optimization in Structural Design," *Mech. Struct. Mach.*, Vol. 19, No. 4, pp. 551~587.
- (13) Tenek, L. H. and Hagiwara, I., 1993, "Static and Vibrational Shape and Topology Optimization Using Homogenization and Mathematical Programming," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 109, pp. 143~154.
- (14) Yang, R. J. and Chuang, C. H., 1994, "Optimal Topology Design Using Linear Programming," *Comput. Struct.*, Vol. 52, No. 2, pp. 265~275.