

〈논 문〉

벨로우즈에 대한 유한요소해석 프로그램 및 간편식의 개발과 형상최적설계

고 병 갑* · 박 경 진**

(1996년 5월 7일 접수)

Development of Finite Element Analysis Program and Simplified Formulas of Bellows and Shape Optimization

Byung Kab Koh and Gyung-Jin Park

Key Words : Bellows(벨로우즈), Conical Frustum Shell Element(원추대 셸요소), Multiple Optimization Method(다목적 최적화기법), Weighting Objective Method(가중목적법)

Abstract

Bellows is a component in piping systems which absorbs mechanical deformation with flexibility. Its geometry is an axial symmetric shell which consists of two toroidal shells and one annular plate or conical shell. In order to analyze bellows, this study presents the finite element analysis using a conical frustum shell element. A finite element analysis program is developed to analyze various bellows. The validity of the developed program is verified by the experimental results for axial and lateral stiffness. The formula for calculating the natural frequency of bellows is made by the simple beam theory. The formula for fatigue life is also derived by experiments. The shape optimal design problem is formulated using multiple objective optimization. The multiple objective functions are transformed to a scalar function by weighting factors. The stiffness, strength and specified stiffness are considered as the multiple objective function. The formulation has inequality constraints imposed on the fatigue limit, the natural frequencies, and the manufacturing conditions. Geometric parameters of bellows are the design variables. The recursive quadratic programming algorithm is selected to solve the problem. The results are compared to existing bellows, and the characteristics of bellows is investigated through optimal design process. The optimized shape of bellows is expected to give quite a good guideline to practical design.

1. 서 론

벨로우즈(bellows)는 토로이달 셸(toroidal shell)이 기본 형상을 이루고 있으며, 종류에 따라 원형 평판(annular plate), 원통 셸(cylindrical

shell) 그리고 원추형 셸(conical shell)이 복합된 플렉시블셸(flexible shell)의 일종이다. 따라서 벨로우즈는 일반 셸과는 달리 고유의 유연성으로 인하여 기계시스템에서 발생하는 변형을 흡수하여 시스템의 파손을 방지하기 위하여 널리 사용되고 있다.⁽¹⁾

*회원, 한양대학교 기계기술연구소

**회원, 한양대학교 기계공학과

벨로우즈에 대한 기존의 해석이론은 대부분 U형 벨로우즈를 대상으로 셸의 지배방정식을 급수전개

법⁽²⁾이나 점근법(asymptotic solution)⁽³⁾으로 근사하여 해를 구하는 이론과 에너지이론⁽⁴⁾으로 분류된다. 이와 같은 해석이론은 비교적 정확한 해를 구할 수 있는 장점은 있으나, 셸의 지배방정식 및 기하학적 변수의 근사과정으로 인하여 해의 안정상태와 적용범위에 문제가 있는 것으로 보고되고⁽⁵⁾ 있다. 이를 해결하기 위하여 사변형 셸요소(quadrilateral shell element)⁽⁶⁾ 및 벨로우즈요소(bellows element)⁽⁷⁾의 유한요소법을 이용한 연구가 수행되었으나 벨로우즈의 복잡한 기하학적 형상을 구성하기 위하여 많은 요소가 필요할 뿐만 아니라 축방향 거동만을 처리할 수 밖에 없다는 문제가 발생한다. 또한 벨로우즈의 용도가 다양화됨에 따라 그 형상도 C, U, S형 그리고 일반형(general-shaped)으로 구성되어 있으나 기존의 해석이론은 U형에만 국한되어 연구되고 있는 실정이다.

이상의 해석이론은 정하중의 경우에 대하여 응력 및 변형량을 중심으로 연구되었으나 다양화된 벨로우즈에 있어서는 동특성과 피로의 문제가 포괄적으로 대두되고 있다. 그러나 벨로우즈의 기하학적 복잡성으로 인하여 동특성 및 피로를 해결하는 데는 많은 문제가 발생하며, 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 고유진동수와 피로수명에 대한 간편식을 제공하고 있는 EJMA(Expansion Joint Manufacturers Association)⁽⁸⁾가 벨로우즈의 설계에 적용되고 있다. 그러나 EJMA의 고유진동수에 대한 간편식은 설계과정의 상세한 도입과정과 해석과정이 밝혀져 있지 않기 때문에 벨로우즈의 전반적인 특성을 파악하기 어려우므로 설계자가 독자적으로 설계기준을 변경하거나 수정하여 사용할 수 없는 단점이 있다. 또한 피로식은 원자력발전소 등의 배관시스템의 안전성을 고려한 수식이므로 다양화된 용도의 벨로우즈에는 과잉설계의 경향이 발생한다고 실험적인 연구로부터 보고되고⁽⁹⁾ 있다.

본 연구에서는 해석범위가 넓고, 해석과정에서 인위적인 가정을 최소화할 수 있으며, 적은 요소수로도 벨로우즈의 기계적 특성을 보다 정확하게 산출할 수 있는 원추대 셸요소(conical frustum shell element)를 비축대칭으로 확장하여 일반형 벨로우즈를 해석한다. 벨로우즈의 유한요소 모델링에서는 C, U, S형 그리고 일반형을 하나의 프로그램에서 자동적으로 모두 처리할 수 있는 통합 프로그램이 개발된다. 해석의 정확도를 입증하기 위하여 축방향 및 횡방향 변형량실험을 수행하며, 기타의 유한

요소를 이용한 기존의 연구결과와 병행하여 비교한다. 또한 기지의 벨로우즈의 강성으로부터 벨로우즈의 고유진동수를 용이하게 산출할 수 있는 간편식을 제공한다. 이 간편식은 보에 대한 기본적인 진동해석을 기반으로 벨로우즈를 보로 등가하여 유도되므로 설계상황에 맞도록 수정하여 적용할 수 있다. 그리고 벨로우즈의 거동에 대한 정확한 설계자료가 요구되는 정밀 벨로우즈를 대상으로 피로수명에 대한 실험을 수행하고, 이에 대한 실험식을 산출한다.

이상의 구조해석을 이용하여 본 연구에서는 벨로우즈의 형상최적설계를 수행한다. 벨로우즈에 대한 형상최적설계는 벨로우즈의 중요한 기계적 특성인 강성과 강도를 목적함수(objective function)로 선정하여, 이에 영향을 미치는 기하학적 인자들에 관하여 고찰한다. 또한 벨로우즈는 기계시스템을 구성하고 있는 하나의 성분이므로 이 시스템에서 요구하는 특정강성을 만족하도록 설계되어야 한다.⁽¹⁰⁾ 따라서 다음 단계로 시스템에서 요구된 벨로우즈 강성의 특정한 설계값을 만족시키는 벨로우즈의 설계 방안을 형상최적설계를 통하여 제시한다. 이를 위하여 다목적 최적화기법(multiple optimization method)을 도입하고, 다목적함수의 스칼라화를 위하여 가중목적법(weighting objective method)을 적용한다. 제한조건함수(constraint function)는 앞서 제시된 구조해석, 즉 고유진동수 및 피로수명, 특정강성 등이 고려되며, 실제 벨로우즈의 제작환경을 제한조건함수에 포함시켜 최적화된 경향을 고찰한다. 벨로우즈의 기하학적 형상을 설계변수(design variable)로 설정하며, 최적화기법으로 반복이차계획법(recursive quadratic programming)⁽¹¹⁾을 사용하였다.

2. 벨로우즈의 해석

2.1 원추대 셸요소

벨로우즈는 사용용도에 따라 다양한 기하학 구조를 갖는다. 대표적인 기하학 구조는 Fig. 1에 도시한 바와 같이 C, U, S형 및 일반형으로 구분된다. 이들은 원자력발전소나 화학플랜트 등의 배관시스템에서 뿐만 아니라 자동차 배기시스템에 이르기까지 널리 사용되고 있다.

벨로우즈는 축대칭 셸이므로 해석을 위해 Fig. 2에 나타난 바와 같이 원추대 셸요소⁽¹²⁾로 분할된

다. L 과 s 는 각각 요소의 자오선방향의 길이 및 변수이며, r 은 중심축으로부터 요소의 임의의 위치까지의 반경이다. 요소의 단면에 대한 기하학적 형상을 표시하기 위한 요소의 경사각 ϕ 는 양 절점 원을 잇는 직선의 경사각이다. 벨로우즈의 원통 셸은 ϕ 가 0° 가 되며, U형 벨로우즈의 경우 원형 평판은 90° 가 된다. 하나의 요소는 Fig. 2에 나타난 바와 같이 두개의 절점원(nodal circle)을 가지며, 요소에 발생하는 변위는 절점원에서 자오선방향의 변위 u , 원주방향의 변위 v , 법선방향의 변위 w , 그리고 회전변위 β 의 4가지 변위가 발생하므로 요소의 자유도(degree of freedom)는 8이다. 요소의 셸좌표계에 대한 변위함수는 비축대칭 변형을 고려하여 푸리에급수(Fourier series)로 전개된다.⁽¹³⁾

절점원에 작용하는 하중에 대해서도 변위의 경우와 같이 푸리에급수로 전개하며, 각각의 변위에 대응한다. 벨로우즈의 해석에 원추대 셸요소를 이용하면 3절점 요소나 4절점 요소에 비해 요소분할과

정이 간단하고 계산시간, 기억용량 등을 개선할 수 있는 장점이 있다. 또한 해석과정에서 셸의 변형이론을 도입하므로 평면요소에 비하여 정확한 해를 구할 수 있다.

Fig. 1에 도시된 여러 형상의 벨로우즈를 해석하기 위하여 각각의 벨로우즈 형상에 대한 유한요소 모델링을 수행한다는 것은 비효율적이다. 또한 형상최적설계를 통하여 벨로우즈의 형상을 결정할 때 최적화과정중 각각의 형상이 자동적으로 변환되기 위해서는 하나의 유한요소 모델링 모듈에서 이를 처리할 수 있는 유한요소해석 프로그램이 요구된다. 따라서 본 연구에서는 하나의 유한요소 모델링 모듈에서 벨로우즈의 여러 형상을 처리한 후 최종적으로 유한요소해석을 수행하기 위한 벨로우즈 전용 유한요소해석 프로그램을 개발한다. 이를 위해 Fig. 3에 도시된 바와 같은 파형의 형상이 타원형인 일반형 벨로우즈를 대상으로 벨로우즈의 형상 변수에 대한 처리를 수행한다. 즉, 유한요소해석시

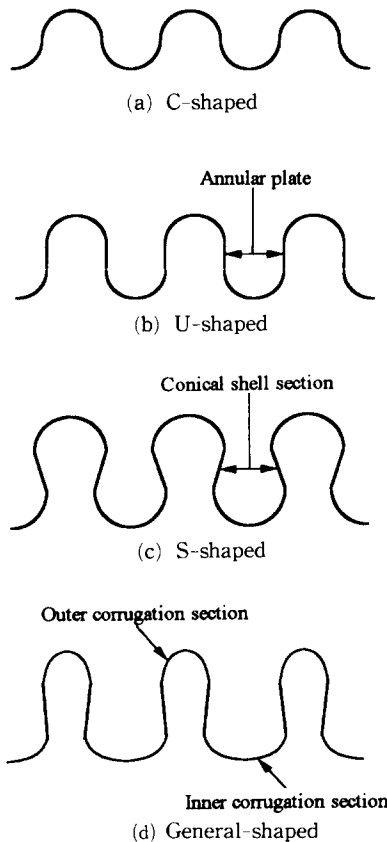


Fig. 1 Meridional profiles made from circular arcs

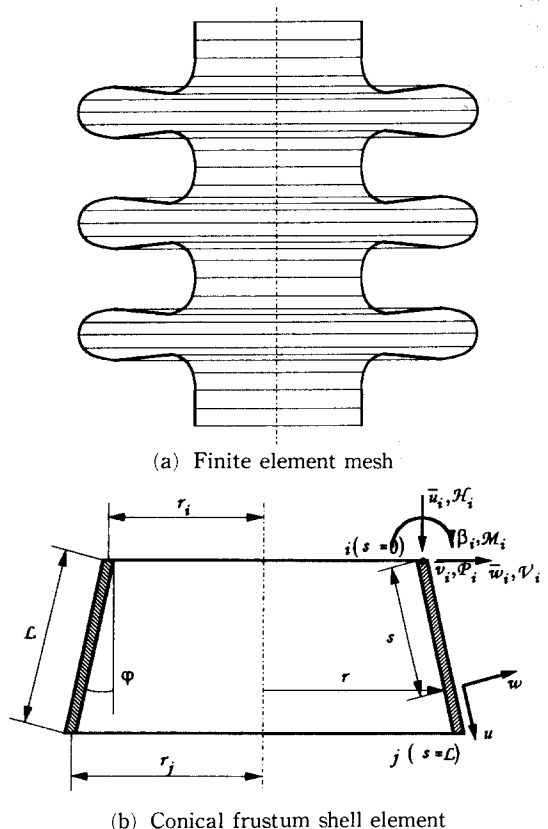


Fig. 2 Finite element mesh and conical frustum shell element

해당되는 벨로우즈의 형상을 구현하기 위하여 파형각(θ), 파형길이(l_a), 그리고 파형의 산 및 골부분의 폭(a)과 높이(b)를 변수로 처리함으로써 이를 간단히 입력하여 해석하고자 하는 벨로우즈의 형상을 생성한다. 또한 형상최적설계시에는 설계변수로 고려하여 주어진 제한조건을 만족하며, 목적함수를 최소화하는 벨로우즈의 형상을 최적화과정중에서 자동적으로 생성할 수 있도록 한다. 형상변수와 벨로우즈의 형상간의 관계는 다음과 같다.

$\theta=0, l_a=0, a_i=b_i, a_o=b_o$; C형 벨로우즈

$\theta=0, l_a \neq 0, a_i=b_i, a_o=b_o$; U형 벨로우즈

$\theta \neq 0, l_a \neq 0, a_i=b_i, a_o=b_o$; S형 벨로우즈

$\theta \neq 0, l_a \neq 0, a_i \neq b_i, a_o \neq b_o$; 일반형 벨로우즈

정적해석 결과를 벨로우즈의 설계에 적용하여 정확한 동특성을 예측한다는 것은 불가능한 일이다. 따라서 벨로우즈가 장착된 시스템과의 공진현상을 진단하기 위하여 벨로우즈의 고유진동수를 검토하는 것이 필수적이지만 벨로우즈 형상의 기하학적 복잡성으로 인하여 고유진동수에 대한 이론적인 해를 구하기가 매우 어렵다.

벨로우즈의 고유진동수에 대한 간편식을 제시하기 위해 벨로우즈는 다음과 같이 보로써 등가한다.

$(K_a)_b = (K_a)_B$ (1a)

$(K_t)_b = (K_t)_B$ (1b)

$(I_t)_b = (I_t)_B$ (1c)

$(E)_b = (E)_B$ (1d)

2.2 고유진동수 간편식

벨로우즈가 장착된 기계시스템에 동하중이 작용하는 경우 벨로우즈와 시스템간의 동특성으로 인하여 과도한 변위나 응력이 발생할 가능성이 존재한다. 벨로우즈의 강성은 시스템의 강성에 비해 상당히 작은 값을 가지므로 벨로우즈의 장착으로 인하여 시스템의 동특성은 크게 변화된다. 이와 같이 시스템에 동하중이 작용하는 경우 벨로우즈에 대한

여기서, K 는 강성, l_t 는 전체 길이, 그리고 E 는 탄성계수를 나타낸다. 첨자 a 와 l 은 각각 축방향, 횡방향을 표시하며, 첨자 b 와 B 는 각각 보와 벨로우즈를 표시한다. 식 (1)에 나타난 바와 같이 보의 강성, 전체 길이, 그리고 탄성계수는 벨로우즈와 같은 값을 갖도록 한다. 벨로우즈의 강성은 장착되는 기계시스템의 강성에 비해 매우 작은 값을 가지므로 기하학적 경계조건을 외팔보로 고려하면 등가보의 단면적 및 극관성모멘트는 식 (1)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$A = \frac{(K_a)_{b=B} (I_t)_{b=B}}{(E)_{b=B}}$ (2)

$I = \frac{(K_t)_{b=B} (I_t^2)_{b=B}}{3(E)_{b=B}}$ (3)

여기서, 첨자등호는 식 (1)의 관계를 의미한다. 등가보와 벨로우즈의 동특성을 같게 하기 위하여 진동문제에서 반드시 고려되어야 할 질량은 서로 같아야 하므로 밀도를 다음과 같이 조정한다.

$\rho = \frac{(m)_B}{A (I_t)_{b=B}}$ (4)

식 (4)에 나타난 바와 같이 등가보에 대한 밀도를 구하기 위해선 먼저 벨로우즈 질량에 대한 산출과정이 필요하다.

하나의 원통 셀에 대한 부피 V_c 는 벨로우즈의 회전축에 대하여 회전시킴으로써 다음과 같이 계산된다.

$V_c = \pi \int_0^{l_c} \{(R+t)^2 - R^2\} dx$ (5)

여기서 l_c, R, t 는 각각 원통 셀의 길이, 벨로

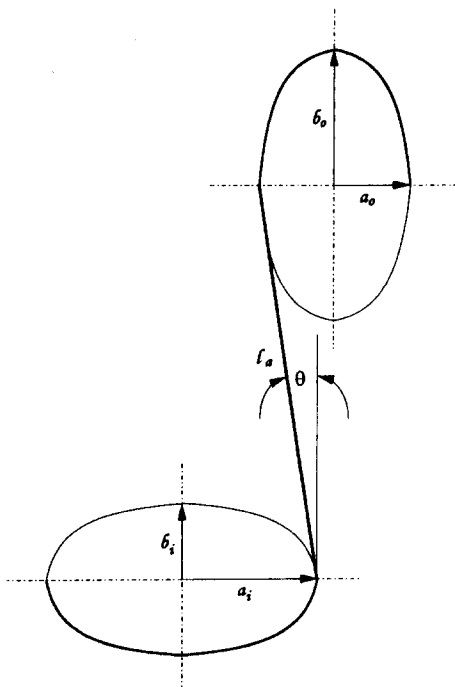


Fig. 3 Shape variables of general bellows

우즈 반경, 두께이다. 내외측 파형의 부피 V_i , V_o 는 타원의 방정식으로부터 다음과 같이 각각 결정된다.

$$\begin{aligned}
 V_i &= \pi \int_0^{a+t} \left[(R+t+b_i)^2 - \left\{ (R+t+b_i) - (b_i+t) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_i+t} \right)^2} \right\}^2 \right] dx - \int_0^{a_i} \left[(R+t+b_i)^2 - \left\{ (R+t+b_i) - b_i \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_i} \right)^2} \right\}^2 \right] dx \\
 V_o &= \pi \int_0^{a_o+t} \left[(R+t+b_i+l_a \cos \phi)^2 - \left\{ (R+t+b_i+l_a \cos \phi) - (b_o+t) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a_o+t} \right)^2} \right\}^2 \right] dx - \int_0^{a_o} \left[(R+t+b_i+l_a \cos \phi)^2 - \left\{ (R+t+b_i+l_a \cos \phi) - b_o \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_o} \right)^2} \right\}^2 \right] dx \quad (6)
 \end{aligned}$$

식 (6)은 타원형 단면을 갖는 일반형 벨로우즈에 대한 내외측 파형의 부피를 산출하기 위한 수식이지만 형상을 표시하는 인자들이 변수로 처리되므로 식 (6)은 C, U형 및 S형에 대해서도 적용될 수 있다.

만일 C형 벨로우즈가 아닌 벨로우즈에 대한 원추형 셀 혹은 원형 평판의 부피 V_a 는 마찬가지로 벨로우즈의 회전축에 대하여 회전시킴으로써 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned}
 V_a &= \pi \int_0^{l_a \sin \phi + t} \left\{ -\tan(90^\circ - \phi)(x-t) + (R+t+b_i+l_a \cos \phi) \right\}^2 dx \\
 &+ \pi \int_0^t (R+t+b_i+l_a \cos \phi)^2 dx \\
 &- \pi \int_0^{l_a \sin \phi} \left\{ -\tan(90^\circ - \phi)x + (R+t+b_i+l_a \cos \phi) \right\}^2 dx \\
 &- \pi \int_{l_a \sin \phi}^{l_a \sin \phi + t} (R+t+b_i)^2 dx \quad (7)
 \end{aligned}$$

식 (5)~식 (7)로부터 벨로우즈의 질량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(m)_B = 2\rho \{ V_c + n(V_i + V_o) + n_a V_a \} \quad (8)$$

여기서, n_a 는 원추형 셀의 길이 혹은 U형 벨로우즈에 있어 원형 평판의 길이가 다를 경우, 각 경우의 파형수이며, n 은 전체 파형수이다.

따라서 원추대 셀요소의 유한요소법을 이용하여 벨로우즈의 강성을 산출한 후 식 (2), (3)으로부터 등가보의 단면적과 관성모멘트를 결정한다. 다음 단계로 식 (8)로부터 벨로우즈의 중량을 산출하여 다음과 같은 보의 고유진동수 산출식⁽¹⁴⁾에 대입함으로써 최종적으로 벨로우즈의 고유진동수에 대한 간편식을 완성한다.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \left(\frac{0.597\pi}{l_i} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \\
 f_2 &= \left(\frac{1.494\pi}{l_i} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \\
 f_i &= \left(\frac{(2i-1)\pi}{l_i} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{for } i \geq 3 \quad (9)
 \end{aligned}$$

식 (9)는 벨로우즈의 형상최적설계에서 고유진동수에 대한 제한조건함수로 사용된다.

2.3 피로수명 실험식

현재 벨로우즈의 피로수명 설계에 지배적으로 사용되고 있는 EJMA의 수식은 실험에 의해 피로수명곡선을 제공한 수식으로서 개략적인 벨로우즈의 수명을 평가하는 데는 효과적이거나 안전설계만의 관점으로 인하여 피로수명에측의 정확성이 떨어진다고 보고되고 있다. 따라서 벨로우즈의 거동에 대한 정확한 설계자료가 요구되는 정밀 벨로우즈를 대상으로 피로수명에 대한 실험을 수행하고, 이에 대한 실험식을 산출한다.

먼저 실험에서 사용된 벨로우즈 모델의 재질은 SUS304이다. 이와 같은 벨로우즈 모델은 현재 자동차 배기시스템에 장착되는 대부분의 벨로우즈이며, 실험결과와 신뢰성을 위하여 각 모델당 평균 5개씩의 벨로우즈 시험편을 선정하였다. 피로실험은 실온에서 수행되었으며, 하중조건은 축 및 횡방향으로서 실험중의 시험편 내부의 온도상승을 거의 무시할 수 있는 3~8 Hz의 정현파로 선정하였다. 이와 같은 실험방법을 기초로 배기시스템용 벨로우즈에 대한 다음과 같은 형태의 피로수명 예측식을 제안한다.

$$\sigma_e N_f^{-A} = B \quad (10)$$

여기서, A 와 B 는 각각 피로수명곡선의 기울기 및 절편, N_f 는 피로수명이며, σ_e 는 등가응력으로써 다음 식으로부터 산출된다.

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_m - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_m)^2} \quad (11)$$

여기서 σ_m , σ_c , σ_r 은 각각 자오선, 원주 및 반경방향의 응력을 표시한다. 쉘 표면과 수직인 반경방향의 응력을 무시하면 등가응력은 다음과 같이 간단히 유도된다.

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_c^2} - \sigma_m \sigma_c \quad (12)$$

3. 형상최적설계

3.1 다목적 최적화기법

여러 개의 목적함수로 구성된 다목적 최적화기법의 수학적 정식화는 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$\text{Min. } \mathbf{f}(\mathbf{b}) = [f_1(\mathbf{b}) \ f_2(\mathbf{b}) \ \dots \ f_k(\mathbf{b})]^T \quad (13)$$

s.t.

$$g_j(\mathbf{b}) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, p \quad (14)$$

$$h_i(\mathbf{b}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, q < r \quad (15)$$

여기서, $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r]^T$

즉, 식 (14)의 p 개의 부등제한조건함수와 식 (15)의 q 개의 등제한조건함수를 만족하며, 식 (13)의 다목적함수를 최소화하는 설계변수 $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r]^T$ 의 최적값 $\mathbf{b}^* = [b_1^* \ b_2^* \ \dots \ b_r^*]^T$ 를 구하는 문제가 된다. 여기서, 식 (13)으로 표현된 다목적함수에 포함된 각각의 함수들의 수치적 크기를 균등하게 하기 위하여 본 연구에서는 가중목적법⁽¹⁶⁾을 적용하였다. 이 방법의 기본 개념은 모든 목적함수를 각 목적함수에 대한 각기 다른 가중치와 곱해진 형태의 합으로 표현하는 것이다. 즉, 가중목적법을 적용한 다목적 최적화기법은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(\mathbf{b}) \quad (16)$$

여기서, $w_i \geq 0$ 이고, 각 목적함수들의 상대적인 중요성을 나타내며, 다음의 조건을 만족하도록 결정된다.

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (17)$$

식 (16)을 적용한 최적화경향은 가중치에 따라 많은 차이를 나타내지만 가중치의 선택에 대한 방법은 거의 알려져 있지 않으므로 동일한 문제에 대해 가중치를 변화시켜 가면서 최적해를 구하고 있는 실정⁽¹⁷⁾이다. 따라서 모든 함수값들이 첫번째 반복과정에서 동일한 수치를 가지고 반복할 수 있도록 다음과 같이 가중치를 선정하였다.

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(\mathbf{b}) c_i \quad (18)$$

여기서, $c_i = 1/f_i^0$ 이며, f_i^0 는 각 목적함수들만을 최적화했을 때의 최적값을 나타낸다.

3.2 수학적 정식화

일반적으로 배관시스템에서 벨로우즈는 시스템의 변형을 최대한 흡수할 목적으로 장착되므로 벨로우즈에 대한 기존의 설계에서는 벨로우즈의 유연성 향상에 관점을 두고 최적화기법이 수행되어 왔다. Hamada⁽¹⁸⁾는 벨로우즈의 단위길이당 변형을 목적함수로 선정하여 최대화하였으며, Bhavikatti⁽¹⁹⁾와 Chakraverti⁽²⁰⁾는 배관시스템으로 전달되는 반력을 목적함수로 선정하여 최소화하였다.

그러나 벨로우즈는 배관시스템용 벨로우즈와 같이 유연성만을 고려하여 설계될 수 없다. 왜냐하면 자동차 배기시스템과 같이 동하중이 작용하는 시스템에서의 벨로우즈는 진동을 흡수할 수 있는 유연성과 동시에 반복하중에 의한 벨로우즈의 피로가 문제시 된다. 따라서 강성 및 강도가 동시에 고려된 벨로우즈의 설계가 요구된다. 또한 벨로우즈의 강성의 변화는 벨로우즈가 장착된 기계시스템의 고유진동수를 변화시키며, 이로 인해 이 시스템의 고유진동수가 시스템을 가진하는 가진 시스템의 주파수 혹은 벨로우즈 자체의 고유진동수와 일치하여 공진현상이 발생할 수 있다. 따라서 기계시스템에 장착되는 벨로우즈는 기계시스템에서 요구하는 특정한 강성이 동시에 만족되는 설계가 요구되고 있다.

따라서 이상의 각각의 설계목표를 목적함수로 선정하여 형상최적설계를 수행하며, 각각의 설계 목표에 영향을 미치는 기하학적 인자들과 어떤 형상의 벨로우즈에 수렴하는가를 고찰한다. 먼저 벨로우즈의 유연성을 향상시키기 위한 형상최적설계의 수학적 정식화는 다음과 같이 표시된다.

$$\text{Min. } w_1 \frac{K_t}{f_1^0} + w_2 \frac{K_a}{f_2^0} \quad (19)$$

s.t

$$g_s \equiv \frac{(N_f)_i}{N_{sys}} - 1 \quad (20)$$

$$g_t \equiv 1.5 \frac{f_{sys}}{f_{tat}} - 1 \quad (21)$$

$$g_u \equiv 0.5 \leq \frac{q}{h} \leq 1.5 \quad (22)$$

$$g_v \equiv \frac{h}{2R} \leq 0.25 \quad (23)$$

$$g_w = \frac{la \sin \phi}{a_i} - 1 \quad (24)$$

식 (19)는 벨로우즈의 유연성에 영향을 미치는 기하학적 인자를 고찰하기 위하여 축방향 및 횡방향 강성을 다목적함수로 표현한 것이다. 여기서 K_t , K_a 는 원추대 필요소를 이용한 유한요소해석에 의하여 계산되는 벨로우즈의 횡방향 및 축방향 강성이다. 또한 w_1 , w_2 는 가중치이며, f_1^0 , f_2^0 는 각각의 목적함수만으로 최적화를 수행했을 때 산출되는 목적함수의 최적값이다. 식 (20)은 피로수명에 대한 제한조건함수를 나타내며, N_{sys} 는 시스템에서 요구하는 벨로우즈의 피로수명이고, (N_f) 는 실험으로부터 산출되는 벨로우즈의 피로수명이다. 피로수명에 대한 제한조건함수는 벨로우즈의 전체 파형에서 평가된다. 벨로우즈의 고유진동수는 벨로우즈

가 장착되는 시스템의 고유진동수보다 1.5배 이상 커야한다고 보고되고⁽⁸⁾ 있다. 따라서 식 (21)은 벨로우즈의 고유진동수에 대한 제한조건함수로서 식 (9)를 사용한다. 여기서, f_{sys} 는 시스템의 고유진동수로서 본 연구에서는 자동차 배기시스템을 고려하여 엔진 공회전(engine idling)시의 주파수인 25 Hz보다 5 Hz가 작은 값을 입력하였다. 벨로우즈에 대한 형상최적설계의 실질성을 부여하기 위하여 현장에서의 제작 환경을 제한조건함수에 포함시켰다. 식 (22), (23)은 제작환경에 대한 제한조건함수로서 식(22)는 파형피치와 높이와의 관계를, 식 (23)은 벨로우즈 반경과 파형 높이와의 관계를 표시한다. 또한 식 (24)는 파형 사이의 겹침을 방지하기 위한 제한조건함수이다.

벨로우즈의 최적설계에 대한 기존의 연구^(18~20)는 벨로우즈의 하나의 파형에 대해서만 최적설계를 수행하고, 여기서 산출된 최적화경향을 모든 파형에 동일하게 적용시켰다. 그러나 벨로우즈는 양끝단 부근의 파형 끝부분에서 파손된다는 실제의 파손 사례를 고려한다면, 이와 같은 기존의 연구는 벨로우즈의 설계에 불충분한 결과를 제시하고 있는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 4에 표시한 바와 같이 두께, 파형반경 및 원형 평판의 길이를 벨로우즈의 전체 파형에 대하여 설계변수로 선정하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 원추대 필요소의 신뢰성 검토

축대칭 원추대 요소의 요소분할수에 대한 수렴성을 고찰하기 위하여 벨로우즈의 기하학적 구간당

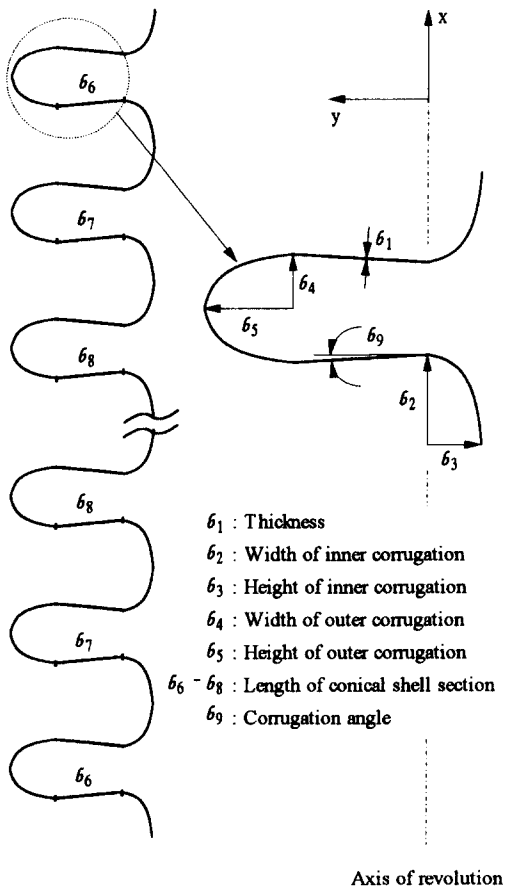


Fig. 4 Design variables

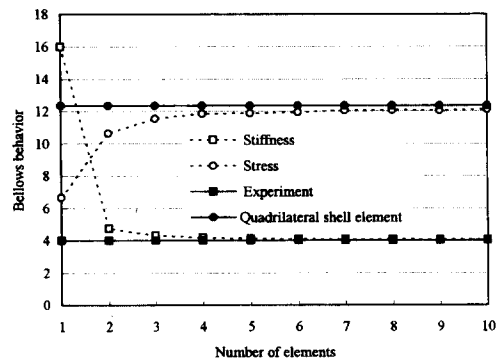


Fig. 5 Convergence according to the number of elements per one geometric section

Table 1 Dimensions of the bellows model tested

Model	D _o	D _i	l _t	a _o	a _i	l _a	t	n	K _a '	K _l '
1	75.5	49.5	266.0	2.0	2.0	9.0	0.38	28.0	1.375	0.030
2	75.6	49.6	210.0	2.0	2.0	9.0	0.38	21.0	1.950	0.069
3	80.0	54.5	200.0	1.875	1.875	9.0	0.38	19.0	2.064	0.108
4	75.5	49.5	280.0	2.0	2.0	9.0	0.38	28.0	1.450	0.026
5	75.5	49.5	160.0	2.1	2.0	6.0	0.63	12.0	24.606	1.475

(unit : mm)

(Note) D_o : Outer diameter, D_i : Inner diameter, l_t : Total length, a_o : Outer radius of corrugation
 a_i : Inner radius of corrugation, l_a : Length of annular plate, t : Thickness
 n : No. of corrugation, K_a' : Axial stiffness, K_l' : Lateral stiffness

요소수에 따른 강성 및 응력의 변화를 Fig. 5에 표시하였다. Fig. 5에 표시한 바와 같이 한 구간당 요소수가 5이상일 때부터 벨로우즈 거동의 수렴성이 나타나므로, 본 연구에서는 요소분할수를 5로 선정하였다.

원추대 셸요소의 유한요소법의 정확도를 검토하기 위하여 벨로우즈의 변형량 측정실험을 수행하였다. 실험에 사용된 벨로우즈 모델은 스테인레스 강

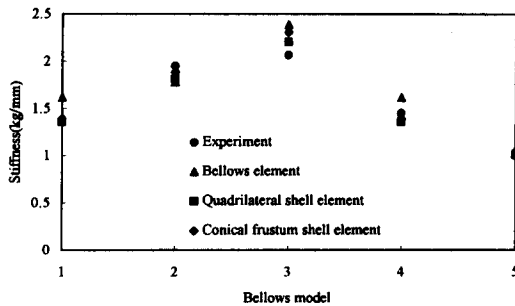
(stainless steel)으로 제작하였으며, 이 모델에 대한 재원이 Table 1에 표시되어 있다. 벨로우즈의 모델당 10개씩의 시편을 선정하여 강성을 측정한 후 평균값을 Table 1에 포함하여 표시하였다. Fig. 6은 본 연구의 해석이론과 실험을 비교한 것이며, 사변형 셸요소⁽⁶⁾와 벨로우즈요소⁽⁷⁾를 이용한 해석 결과가 포함되어 도시되어 있다. Fig. 6에 나타난 바와 같이 본 연구의 해석결과는 실험 및 기타의 유한요소해석 결과와 잘 일치하고 있다. 또한 Table 1는 C형 벨로우즈의 파형에서 발생하는 응력성분을 급수전개법이론⁽²⁾ 및 에너지이론⁽⁴⁾의 결과와 비교한 것이다. Table 2에 비교한 바와 같이 모든 응력성분의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있으므로 해석의 정확도가 입증되었다.

4.2 벨로우즈의 고유진동수에 대한 간편식 검증

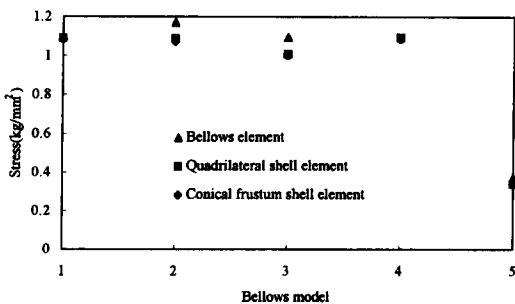
벨로우즈를 보로 등가시킨 등가과정의 신뢰성을 검토하기 위하여 등가보와 벨로우즈의 고유진동수를 비교하였다. 등가보와 벨로우즈의 고유진동수가 Fig. 7에 표시되어 있으며, 모드형은 Fig. 8에 표시되어 있다. Figs. 7, 8에 도시된 바와 같이 등가보와 벨로우즈의 고유진동수 및 모드형은 비교적 잘 일치하므로 등가과정의 신뢰성이 확인되었다.

4.3 벨로우즈의 피로수명에 대한 실험식 산출

벨로우즈에 대한 실험결과가 Fig. 9에 도시되어 있으며, ANSYS⁽²¹⁾를 이용한 피로수명 시뮬레이션의 결과와 EJMA의 피로수명식도 포함하여 제시하였다. 참고로 ANSYS의 피로수명 시뮬레이션은 ASME Code⁽²²⁾를 근거로 피로수명을 산출하며,



(a) Stiffness



(b) Stress

Fig. 6 Comparison of the bellows behavior

Table 2 Typical stress distribution of the C-shapea bellows

Angle	Circumferential membrane stress			Circumferential bending stress			Meridional bending stress		
	Present	Ref. (4)	Ref. (2)	Present	Ref. (4)	Ref. (2)	Present	Ref. (4)	Ref. (2)
0	0.956	1.127	0.935	0.799	0.799	0.812	2.661	2.665	2.710
10	0.926	1.093	0.893	0.794	0.790	0.793	2.645	2.644	2.650
20	0.848	0.995	0.811	0.767	0.761	0.763	2.587	2.572	2.480
30	0.726	0.845	0.687	0.719	0.710	0.733	2.465	2.445	2.280
40	0.576	0.661	0.538	0.647	0.635	0.575	2.276	2.250	2.041
50	0.413	0.466	0.378	0.547	0.534	0.475	2.005	1.970	1.780
60	0.258	0.282	0.227	0.420	0.408	0.357	1.641	1.609	1.423
70	0.129	1.132	0.100	0.266	0.256	0.224	1.183	1.149	1.027
80	0.046	0.034	0.020	0.085	0.085	0.118	0.632	0.612	0.567
90	0.021	0.000	-0.004	-0.107	-0.096	-0.100	0.001	0.023	0.001

(Note) $E=21.000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu=0.3$, $t=1 \text{ mm}$, $a=10 \text{ mm}$, $D_i=500 \text{ mm}$, $F=100 \text{ kg}$ (unit : kg/mm^2)

EJMA의 피로수명식은 다음과 같다.

$$N_{EJMA} = \left(\frac{1308.0}{S_t - 38.0} \right)^{3.4} \quad (25)$$

단,

$$S_t = 0.7(S_3 + S_4) + (S_5 + S_6)$$

$$S_3 = \frac{ph}{2t}$$

$$S_4 = \frac{p}{2} \left(\frac{h}{t} \right)^2 C_p$$

$$S_5 = \frac{Et^2e}{2h^3C_f}$$

$$S_6 = \frac{5Ete}{3h^2C_d}$$

여기서, S 는 응력성분, p 는 압력, h 는 파형높이, e 는 파형당 등가 축방향 변위, C_p, C_f, C_d 는 EJMA 계수이다.

Fig. 9로부터 본 실험에서 제시하는 벨로우즈에 대한 피로수명식은 식 (10)을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_e N_f^{-0.206} = 2.778 \quad (26)$$

식 (26)은 형상최적설계의 수학적 정식화에서 식 (20)인 피로수명에 대한 제한조건함수로 사용된다.

Fig. 9에 도시한 바와 같이 시뮬레이션결과는 실험결과보다 다소 작은 수명을 보였으나 EJMA의 결과는 실험결과에 비해 상당히 작은 수명을 나타내었다. 따라서 EJMA의 피로수명식은 안전설계의 관점만을 중요시한 과잉설계식임을 입증하였다.

4.4 형상최적설계 결과의 경향

식 (19)의 다목적함수와 식 (20)~(24)의 제한조건함수에 대한 최적설계를 위해 설계변수의 상한값, 하한값 및 초기값이 Table 3에 제시되어 있으며, 초기값은 현재의 설계값으로 선정하였다. 유연성 향상을 위한 최적화경향이 Fig. 10에 나타나 있

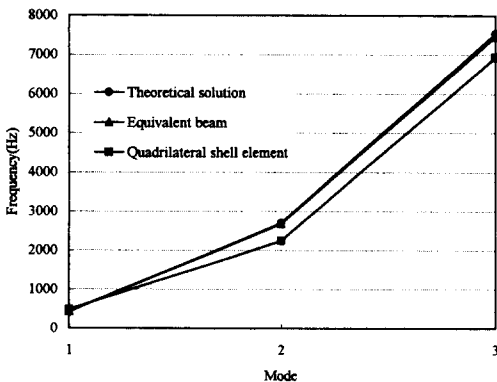


Fig. 7 Comparison of the equivalent beam and the bellows for natural frequencies

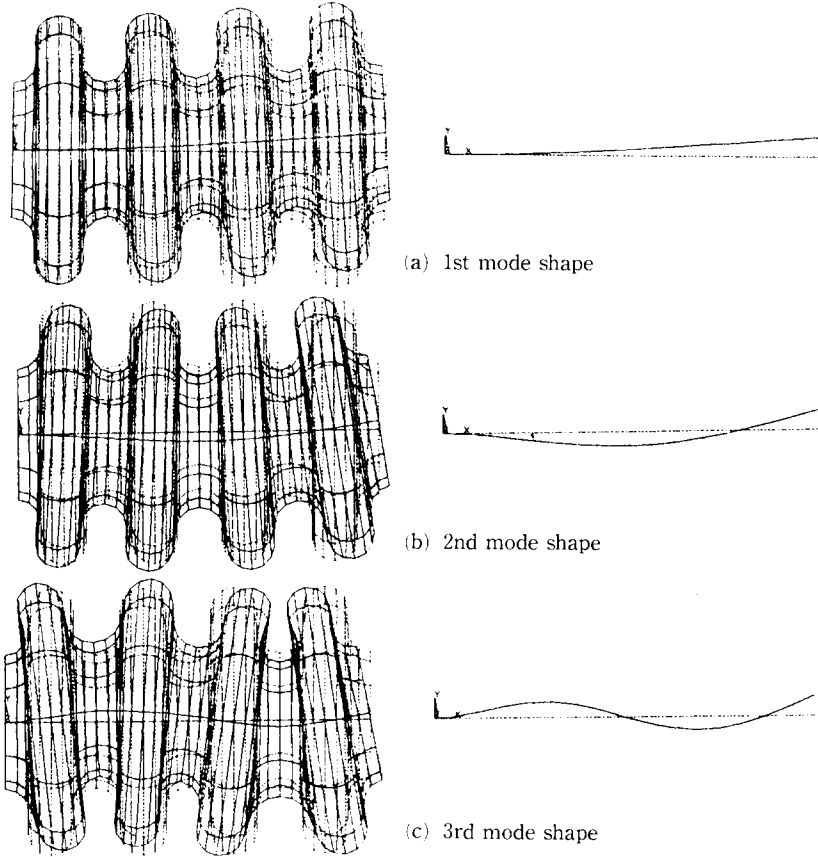


Fig. 8 Comparison of the equivalent beam and the bellows for mode shapes

으며, 다목적함수에 대한 최적화과정을 각각의 목적함수를 포함하여 고찰하였다. 종축은 각 목적함수의 초기값에 대한 각각의 목적함수의 값을 의미하고, Fig. 10(a)에 나타난 바와 같이 최적화의 반복과정은 24번째에서 종료되었다. 다목적함수는 13

번째 반복과정부터 거의 일정한 값을 가지며, 다목적함수에 대한 최적화경향은 유연성을 향상시키기 위해 두께의 감소로 인한 결과임을 알 수 있다. 이와 같이 두께가 감소하면 응력이 증가하여 식 (20)의 피로수명에 대한 구속조건을 위반하지만 이를 방지하기 위하여 두 가지의 최적화경향이 고찰된다. 첫번째는 Fig. 10(b)에 나타난 바와 같이 원형 평판의 길이가 양단으로 갈수록 작아지는 경향이 나타나며, 이러한 경향은 벨로우즈의 양단에서 발생하는 응력을 완화시키기 위하여 양단에서의 원형 평판의 길이가 감소하기 때문이다. 그리고 두번째는 Fig. 10(c)로부터 파형 끝부분의 반경이 산부분의 반경에 비해 큰 값으로 최적화됨을 알 수 있다. 이것은 파형의 끝부분의 응력이 산부분의 응력보다 크다는 연구⁽²³⁾와 비교해 볼 때, 응력을 완화시키기 위하여 끝부분의 반경이 커지기 때문이다. 또한 파형 산부분의 응력집중현상을 완화시키기 위하여 파형 산부분의 폭의 반경이 높이의 반경에 비해 커

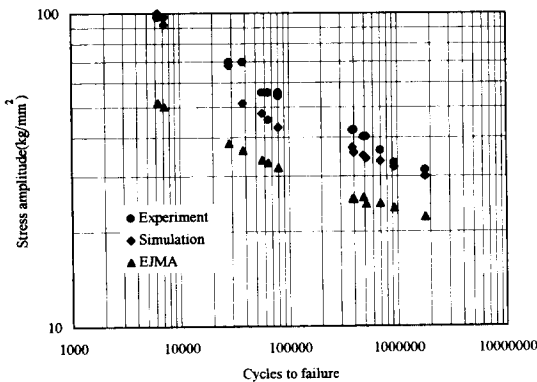
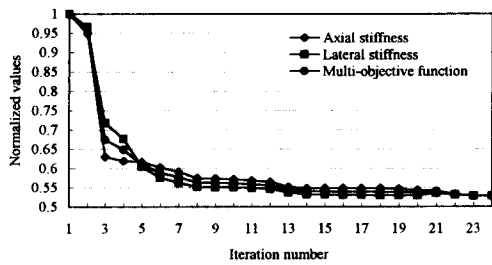


Fig. 9 Fatigue data

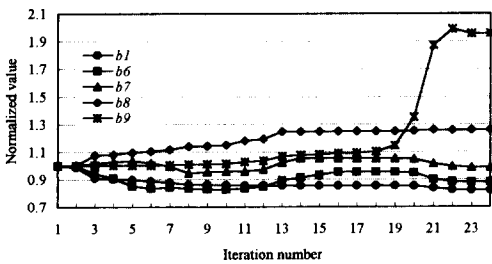
Table 3 Bound and initial values of the design variables

Design variables	Lower bound	Initial value	Upper bound
b_1	0.1	0.5	3.0
b_2	0.5	3.0	10.0
b_3	0.5	2.0	10.0
b_4	0.5	3.0	10.0
b_5	0.5	2.0	10.0
b_6	0.0	6.0	20.0
b_7	0.0	6.0	20.0
b_8	0.0	6.0	20.0
b_9 (degree)	0.0	5.0	25.0

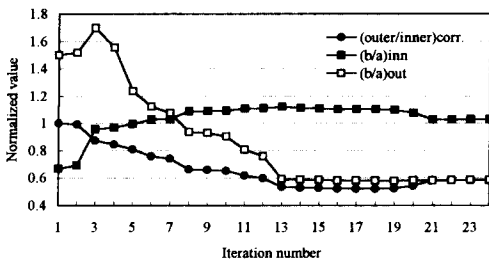
(unit : mm)



(a) Objective function



(b) Design variables



(c) Radius ratio

Fig. 10 Optimization process for flexibility

지는 경향이 나타난다. 유연성 향상을 위한 벨로우즈의 형상은 Fig. 10(b)에 나타난 바와 같이 원형 평판의 길이 및 경사각이 존재하므로 원형 평판의 길이가 없는 C형이나 경사각이 0°인 U형 벨로우즈보다 S형 및 일반형 벨로우즈로 설계하는 것이 바람직함을 알 수 있다. 이상의 최적화경향은 현재 벨로우즈의 실제현장에서 설계안으로 채택되고 있다.

벨로우즈는 유연성으로 인하여 많은 변형이 발생하므로 강도 역시 설계시 중요한 고려사항이 되므로 강성 및 강도가 동시에 고려된 벨로우즈의 설계가 요구된다. 이 경우 형상최적설계의 다목적함수에 대한 수학적 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Min. } w_1 \frac{K}{f_1^0} + w_2 \frac{(\sigma_e)_{\max}}{f_2^0} \quad (27)$$

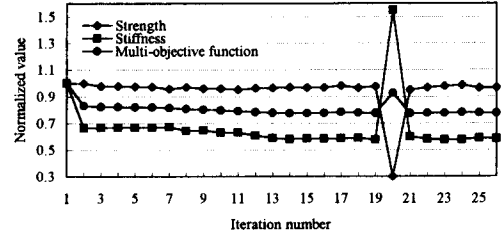
여기서, K 는 벨로우즈의 축방향 및 횡방향 강성이며, $(\sigma_e)_{\max}$ 는 벨로우즈에서 발생하는 최대응력이다. 제한조건함수 및 설계변수의 초기값은 앞서의 유연성 향상을 위한 최적설계의 경우와 동일하다. Fig. 11은 이에 대한 최적화경향을 표시하며, 최적화의 반복과정은 26번째에서 종료되었다. 20번째 반복과정에서 두께의 갑작스런 증가로 인하여 강성이 크게 증가하며, 반대로 응력은 크게 감소함을 알 수 있다. 원형 평판의 길이, 경사각, 파형산부분 및 끝부분의 비에 대한 최적화경향은 유연성 향상을 위한 최적화경향과 거의 유사함을 알 수 있다. 이러한 경향은 피로수명에 대한 제한조건으

로 발생하는 것으로 판단된다. 즉, 유연성 향상을 위한 최적화경향에서 유연성 향상을 위해선 하나의 예로써 두께가 무한히 감소하여야 되나 피로수명의 응력을 위반하지 않기 위하여 적절한 두께가 유지되어야 하는 결과가 산출되었다. 결국 유연성 향상을 위한 최적설계는 강도와 강성이 동시에 고려된 결과가 되므로 강도와 강성을 다목적함수로 고려한 최적설계는 유연성만을 고려한 최적설계와 수치적으로는 다른 결과가 산출되지만 최적화경향은 동일한 것으로 판정되었다.

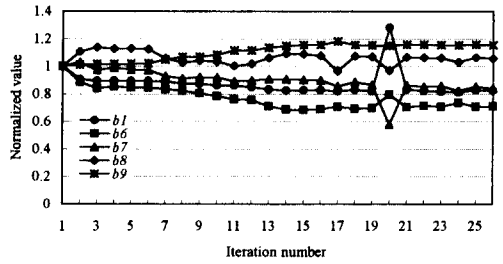
마지막으로 벨로우즈가 장착된 기계시스템에서 요구하는 특정한 강성을 만족하는 벨로우즈의 형상을 결정하기 위한 형상최적설계의 다목적함수에 대한 수학적 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Min. } w_1 \frac{(K_t - K'_t)^2}{f_1^0} + w_2 \frac{(K_a - K'_a)^2}{f_2^0} \quad (28)$$

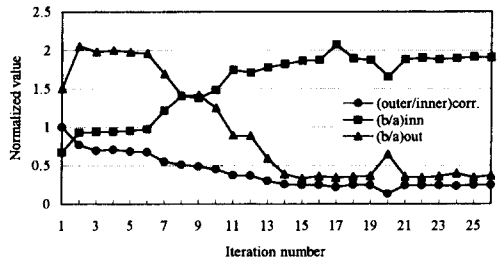
여기서, 위 첨자 '는 기계시스템에서 요구하는 강성이며, 제한조건함수 및 설계변수의 초기값은 앞서의 유연성 향상을 위한 최적설계의 경우와 동일하다. 이 경우의 다목적함수는 식 (28)에 표시한 바와 같이 원추대 셸요소의 유한요소법으로부터 산출되는 강성과 기계시스템에서 요구하는 강성과의 차의 자승값을 최소화하는 문제가 된다. 이 경우에 대한 기존의 연구⁽²⁴⁾에서는 유한요소법의 강성값과 시스템에서 요구하는 강성과의 차를 등제한조건함수로 고려하고 목적함수로는 벨로우즈의 중량을 선



(a) Objective function



(b) Design variables



(c) Radius ratio

Fig. 11 Optimization process for strength and flexibility

Table 4 Initial and optimal values of the design variables

Design variables	Initial values	Optimal values	Target
b ₁	0.50	0.41	
b ₂	3.00	3.32	
b ₃	2.00	3.38	
b ₄	2.00	2.44	
b ₅	3.00	1.36	
b ₆	6.00	5.48	
b ₇	6.00	6.13	
b ₈	6.00	7.73	
b ₉	5.00	9.10	
Axial stiffness	11.30	5.92	5.60
Lateral stiffness	0.66	0.36	0.35

정하였으나 최적화과정에서 등제한조건함수를 만족시키기가 상당히 어렵다는 문제가 발생한다. 또한 시스템의 중량에 비해 벨로우즈의 중량은 매우 미약하므로 벨로우즈의 중량을 목적함수로 선정하는 데에는 의미가 없다. Table 4는 최적설계의 수치적 결과를 표시하며, 시스템에서 요구하는 강성과 최적화된 강성을 비교하였다. Table 4에 표시한 바와 같이 최적화된 강성은 시스템에서 요구하는 강성과 거의 근접한 결과를 산출하였으며, 동시에 이에 대한 벨로우즈의 형상이 결정되었다.

5. 결 론

적은 요소수로도 벨로우즈의 기계적 특성을 정확하게 산출할 수 있는 원추대 셸요소를 비축대칭으로 확장하여 벨로우즈를 해석하고 고유진동수 및 피로수명을 용이하게 산출할 수 있는 간편식을 제공하였으며, 이를 제한조건함수로 하는 형상최적설계를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 벨로우즈의 형상을 변수로 처리함으로써 C, U, S형 그리고 일반형을 하나의 프로그램에서 자동적으로 모두 생성할 수 있는 통합 프로그램을 개발함으로써 최종적으로 각각의 벨로우즈에 대한 유한요소해석을 수행할 수 있도록 하였다. 개발된 통합 프로그램은 축방향 및 횡방향 변형량실험을 통하여 신뢰성을 입증하였다.

(2) 기지의 벨로우즈 강성을 통한 고유진동수의 간편식은 보에 대한 기본적인 진동해석을 기반으로 벨로우즈를 보로 등가하여 유도되므로 설계상황에 맞도록 수정하여 적용할 수 있도록 하였다. 또한 벨로우즈의 중요한 설계자료인 피로수명에 대한 실험을 수행하고, 이에 대한 실험식을 산출하였으며, 기존의 설계기준인 EJMA와의 비교를 통하여 유용성을 부여하였다.

(3) 다목적 최적화기법과 가중목적법을 적용한 형상최적설계기법을 통하여 벨로우즈의 설계기법을 제안하였다. 다목적함수로는 벨로우즈의 기계적 특성인 강성과 강도 그리고 기계시스템에서 요구하는 벨로우즈의 특정강성을 선정하였으며, 각각의 설계목표에 영향을 미치는 기하학적 인자들과 어떤 형상의 벨로우즈에 수렴하는가를 고찰하였다. 제한조건함수는 실제 벨로우즈의 제작환경을 포함시켰으며, 설계변수는 벨로우즈의 전체 파형에 대하여 선정하였다.

(4) 모든 형상최적설계의 결과로부터 벨로우즈의 설계안은 크게 두가지로 제안할 수 있다. 첫번째는 원형 평판의 길이는 양단으로 갈수록 작아지도록 하며, 두번째는 파형 끝부분의 반경이 산부분의 반경에 비해 큰 값이 되도록 설계한다. 또한 벨로우즈의 형상은 가능한 한 C형이나 U형 벨로우즈보다는 S형이나 파형 산부분의 폭의 반경이 높이의 반경에 비해 큰 일반형 벨로우즈를 추천한다.

(5) 원추대 셸요소의 유한요소해석, 고유진동수에 대한 간편식, 피로수명에 대한 실험식 그리고 다목적 최적화기법의 형상최적설계를 통한 설계법 및 설계안의 제시는 벨로우즈의 해석 및 설계에 정확성, 효율성과 실질성을 부여하리라 기대된다.

참고문헌

- (1) 고병갑, 서용진, 박경진, 1994, "U형 벨로우즈의 유한요소해석과 특정강성을 위한 형상최적설계," 한국자동차공학회논문집, 제3권, 제6호, pp. 96~111.
- (2) Ota, T. et al., 1963, "On the Strength of Toroidal shells (1st Report, The Proposition of the Solution)," *Bul. JSME*, Vol. 29, No. 197, pp. 142~158.
- (3) Clark, R. A., 1964, *Asymptotic solutions of Elastic Shell Problem, Asymptotic solutions of Differential Equations and Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc..
- (4) Laupa, A. and Weil, N. A., 1962, "Analysis of U Shaped Expansion Joint," *J. Appl. Mech.*, 29 (1), pp. 115~123.
- (5) 이완익, 김태완, 1989, "벨로우즈 문제 해석을 위한 수정 에너지이론," 한국자동차공학회지, 제11권, 제2호, pp. 55~65.
- (6) 이완익, 하성규, 고병갑, 1992, "자동차용 벨로우즈의 설계기준에 관한 연구," 산업과학연구소논문집, 한양대학교 제35집, pp. 247~263.
- (7) 고병갑, 박경진, 이완익, 1995, "배관시스템 해석을 위한 벨로우즈 유한요소의 개발," 대한기계학회논문집, 제19권, 제6호, pp. 2237~2246.
- (8) Expansion Joint Manufacturers Association, Inc., 1993, *Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc.* Sixth Edition.
- (9) Tsukimori, K. et al., 1984, "Fatigue and Creep

- Fatigue Life Evaluation of U-shaped Bellows," *Transaction of the ASME, Journal of Pressure & Vessels Technology*, Vol. 114, pp. 280~291.
- (10) Koh, B. K. and Park, G. J., 1996, "Design of an Automobile Exhaust System using a Top-Down Approach Design Methodology," *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 17, No. 3, pp. 276~294
- (11) Arora, J. S. and Tseng, C. H., 1986, *IDESIGN User's Manual Version 3.5*, Optimal Design Laboratory, University of Iowa.
- (12) 鷺津久一郎, 1981, 有限要素法 ハント"フ"ック, 培風館, pp. 291~348.
- (13) Zienkiewicz, O. C., 1977, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill.
- (14) Ross, C. T. F., 1991, *Finite Element Programs for Structural Vibrations*, Springer-Verlag London Limited.
- (15) Arora, J. S. 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Book Company.
- (16) Osyczka, A., 1984, *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs*, John Wiley & Sons Inc.
- (17) Lee, W. I., Koh, B. K. and Park, G. J., 1991, "An Optimal Design of the Bellows in the Automobile Exhaust System," *The 6th International Pacific Conference on Automotive Engineering*, Vol. 1, pp. 401~411.
- (18) Hamada, M., 1973, "On the Optimum Shapes of Some Axisymmetric Shells," *IUTAM Symp. on Optimization in Structural Design*, Warsaw/Poland, Springer Verlag, pp. 248~262.
- (19) Bhavikatti, S. S. et al, 1979, "Optimum Design of Flanged and Flued Expansion Joints," *Engineering Optimization*, Vol. 4, pp. 121~128.
- (20) Chakraverti, G., 1976, "Optimum Design of Expansion Bellows for Piping Systems," M. Thesis, Dept. of Applied Mechanics, IIT, Delhi.
- (21) Swanson, J., 1994, *ANSYS Engineering Analysis System User's Manual Revision 5.0a*, Swanson Analysis Systems, Inc.
- (22) ASME Boiler and Pressure Vessel Code for Design by Analysis in Section III and VIII, Division 2, 1969
- (23) Koh, B. K., Park, G. J. and Lee, W. I., 1995, "Mechanical Behavior of U-shaped Bellows and Shape Optimal Design Using Multiple Objective Optimization Method," *KSME J.*, Vol. 9, No. 1, pp. 91~101.
- (24) 고병갑, 1995, "벨로우즈가 장착된 기계시스템의 상·하향식 설계론," 공학박사학위논문, 한양대학교, 서울.