〈논 문〉

구조최적설계시 근사법의 정확도를 이용한 이동한계 전략의 개발

박 영 선* · 박 경 진**

(1996년 5월 2일 접수)

A Development of Move Limit Strategy Based on the Accuracy of Approximation for Structural Optimization

Young-Sun Park and Gyung-Jin Park

Key Words: Move Limit Strategy(이동한계 전략), Structural Optimization(구조최적설계), Configuration Optimization(배치최적설계), Two-point Reciprocal Quadratic Approximation(이점역이차근사법), Prematured Convergence(조기수렴)

Abstract

The move limit strategy is used to avoid the excessive approximation in the structural optimization. The size of move limit has been obtained by engineering experience. Recently, efforts based on analytic methods are performed by some researchers. These methods still have problems, such as prematurity or oscillation of the move limit size. The existing methods usually control the bound of design variables based on the magnitude. Thus, they can not properly handle the configuration variables based on the geometry in the configuration optimization. In this research, the size of move limit is calculated based on the accuracy of approximation. The method is coded and applied to the two-point reciprocal quadratic approximation method. The efficiency is evaluated through examples.

I. 서 론

구조최적설계(structural optimization)는 여러가지 기법과 알고리듬의 발달과 함께 활발히 연구되고 있으며, 특히 유한요소법(finite element methods)의 발달과 더불어 최적설계의 주요 연구과제가 되고 있다.[1~4] 구조최적설계는 비선형 계획법(nonlinear programming) 알고리듬을 이용하는 전통적인 직접법(direct method)과 설계문제에 따라 풀이하기 쉬운 형태로 적절히 변환된 문제를 구성하여, 이를 직접법으로 풀이하는 근사법(approximation method)으로 나뉘어 발달되어 왔다. 일반적으로 직접법은 근사법에 비해 수학적인 최적해를 구할 수 있는 장점이 있지만 결정된 설계방향(design direction)에 따른 이동거리(step size)를 계산하기 위해 값비싼 일차원탐색(line search)를 수행하여 고가의 설계비용이 요구된다. 근사법에서는 이동거리를 결정하고, 또한 과도한 근사화로 설계점이 원함수로부터 벗어나는 것을 방지하기 위해 이동한계 전략(move limit strategy)을 사용하여 저렴하게 설계를 수행하므로 문제의 해석비용이 많이 요구되는 구조최적설계에 적합한 것으로 평가되고 있다.[4~8] 이동한계 전략은 설계과정 전반에 걸

*회원, 한양대학교 기계기술연구소
**회원, 한양대학교 기계공학과

처 소량의 일정 값을 근사화된 문제의 설계변수의 상한과 하한에 부과하여 설계변수의 과도한 변화를 방지하게 된다. 이러한 것은 고정형 이동한계(fixed move limit strategy)라 하며, 일반적으로 현 설계점의 20%~50%를 부과한다. 설계과정에서 크기가 변화되는 이동한계에 대한 연구는 다양한 근사법 알고리듬의 개발과 함께 최근 수년 사이에 활발히 진행되어 왔으며, 근사법 알고리듬의 성능에 중요한 영향을 미치는 것으로 평가되고 있다.

Svanberg 등은 근사화함수의 보존성(conservativeness)을 파라미터에 의해 조절하는 이동점근법(method of moving asymptotes)[9]을 제안하였고, Kodiyalam과 Vanderplaats는 제한조건함수의 위반량에 따라 조절되는 기법을 제안하였으며,[10] 1992년 Thomas는 이를 발전시켜 각 설계변수의 조건에 따라 크기를 조절하는 각개 조정(individual adjustment)기법을 보였다.[11] 이러한 일련의 기법은 초기 설계점이 가용영역(feasible region)에 있는 경우는 좋은 결과를 보이지만 비가용영역(infeasible region)에서 출발할 때는 경우에 따라 이동한계의 크기가 초기에 줄어들어 최적 해에 이르기 전에 수렴하는 이동한계의 조숙현상(premature)이 나타나 작은 이동한계로 설계가 진행되거나 또는 이동한계의 크기가 감소되지 않아서 큰 이동한계로 설계가 진행되어 설계시간이 길어질 소지도 있다.[11] 이점지수근사법을 제안한 Fadel은 1993년 이후로 지수함수로부터 산출되는 함수의 비선형성을 이용하여 이동한계의 크기를 비선형성에 따라 반비례하게 구하는 기법을 제안하였다.[12, 13] 비선형성에 따라 이동한계의 크기가 변하므로 최적해 근처에서도 함수의 비선형성이 큰 경우에는 여전히 큰 이동한계를 가지게 되며, 경우에 따라 이동한계의 크기가 진동하는 양상을 보여 수렴성이 불량해질 수도 있다. Chen은 연속선형계획법(sequential linear programming method)에 적용되는 이동한계를 함수값과 미분값을 이용하여 해석적으로 구하는 예를 보인 바 있다.[14] 이러한 연구들은 주로 트러스와 보 등으로 이루어진 불연속 구조물(discrete structure)의 단면적 등을 설계변수로 고려하는 치수최적설계(size optimization)로서 이루어져 왔고, 비선형성이 높은 문제에서는 적절한 이동한계의 계산에 어려움이 있을 것으로 예상된다. 특히, 구조물의 단면특성은 물론 좌표를 설계변수에 포함하는 배치최적설계(configuration optimization)의 경우는 효율적인 구조물의 중량감소 성능을 보이고 있는 배치변수가 갖는 비선형성과 이에 따른 설계문제의 복잡성으로 인하여 근사법의 적용이 직접법에 비해 타당한 것으로 평가되지만 근사화의 정확도와 이에 따른 적절한 이동한계의 계산이 필수적으로 요구되고 있다.[4, 5]

본 연구에서는 이미 개발되어 근사화의 정확도가 높은 것으로 평가되는 이점역이차근사법[4]을 풀이 알고리듬으로 사용한다. 설계과정중 계산된 근사화의 정확도를 근거로 이동한계의 크기를 조절하는 기법을 중심으로, 이동한계의 가변성, 감소성 등을 수반할 수 있는 기법을 제안하고 비선형성이 높은 배치최적설계 문제에 적용하여 그 성능을 평가한다. 또한 배치변수에 일반적인 이동한계를 부과시에 나타나는 문제점을 고찰하고, 이에 적합한 기법을 정의하고, 예제 문제를 통하여 그 성능을 검증한다.

2. 구조최적설계의 정식화와 이점역 이차근사법의 유도

불연속 구조물에 대한 구조최적설계는 다음과 같이 정식화된다.

Minimize

$$f(\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{NEL} \rho_i A_i L_i \tag{1}$$

$$L_i = \sqrt{(x_{i2}-x_{i1})^2 + (y_{i2}-y_{i1})^2 + (z_{i2}-z_{i1})^2} \tag{2}$$

Subject to state equations

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} \tag{4}$$

and constraints

$$g_j(\boldsymbol{b}) \le 0 \qquad j=1, \cdots, NC \tag{5}$$

$$b_k^L \le b_k \le b_k^U \qquad k=1, \cdots, ND \tag{6}$$

여기서, $\boldsymbol{b}$는 설계변수벡터(design variable vector), $f(\boldsymbol{b})$는 목적함수(cost function), ρ_i, A_i, L_i는 각각 i번째 요소의 밀도, 단면적, 길이이며, x_{i1}, x_{i2}, y_{i1}, y_{i2}, z_{i1}, z_{i2}는 각 절점의 x, y, z방향 좌표이다. 식 (3)과 식 (4)는 상태방정식(state equation)으로서 각각 유한요소식과 특성치방정식(eigenvalue equation)이며, 이들은 최적설계의 등제한조건함수(equality constraint function)의 역할을 한다. $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$은 각각 구조물의 강성(stiffness)행렬과 질량(mass)행렬이며, $\boldsymbol{u}$는 상

태변수인 절점의 변위, 그리고, $\boldsymbol{f}$는 외력벡터이다. 그리고 $\boldsymbol{y}$와 λ는 각각 특성벡터(eigenvector)인 모드형(mode shape)과 특성치(eigenvalue)인 고유진동수(natural frequency)이다. $g_j(\boldsymbol{b})$는 부등제한조건함수(inequality constraint function), NEL은 구조물의 요소수(number of element), ND는 설계변수의 수(number of design variables), NC는 제한조건함수의 수(number of constraint functions), b_k^L, b_k^U는 각각 설계변수의 하한(lower bound)과 상한(upper bound)값이다.

본 연구는 식 (2)의 구조물의 좌표값이 설계변수로 고려되어 비선형성과 복잡성이 증가된다. 응력(stress), 좌굴(buckling), 변위(displacement), 그리고 고유진동수(natural frequency) 등 일반적으로 구조최적설계에 고려되는 모든 경우의 제한조건을 포함하여 이러한 제한조건은 아래에서 유도되는 이점역이차근사법을 이용하여 근사화된다.

이점역이차근사법의 유도과정은 다음과 같으며, 보다 자세한 유도방법은 참고문헌 (4)에 수록되어 있다. 역이차근사법(reciprocal quadratic approximatioin method)은 이차근사법에서 설계변수의 역수를 이용하여 식 (7)과 같이 근사식을 구한 형태이다.

$$g_{QR}(\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{b}_0) + \sum_{i=1}^{ND} \frac{b_{0i}}{b_i}\left(2-\frac{b_{0i}}{b_i}\right)(b_i-b_{0i}) \cdot \frac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{ND}\sum_{j=1}^{ND}\left(\frac{b_{0i}}{b_i}\right)\left(\frac{b_{0j}}{b_j}\right) \cdot (b_i-b_{0i})(b_j-b_{0j})\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i \partial b_j} \tag{7}$$

역이차근사식은 식 (7)의 이차미분항을 미지수 $\boldsymbol{H}_{ap}$로 치환하면 식 (8)과 같다.

$$g_{QR}(\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{b}_0) + \sum_{i=1}^{ND} \frac{b_{0i}}{b_i}\left(2-\frac{b_{0i}}{b_i}\right)(b_i-b_{0i}) \cdot \frac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{ND}\sum_{j=1}^{ND}\left(\frac{b_{0i}}{b_i}\right)\left(\frac{b_{0j}}{b_j}\right) \cdot (b_i-b_{0i})(b_j-b_{0j})\boldsymbol{H}_{ap\ ij} \tag{8}$$

현 설계점이 $\boldsymbol{b}_0$, 이전 설계점은 $\boldsymbol{b}_{-1}$일 때, 이전 설계점에서 식 (7)의 미분값과 본래 함수의 미분값을 일치시키는 $\boldsymbol{H}_{ap}$값을 구한다. 즉, 식 (9)와 같이 식 (7)을 $\boldsymbol{b}$에 대하여 미분하고, 이전 설계점 $\boldsymbol{b}_{-1}$을 대입하여 본래의 함수의 미분값과 일치하도록 하고, 식 (10)과 같이 미지수 $\boldsymbol{H}_{ap}$값에 대하여 정리하여 구한다.

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{b}_{-1})}{\partial b_i} = \frac{\partial g_{QR}(\boldsymbol{b}_{-1})}{\partial b_i}, \quad i=1, \cdots, \mathrm{ND} \tag{9}$$

$$H_{ap\ ii} = \frac{\dfrac{\partial g(\boldsymbol{b}_{-1})}{\partial b_i} - \left(\dfrac{3b_{0i}^2}{b_{-1i}^2} - \dfrac{2b_{0i}^3}{b_{-1i}^3}\right)\dfrac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i}}{\dfrac{b_{0i}^3}{b_{-1i}^2} - \dfrac{b_{0i}^4}{b_{-1i}^3}}$$

$$i=1, \cdots, \mathrm{ND} \tag{10}$$

식 (10)은 설계변수의 수 ND만큼의 방정식을 가지므로 $\boldsymbol{H}_{ap}$의 비대각요소를 무시하고, ND개의 대각요소 만을 구할 수 있다. 계산된 $\boldsymbol{H}_{ap}$는 비대각요소의 무시에 따른 오차가 발생된다. 특히 이 값은 계산된 대각요소의 크기를 증가시키는 경향을 나타내므로 근사식의 비선형이 증가될 소지가 있다. 이를 보상하기 위하여 근사화된 이차미분항과 이차미분항의 미분시에 발생된 일차미분항의 크기에 식 (11)과 같이 보정계수 W를 부과한다.

$$g_{QR}(\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{b}_0) + \sum_{i=1}^{ND}\frac{b_{0i}}{b_i}(b_i-b_{0i})\frac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i} + W\left[\sum_{i=1}^{ND}\frac{b_{0i}}{b_i}(b_i-b_{0i})\left(1-\frac{b_{0i}}{b_i}\right)\frac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{ND}\left(\frac{b_{0i}}{b_i}\right)^2(b_i-b_{0i})^2 H_{ap\ ii}\right] \tag{11}$$

여러 개의 이전 설계점으로부터 저장된 각 설계점에서의 실제 함수값과 식 (11)의 근사식 함수값과의 차이가 Fig. 1과 같이 존재한다면, 이전 설계점에서의 i번째 함수값 g_i와 근사식의 함수값 g_{QRi}의 차이 δg_i를 최소화하는 계수 W를 구한다. Fig. 1에 나타난 각 설계점의 함수값 차이는 식 (12)와 같다.

$$\delta g_i = g_i - g_{QR_i} = g_i - (c_i' + Wc_i'') \tag{12}$$

여기서, c_i', c_i''는 식 (11)의 g_{QR}을 간단히 표현

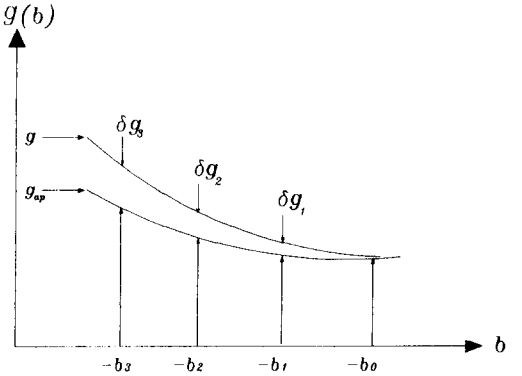

Fig. 1 Function differences on previous points

하기 위한 상수이며, NP는 고려되는 이전 설계점의 수이다. 윗식은 일차식이므로 선형 중첩하고, 현 설계점에 가까운 점의 오차의 감소에 더 큰 비중을 두기 위하여 보정계수 β_i를 부과하여 W를 식 (13)와 같이 구할 수 있다.

$$W=\sum_{i=1}^{NP}\beta_i\left(\frac{g_i-c_i'}{c_i''}\right) \tag{13}$$

최종적으로 유도된 이점역이차근사법(two-point reciprocal quadratic approximation method) g_{TQ}는 식 (14)와 같다.

$$g_{TQ}(\boldsymbol{b})=g(\boldsymbol{b}_0)+\sum_{i=1}^{ND}\frac{b_{0i}}{b_i}(b_i-b_{0i})\frac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i} + W\left[\sum_{i=1}^{ND}\frac{b_{0i}}{b_i}(b_i-b_{0i})\left(1-\frac{b_{0i}}{b_i}\right)\frac{\partial g(\boldsymbol{b}_0)}{\partial b_i} +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{ND}\left(\frac{b_{0i}}{b_i}\right)^2(b_i-b_{0i})^2H_{ap\ ii}\right] \tag{14}$$

3. 이동한계 전략

3.1 이동한계 전략의 유도

안정한 수렴성이 보장되기 위해서 이동한계는 다음과 같은 두가지 조건을 만족할 필요가 있다. 첫째, 조숙현상을 방지하기 위해 이동한계는 설계의 전과정을 통해 크기의 확대 및 축소가 가능해야 하며 동시에 그 크기의 변화가 심하게 진동하여서는 안된다. 둘째, 수렴성의 향상을 위해서 전반적으로 이동한계의 크기가 줄어드는 방향으로 진행되어야 한다. 근사함수와 원함수의 차이를 구하여 이 차이에 따라 근사화의 정확도를 판별하고 오차량의 크기에 반비례하는 이동한계 α의 크기를 계산한다.

먼저 Fig. 1과 같이 근사함수와 원함수의 차이가 존재할 때 오차량의 평균값, δf는 식 (15)과 같다.

$$\delta f=\frac{\sum_{i=1}^{NP}|g_i-g_{ap\ i}|}{NP*NAC} \tag{15}$$

여기서, NP는 검토되는 설계점의 수, NAC는 활성화제한조건(active constraint)의 수이다. δf와 이동한계 α와의 함수관계는 δf의 크기에 따라 Fig. 2와 같이 세 구역으로 나누어 각각 식 (16), (17), (18)로 계산된다.

$$\alpha=f_1(\delta f)=(\alpha_{ave}-\alpha_{max})\,\delta f+\alpha_{max} \quad \text{if } 0<\delta f\le\delta_1 \tag{16}$$

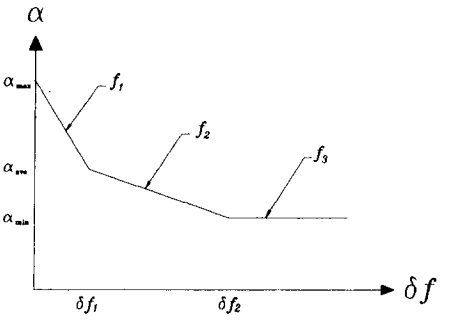

Fig. 2 Proposed functions for the calculation of move limit

$$\alpha=f_2(\delta f)=\frac{\alpha_{ave}-\alpha_{max}}{\delta f_2-1}\delta f+b \quad \text{if } \delta f_1<\delta f\le\delta f_2 \tag{17}$$

$$b=\frac{(\alpha_{ave}-\alpha_{min})\,\delta f_2}{\delta f_2-\delta f_1}+\alpha_{min}$$

$$\alpha=f_3(\delta f)=\alpha_{min} \quad \text{if } \delta f\ge\delta f_2 \tag{18}$$

여기서, α_{min}는 최소 이동한계, α_{max}는 최대 이동한계, α_{ave}는 평균 이동한계로서 본 연구에서는 각각 0.1, 0.8, 0.5가 사용된다. 위의 식을 통하여 근사화 정확도의 오차량의 함수로 이동한계가 계산된다. 함수 f_1의 구간은 f_2에 비하여 극히 작으므로 오차량이 δf_1보다 적은 경우를 제외하곤 이동한계의 크기가 α_{ave}이상으로 커지는 것을 방지하게 되며, 크게 정의된 f_2의 구간을 통해 크기의 변화가 적당한 영역인 α_{min}, α_{ave}, 사이에서 이동한계의 크기가 결정되므로 진동현상도 크게 줄어든다. 계산식에서 α_{ave}, δf_1, δf_2 등의 적절한 조절이 가능하므로 기존의 방법에 비해 대상문제의 특성을 고려하여 계산식을 수립할 수 있다. δf_1, δf_2 등은 경험적으로 식 (19)와 같이 계산된다.

$$\delta f_1=0.5\delta f_{min}$$
$$\delta f_2=\delta f_{max}+(\delta f_{max}-\delta f_{min}) \tag{19}$$

여기서, δf_{min}, δf_{max}는 각각 초기 5번 진행중의 최소값과 최대값이다. 초기 5번의 진행시에는 근사식의 최대 오차량이 경신될 때에 이동한계를 70%로 축소시킨다.

다음으로 이동한계의 크기에 설계의 진행에 따라 감소되는 특성을 부여하기 위하여 식 (20)을 정의한다.

$$\alpha^k=\alpha^{k-1}+\frac{\alpha^k-\alpha^{k-1}}{3}, \quad \text{if } \alpha^k\ge\alpha^{k-1} \tag{20a}$$

$$\alpha^k = \alpha^k + \frac{\alpha^k - \alpha^{k-1}}{3}, \text{ otherwise} \quad (20b)$$

이동한계의 크기가 줄어들 때는 계산된 크기의 $\frac{2}{3}$인 67%를, 늘어날 때는 $\frac{1}{3}$인 33%를 취하도록 하여 궁극적으로 감소하는 경향을 갖게 하며, 이동한계의 급격한 변화를 방지하는 역할도 한다. 33%, 67%는 수치실험을 통하여 경험적으로 결정되었으며, 이러한 크기는 참고문헌에서도 사용된 바가 있다.[11] 식 (16~20)을 이용하여 이동한계의 계산식을 정의한다.

3.2 배치변수에 대한 이동한계의 고찰

배치변수는 단면변수와 달리 크기가 아닌 위치를 의미하는 값이므로 현재 설계값의 크기에 비례하여 이동한계를 부과하는 것은 공학적으로 타당치 못하다. 예를 들어 Fig. 3과 같은 구조물 문제에서 b_1과 b_2가 배치설계변수이고, 각각의 초기치가 250, 1000 그리고 설계한계영역이 A구간과 B구간일 때 50%의 이동한계가 부과되는 경우에는 배치변수 b_1의 경우는 이동한계에 따른 설계영역이 $125 < b_1 < 375$인 A구간으로 적당하지만 b_2의 경우는 $500 < b_2 < 1500$인 C구간을 지정하게 된다. 이는 설계초기에 설계한계영역으로 주어진 B구간을 초과하는 값이므로 설계한계영역이 그대로 이동한계로 사용되어 이동한계의 계산이 전혀 적용되지 않는 경우가 발생된다. 배치변수는 구조물의 형상을 구성하므로 단면변수에 비하여 각 변수의 상한과 하한이 설계초기에 엄격히 주어진다. 따라서 설계초기에 주어진 설계영역을 근거하여 배치변수의 이동한계를 계산하는 것이 타당하다. 설계변수를 단면변수와 배치변수로 구분하여 단면변수는 크기에 비례하여 계산하고 배치변수는 초기에 주어진 상한 또는 하한까지의 설계영역 내에서 이미 계산된 이동한계만큼 이동하도록 식 (21)과 같이 계산한다.

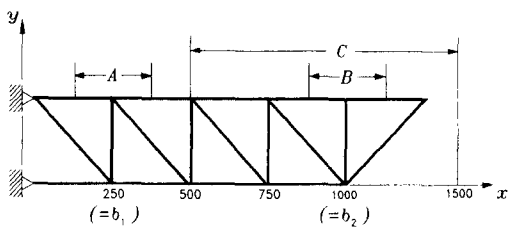

Fig. 3 Move limits for the configuration variables. (A,B : Initial bounds for b_1 and b_2 respectively, C : 50% move limit for b_2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{ap}^{L,k} &= \boldsymbol{b}^k - \alpha \,|\, \boldsymbol{b}^L - \boldsymbol{b}^k \,| \\ \boldsymbol{b}_{ap}^{U,k} &= \boldsymbol{b}^k + \alpha \,|\, \boldsymbol{b}^U - \boldsymbol{b}^k \,| \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\boldsymbol{b}^L$, $\boldsymbol{b}^U$는 각각 설계변수의 하한과 상한이며 $\boldsymbol{b}_{ap}^{L,k}$, $\boldsymbol{b}_{ap}^{U,k}$는 각각 k번째 반복진행시에 계산된 근사화된 문제의 설계변수의 하한과 상한이다.

이와 함께 각 변수가 설계환경에 따라 서로 적절한 크기를 갖도록 Vanderplaats가 제안한 각개이동전략(individual move limit strategy)[11]을 추가하여 시험한다. 이는 식 (22)와 같이 2번의 연속적인 설계에서 근사화문제의 설계해가 설계점의 상한 또는 하한에 이를 경우 이에 해당하는 설계변수의 이동한계를 일정량(33%) 확대하므로서 이동한계가 급격히 줄어드는 조숙현상을 방지하고, 각 설계변수의 특성이 이동한계의 계산에 고려되도록 한 것이다.

$$\alpha_i = 1.33\alpha_i, \quad i = 1, \cdots, ND \quad (22)$$

3.3 이동한계 전략의 정리

제안된 이동한계 전략을 정리하면 다음과 같으며 이러한 이동한계 전략의 절차는 최적설계와 함께 종료된다.

Step 1 Define initial values α_{min}, α_{max}, δf_{min}, δf_{max}, k.

Step 2 Calculate the approximation accuracy, δf using Eq. (15).

Step 3 Check iteration number k and then
if $k=1$, go to Step 4.
if $k \geq 5$, go to Step 5.
if $k > 5$, go to Step 6.

Step 4 $\alpha = \alpha_{max}$, go to Step 7.

Step 5 If $\delta f^k \leq \delta f_{min}$, $\delta f_{min} = \delta f^k$, go to Step 7.
If $\delta f^k \geq \delta f_{max}$, $\delta f_{max} = \delta f^k$ and $\alpha^k = 0.7 * \alpha^{k-1}$, go to Step 7.

Step 6 Calculate α using Eq. 16 through Eq. 18, and then
if α is increased, update α with Eq. (20a) otherwise, update α with Eq. (20b).
If configuration variables are considered, update α with Eq. (21).
If individual adjustment is considered, update α with Eq. (22).

Step 7 Check initial design variable bounds, let α be between initial bounds, and then go to Step 2.

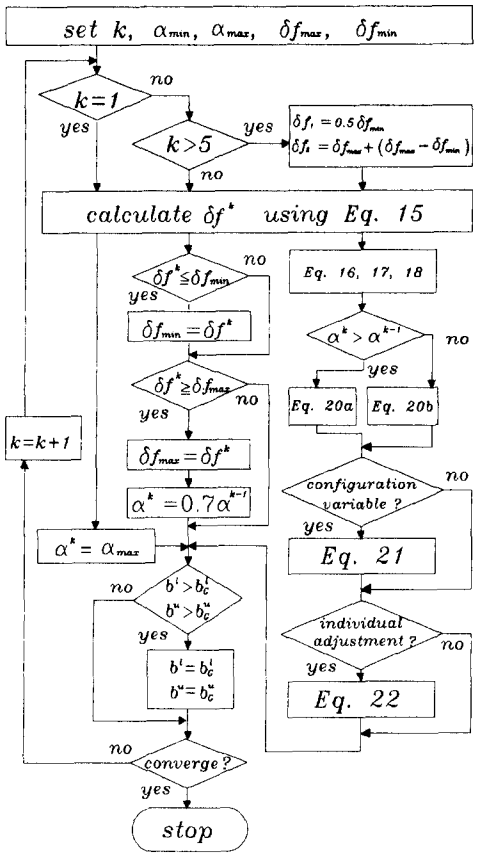

Fig. 4 Flow chart of the proposed move limit strategy

제안된 이동한계 전략에 대한 흐름도는 Fig. 4와 같다.

4. 적용 및 분석

제안된 이동한계 전략의 성능을 평가하기 위하여 트러스구조물에서는 배치최적설계의 대표적인 문제인 Fig. 5의 18바 트러스(eighteen-bar truss)[1~4]를 선택한다. 보구조물의 경우는 배치최적설계에 대한 성능평가를 위해 일반적으로 사용되는 문제는 아직 없으므로, 단면최적설계의 성능평가에 자주 이용되는 Fig. 6의 1칸 2층 구조물(one-bay-two-story structure)[1~4]문제에 배치변수를 추가하여 풀이한다. 초기조건과 하중조건 등은 Tables 1, 2와 같다. 기존의 다른 연구와는 사용된 근사법의 성능이 서로 다르므로 이동한계 전략에 대한 정량적인 비교는 불가능하다. 따라서 앞절에서 제안한 식을 적용한 Table 3의 4가지 경우와 함께 20%, 50%의 고정형 이동한계 전략을 각 예제에 대해 풀이하고 수렴결과를 비교한다.

4.1 18바 트러스

최종형상은 Fig. 7과 같고 수치결과는 Table 4와 같이 고정형에 비하여 제안된 방법이 반복진행수를 11, 9번에서 7, 6번 등으로 줄이며 수렴하고 있다. 제안된 이동한계 전략의 경우에 대한 목적함수변화와 이동한계 크기의 변화는 Figs. 8, 9와 같다. 식(20)에 의해 이동한계의 과도한 크기를 방지한 case 2의 경우 수렴시 목적함수의 크기 변화를 줄이며, 반복진행수를 7번에서 6번으로 줄이는 효과를 보이며, 배치변수에 대한 이동한계의 적용한 case 3은 목적함수의 감소과정을 안정적으로 유도하는 것으로는 보이나 설계변수의 변화에 대한 제한으로 작용하여 수렴속도를 늦출 수 있는 소지가 있다. 각개전략을 추가한 case 4는 수렴의 마지막 과정에서 Fig. 9와 이동한계의 크기를 증가시켜 반복진행수를 10번에서 12번으로 증가시키는 결과를 보였으므로 신중한 고려가 필요한 것으로 보인다. Fig. 9의 case 4의 이동한계의 크기는 각 설계변수

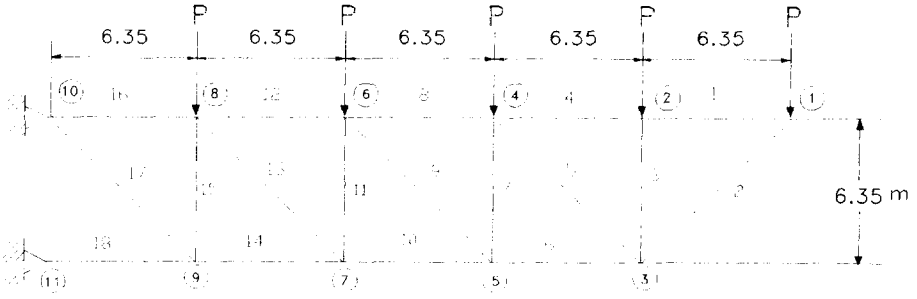

Fig. 5 Eighteen-bar truss (unit : m)

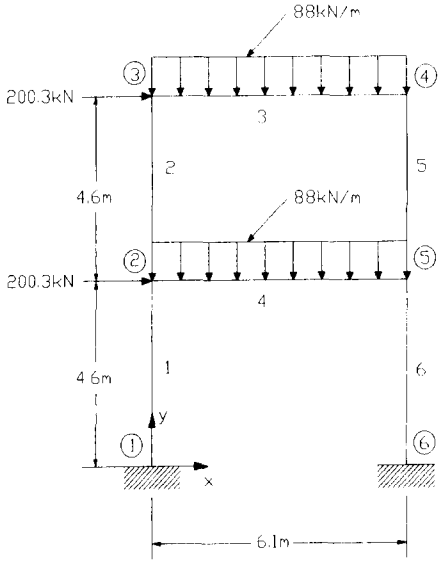

Fig. 6 One-bay-two-story structure

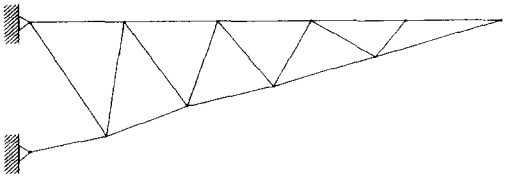

Fig. 7 Final configuration for eighteen-bar truss

Table 1 Numerical data for eighteen-bar truss

Design variable linking	$A_1=A_4=A_8=A_{12}=A_{16}$
	$A_2=A_6=A_{10}=A_{14}=A_{18}$
	$A_3=A_7=A_{11}=A_{15}$
	$A_5=A_9=A_{13}=A_{17}$
Density	2770 kg/m^3
Young's modulus	68.9 GPa
Allowable stress	137.8 MPa
Buckling coefficient	4

Loading data

Loading condition	Node	Load(kN)
1	1	Py=−889.84
	2	Py=−889.84
	4	Py=−889.84
	6	Py=−889.84
	8	Py=−889.84

에 대한 이동한계의 평균값으로 도시하였다.

4.2 1칸 2층 구조물

본 예제는 응력제한조건만을 고려하는 경우와 변위, 진동수 등을 포함하는 경우로 나누어 수행하였다. 최종형상은 제한조건에 따라 큰 변화없이 Fig. 10과 같이 수렴하였다. 응력제한조건만을 고려한 경우의 최종 결과는 Table 5와 같이 고정형에 비하여 제안된 방법이 반복진행수를 17, 15번에서 16, 14번 등으로 줄이며 수렴하고 있다. 제안된 이

Table 2 Numerical data for one-bay-two-story structure

Design variable linking	$b_1=b_2=b_5=b_6$
	$h_1=h_2=h_5=h_6$
	$t_1=t_2=t_5=t_6$
	$b_3=b_4$, $h_3=h_4$, $t_3=t_4$
	$x_2=-x_5$, $x_3=-x_4$
Density	7856 kg/m^3
Young's modulus	206.7 GPa
Allowable stress	24.8 MPa
Allowable displacement	$x_a=38$ mm
	$y_a=5.1$ mm
Allowable frequency	0.746 Hz

Loading data

Loading condition	Node	Load
1	2	Px=200.3 kN
	3	Px=200.3 kN
2	2	Py=−267 kN, Mz=−271.3 kNm
	3	Py=−267 kN, Mz=−271.3 kNm
	4	Py=267 kN, Mz=271.3 kNm
	5	Py=−267 kN, Mz=271.3 kNm

Table 3 Solving cases for move limit strategy

Case number	Contents
1	Eq. (16), Eq. (17), Eq. (18)
2	Case 1+Eq. (20)
3	Case 1+Eq. (21)
4	Case 3+Eq. (22)

Table 4 Optimum design results for eighteen-bar truss

Move limit		20%	50%	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
COST		2046.52	2046.68	2046.70	2046.84	2046.29	2046.32
DV	A_1	78.63	78.69	81.40	80.75	82.69	80.17
	A_2	116.16	116.23	117.26	120.42	121.78	116.62
	A_3	31.54	31.60	31.54	27.22	30.90	31.99
	A_5	26.64	26.57	22.19	21.67	24.12	22.77
	x_3	232.64	232.56	232.61	231.98	231.09	231.95
	y_3	60.91	60.91	61.16	59.49	59.89	61.80
	x_5	165.15	165.10	165.10	165.10	165.10	165.10
	y_5	51.16	51.16	51.61	51.33	52.12	51.38
	x_7	106.55	106.55	106.55	106.60	107.57	109.60
	y_7	38.00	38.05	39.07	38.30	38.94	38.99
	x_9	52.17	52.17	52.22	53.80	51.54	52.22
	y_9	19.48	19.56	21.41	20.85	21.41	20.27
ITER		11	9	7	6	10	12

Table 5 Optimum design results for one-bay-two-story structure

Constraint condition			20%	50%	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Stress	COST		4.13	4.13	4.12	4.12	4.13	4.12
	DV	w_1	247.78	254.00	254.00	253.49	254.00	254.00
		h_1	481.61	466.78	466.52	471.63	468.81	458.47
		t_1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
		w_3	46.74	20.50	13.11	15.77	15.52	14.20
		h_3	335.51	389.97	407.52	403.02	403.38	408.97
		t_3	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
		x_2	202.26	204.42	205.49	203.23	203.23	203.30
		x_3	25.40	25.40	25.40	25.40	25.40	25.40
	ITER		17	15	19	16	16	14
All	COST		6.50	6.43	6.41	6.45	6.43	6.45
	DV	w_1	61.26	53.16	46.18	49.40	48.31	47.98
		h_1	208.00	187.73	135.92	146.91	141.86	137.69
		t_1	1.22	1.37	1.75	1.40	1.32	1.07
		w_3	44.32	51.49	42.65	45.39	43.69	42.77
		h_3	354.76	399.41	434.82	432.71	430.86	432.43
		t_3	0.30	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
		x_2	173.48	173.48	198.88	200.91	201.17	200.15
		x_3	28.70	28.45	25.91	25.65	25.40	25.65
	ITER		12	9	10	9	9	7

동한계 전략의 경우에 따른 목적함수변화와 이동한계 크기의 변화는 Figs. 11, 12와 같다. 앞의 예제의 경우와 같이 이동한계의 변화를 줄여 준 case 2의 경우 반복진행수를 17번에서 16번으로 줄이는 효과를 보인다. 이는 Fig. 12에서와 같이 설계가 진행됨에 따라 이동한계의 크기가 점차적으로 감소하기 때문인 것으로 보인다. 배치변수에 대한 이동한계가 적용된 case 3의 경우는 목적함수의 급격한 감소를 줄이며 16번의 반복진행으로 수렴하고 있다. 각개전략이 적용된 case 4는 수렴의 중간 과정에서 이동한계의 크기를 적절히 증가시켜 반복진행수 14번의 가장 빠른 수렴을 보였다.

변위와 진동수의 제한조건이 고려된 경우도 Table 5와 같은 결과를 보여 응력제한조건의 경우와 매우 유사한 경향을 나타냈다. 고정형에 비하여 반복진행수를 12, 9번에서 9, 7번 등으로 줄이며 수렴하고 있다. 제안된 이동한계 전략의 경우에 대한 목적함수 및 이동한계 크기의 변화는 Figs. 13, 14와 같다. Figs. 12, 14의 case 4의 이동한계의 크기는 각 설계변수에 대한 이동한계의 평균값으로 도시하였다. Fig. 14에서 보이듯이 Table 5의 case 2는 case 1의 경우에 비해 이동한계의 변화의 폭을 적절히 줄여주는 결과를 보이며 반복진행수를 10번에서 9번으로 줄이면서 수렴했다. 배치변수에 대한 이동한계의 적용인 case 3도 9번 반복진행의 양호한 수렴을 보이며, case 4의 각개전략의 적용은 반복진행수 7번의 가장 빠른 수렴을 보였다.

결과적으로 본 연구에서 제안한 이동한계 전략은 양호한 결과를 나타냈으며, 특히 이동한계의 변화폭이 급격히 변화하는 현상을 방지하는데 매우 효과적인 것으로 생각된다. 배치변수에 대한 식 (21)

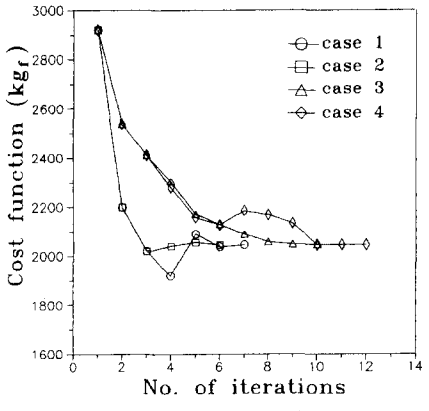

Fig. 8 Cost function history of eighteen-bar truss with proposed move limit

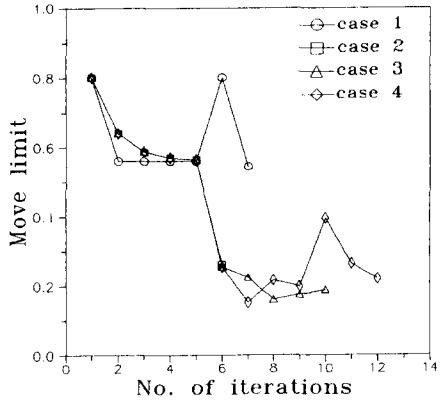

Fig. 9 Move limit history of eighteen-bar truss

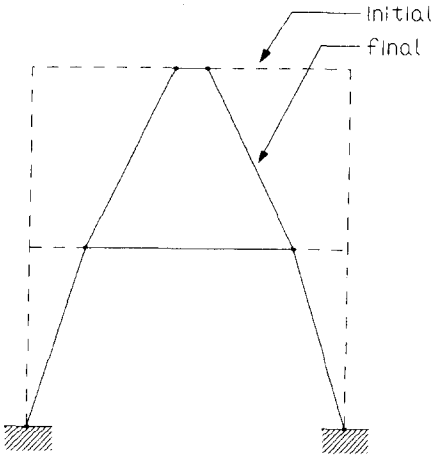

Fig. 10 Final configuration for one-bay-two-story structure

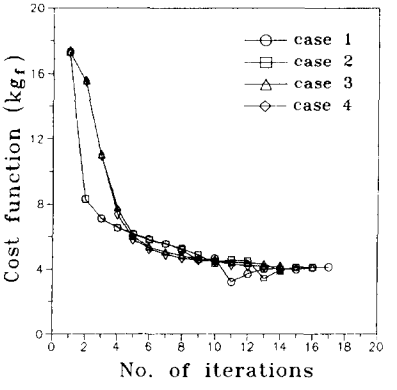

Fig. 11 Cost function history of one-bay-two-story structure with proposed move limit and stress constraints

의 이동한계 전략의 적용에 따라 Figs. 11, 13에서 보이듯이 반복진행 10번 이후에서 목적함수의 급격한 변화를 방지하며, 안정한 수렴을 보이며 Figs. 12, 14에서와 같이 이동한계의 크기도 안정하게 감소하는 것을 볼 수 있다. 각개전략의 적용은 경우에 따라 다른 결과를 보였는데 각개전략으로 인한 이동한계의 증가는 적절한 시기, 즉 설계의 중간과정중에서는 효과적이지만 마지막 과정에서는 오히려 반복진행수를 늘리는 작용을 하기 때문인 것으로 풀이된다. 그러나 그 차이가 반복진행수 1~2번으로 미소하므로 큰 영향은 없는 것으로 보인다.

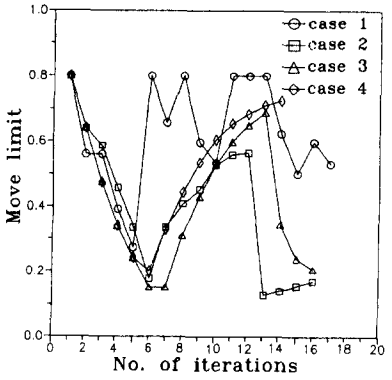

Fig. 12 Move limit history of one-bay-two-story structure with stress constraints

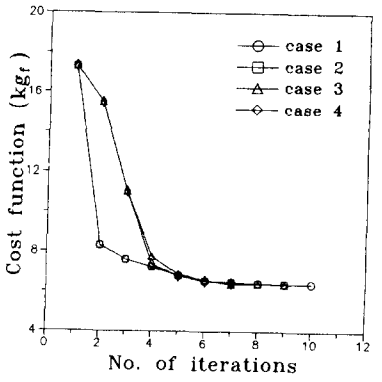

Fig. 13 Cost function history of one-bay-two-story structure with proposed move limit and all constraints

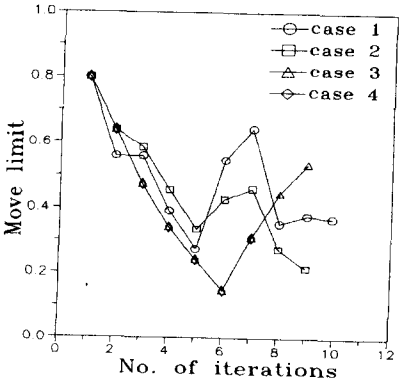

Fig. 14 Move limit history of one-bay-two-story structure with all constraints

5. 결 론

구조최적설계의 효율적인 풀이기법으로 최근 활발히 연구되고 있는 근사법에서 사용되고 있는 이동한계 전략에 대하여 연구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 최적설계시 근사법의 성능향상을 위하여 근사화함수의 정확도에 근거하여 이동한계의 크기를 해석적으로 계산하는 새로운 이동한계 전략을 유도하여 제안된 이점역이차근사법에 적용하였다.

(2) 이동한계의 크기를 각 반복진행마다 근사화의 정확도에 따라 계산하므로 구조최적설계에 적용된 기존의 이동한계 전략에서 나타나던 조숙현상과 이동한계의 크기가 급격히 변화되는 현상을 방지하고 최적설계가 진행됨에 따라 궁극적으로 감소할 수 있도록 비율에 따라 계산하는 방법을 제안하고 치수최적설계에 비해 비선형성이 높은 배치최적설계에 적용하여 안정한 결과를 얻었다.

(3) 기존의 크기 비율에 따른 배치변수에 대한 이동한계의 적용시 나타나는 문제점을 지적하고 이를 개선하기 위하여 이동한계의 크기를 각 배치변수의 상한과 하한의 함수로 계산하여 수렴시 이동한계 및 목적함수의 급격한 변화를 방지하며 안정한 수렴현상을 보였다.

(4) 제안된 방법을 배치최적설계에 대한 수치예제에 적용하여 고정된 이동한계 전략을 사용한 경우에 비하여 반복진행수를 트러스와 보요소에 따라 최대 11번에서 6번, 12번에서 7번으로 각각 수렴속도를 증가시키는 결과를 보였다.

참고문헌

(1) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, Inc.

(2) Vanderplaats, G. N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*,

McGraw-Hill Book Company.

(3) Haftka, R. T. and Gürdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

(4) 박영선, 1996, "불연속 구조물의 배치최적설계를 위한 이점역이차근사법 및 이동한계 전략의 개발," 박사학위청구논문, 한양대학교, 서울.

(5) Imai, K. and Schmit, L. A., 1981, "Configuration Optimization of Trusses," *ASCE*, Vol. 107, No. ST5, pp. 745~756.

(6) Hansen, S. and Vanderplaats, G. N., 1990, "Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 1, pp. 161~168.

(7) 박영선, 이상헌, 박경진, 1994, "구조최적설계시 직접법 및 근사법 알고리듬의 성능 비교에 관한 연구" 대한기계학회논문집, 제18권, 제2호, pp. 313~322.

(8) Park, Y. S., Lee, S. H., and Park, G. J., 1995, "A Study of Direct vs Approximation Methods in Structural Optimization," *Structural Optimization*, Vol. 10, No. 1, pp. 64~66.

(9) Svanberg, K., 1987, "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359~373.

(10) Kodiyalam, S., 1988, "Shape Optimization of Three Dimensional Continuum Structures Using Efficient Approximation Techniques," Ph. D. Thesis, UC Santa Barbara.

(11) Thomas, H. L., Vanderplaats, G. N. and Shyy, Y. K., 1992, "A Study of Move Limit Adjustment Strategies in the Approximation Concepts Approach to Structural Synthesis," *4th AIAA/USAF/NASA/OAI Symposium on Multi-Analysis & Optimization*, pp. 507~512.

(12) Fadel, G. M. and Cimtalay, S., 1993, "Automatic Evaluation of Move-limits in Structural Optimization," *Structural Optimization*, Vol. 6, pp. 233~237.

(13) Hyams, D. G. and Fadel, G. M., 1994, "Comparison of Various Move Limit Strategies in Structural Optimization," *35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference*, pp. 401~410.

(14) Chen, T. -Y., 1993, "Calculation of the Move Limits for the Sequential Linear Programming Method," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2661~2679.