

〈논 문〉

출력피드백에 의한 비매칭 불확실성이 있는 비선형계의 제어

박창용* · 성열완** · 권오규***

(1996년 3월 9일 접수)

Control of Nonlinear Systems with Mismatched Uncertainties Using an Output Feedback

Chang-Yong Park, Yul-Wan Sung and Oh-Kyu Kwon

Key Words : Output Feedback (출력피드백), PI Observer (비례-적분관측기), Mismatched Uncertainties (비매칭 불확실성), Nonlinear System (비선형계)

Abstract

In this paper, we design output feedback nonlinear dynamic control law by using state feedback nonlinear dynamic compensator and PI observer and show that the controller can stabilize globally and asymptotically a class of nonlinear systems with mismatched uncertainties. We also show that it is possible for a nonlinear system to use the output of PI observer in place of state variables in case that the nonlinear dynamic control law is used, similarly as in the linear system. The effectiveness of the proposed control law is demonstrated by a numerical simulation.

1. 서 론

최근 몇 년간 비선형계의 제어이론이 현저히 발전하였으며, 많은 연구결과가 발표되었다. 이와 같은 발전은 주로 기하학적인 수법에 의해 다양한 선형 제어방법을 비선형계에 확장하므로 가능하였다.⁽¹⁻⁴⁾ 그러나, 비선형계에 있어서도 불확실성 (uncertainty)이 존재하고, 이와 같은 불확실성이 있는 계의 제어는 매우 어렵다.

비선형계의 견실한 제어는 Lyapunov 직접법을 이용한 수법 등에 의해 행하여지지만 주로 불확실성에 대한 어떠한 종류의 매칭조건(matched condition)을 가정하고 있다.^(5,6) 이들 매칭조건은 상당

히 엄격하여, 이 조건을 완화시키는 연구가 행하여지고, 몇몇 연구결과가 발표되었다.^(7,8) 이들 중에는 매칭조건이 만족되지 않아도 불확실성에 대한 어떠한 노름(norm)의 값이 유계이든가, 혹은 어떠한 종류의 등가매칭조건 아래에서 계의 일양종국적 유계성(uniform ultimate boundedness) 혹은 대역적 점근안정성(global and asymptotic stability)을 부여하는 것이 가능하다. 그리고, 이들보다도 더욱 완화된 조건 밑에서 일양종국적 유계성을 부여하는 방법도 보고되어 있지만,⁽⁹⁾ 이들은 불연속 제어입력을 사용하고 있다.

최근, Lyapunov 직접법에서 일반적으로 가정된 불확실성에 대한 정보로서 억제함수(bounding function)가 얻어진다는 조건 아래에서 비선형 동적 보상기를 이용하여 대역적 점근안정성을 부여하는 제어방법이⁽¹⁰⁾ 제안되었고, 이것에 의하여 보다 넓은 범위의 불확실성을 가진 비선형계의 견실한

*회원, 오사카부립대학 기계시스템공학과

**오사카부립대학 정보공학과

***인하대학교 전기공학과

제어가 가능하게 되었다. 그러나, 이들 비매칭 불확실성을 가진 비선형계의 견실한 제어법은 상태피드백제어이며, 상태변수의 측정을 할 필요가 있지만 현실적으로는 모든 상태변수를 측정하는 것은 곤란한 경우가 많다.

출력피드백(output feedback)을 이용해서 비매칭 불확실성을 가진 계를 제어하는 방법은 거의 없으며, 최근 출력피드백 변환이 가능한 계에 계수변동이 있는 경우, 적응적으로 계를 점근 안정화시키는 것이 가능한 방법이 보고되었다.⁽¹¹⁾ 그러나, 그와 같이 변환가능하다는 것은 불확실성의 억제함수가 출력에만 의존하도록 계를 등가변환가능하다는 것을 의미하고, 이것은 특별히 엄격한 조건이다.

선형계인 경우는 상태피드백제어법칙에 의해 페루-프계가 안정일 때, 상태변수 대신에 관측기의 출력을 이용해도 페루-프계가 안정하다는 것이 증명되지만, 비선형계에서는 이를 증명하는 것이 곤란하다. 그래서 본 논문에서는 비선형 동적 제어법칙 상태변수 대신에 비례-적분관측기⁽¹²⁾의 출력을 이용하여서 비매칭 불확실성을 가진 계를 대역적으로 점근안정화시킴이 가능하다는 것을 증명한다. 이것에 의하여 비선형계에 대해서도 비선형 동적 제어법칙을 이용하는 경우에 한해서는 선형계와 마찬가지로 상태변수 대신에 관측기의 출력을 이용하는 것이 가능한 것을 보인다.

2. 비선형 동적 보상기

이 장에서는 참고문헌⁽¹⁰⁾에 제안된 비선형 동적 보상기를 다음의 비선형계에 대하여 설계한다.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

여기서, $t \in R$ 는 시간, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R$ 는 제어법칙, $y(t) \in R$ 는 출력, $\mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 는 비매칭(mismatched) 불확실성⁽⁶⁾이다(단, $\mathbf{N} \in R^n \times R^r$ 는 기지의 상수행렬, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \in R^r \times R$ 는 미지의 벡터함수, n 은 계의 차수이며, r 은 \mathbf{N} 와 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 와의 관계에서 정해지는 양의 정수). 이때 $\mathbf{X}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{B}\zeta(\mathbf{x}(t))$ 인 $\zeta(\mathbf{x}(t))$ 가 존재하면 $\mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 를 매칭 불확실성, 그렇지 않으면 비매칭이라고 한다. 이후로는, 편의상 필요한 경우 이외에는 독립변수 t 를 생략한다.

먼저, 식 (1)의 공칭(nominal)이며, 선형계

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

에 대한 Lyapunov 함수를

$$V_1(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

로 두고, 식 (1)에 대하여 다음과 같은 가정을 한다.

(가정 1)⁽⁸⁾

$$\|\mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\| \leq \rho(\mathbf{x}(t))$$

여기서, $\rho(\mathbf{x}(t))$, (≥ 0)는 미리 주어진 연속함수이다.

(가정 2)

$\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{B} \neq 0$ 는 거의 모든(almost every) $\mathbf{x}(t)$ 에서 만족되어진다.

(가정 3)

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 이외에 $\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{B} = 0$ 의 해와 일치하는 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 의 해의 궤적은 없다.

(가정 4)

$$1) c_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V_1(\mathbf{x}(t)) \leq c_2 \|\mathbf{x}(t)\|^2$$

2) 식 (2)의 공칭이며, 비선형계에 대한 미분은

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}(t)) \leq -\gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2$$

이다. 단, c_1 , c_2 , γ 는 양의 상수이다.

(가정 5)

$$1) |\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))| \leq \eta(\mathbf{x}(t))$$

$$2) \lim_{x(t) \rightarrow 0} |\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) / \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{B}| \leq M (< \infty)$$

여기서, $\eta(\mathbf{x}(t))$, (≥ 0)는 주어진 연속함수이고, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 이외에서는 $\eta(\mathbf{x}(t)) \neq 0$ 이고, M 는 양의 상수이다.

위의 가정아래에서 비선형 동적 제어법칙은 다음과 같이 설계된다.

$$u(t) = -\frac{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{B}}{v(t)} \eta(\mathbf{x}(t)) \quad (3)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{v(t)} \left\{ \frac{(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}\mathbf{B})^2}{v(t)} \eta(\mathbf{x}(t)) - \eta(\mathbf{x}(t)) \right\} \quad (4)$$

또한, 식 (4)에 대한 Lyapunov 함수로서

$$V_2(v(t)) = \frac{1}{2} v^2(t) \quad (5)$$

로 둔다.

여기서, $v(t) \in R$ 이다.

(보조정리 1)⁽⁹⁾

$x(t)^T PB$, $\eta(x(t))$ 가 유계이라면 (가정 2)와 (가정 3)에서 $t=t_0$ 에서 $v(t_0) > 0$ 의 초기치를 가지는 식 (4)의 해 $v(t)$ 는 $t \geq t_0$ 에서 $v(t) > 0$ 이다.

(정리 1)⁽¹⁰⁾

(가정 1)에서 (가정 5)까지의 전제하에서 식 (1)의 계는 식 (3)의 제어법칙에 의해 대역적으로 점근안정하게 된다.

3. 출력피드백에 의한 안정화

이 장에서는 비선형 비례-적분관측기 (PI observer)를 살펴보고, 이것을 이용하여 앞 장의 제어법칙을 수정하고, 출력을 이용한 제어법칙을 설계하여 식 (1)의 계를 대역적 점근안정화시킨다.

(가정 6)

식 (1)의 계는

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & N \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+r$$

를 만족한다.

식 (1)이 (가정 6)을 만족하면 비례-적분관측기를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + N\hat{f}(t) + L_1(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{6}$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = L_2(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{7}$$

여기서, $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ 로 두면

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\hat{f}}(t) \end{bmatrix} = A_e \left\{ \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{f}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ f(x(t)) \end{bmatrix} \right\}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A - L_1 C & N \\ -L_2 C & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

로 된다. 단, $L_1 \in R^n$ 와 $L_2 \in R^r$ 는 식 (8)의 A_e 의 고유치가 음이 되게 하는 임의의 벡터이다. 식 (1), 식 (6) 및 식 (7)에서 계의 블록선도를 나타내면 Fig. 1과 같다. (가정 6)으로부터 A_e 의 고유치는 L_1 과 L_2 에 의해 임의로 지정하는 것이 가능하고, $f(x(t))$ 가 유계이라면 $e(t) = 0 (t \rightarrow \infty)$ 로 되는 것을 알 수 있다.

식 (6)의 관측식을 이용하여 다음과 같은 제어법칙을 설계한다.

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \tag{9}$$

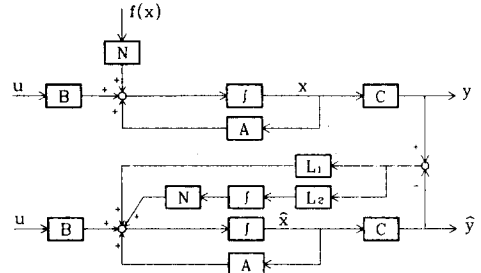


Fig. 1 Block diagram of the system

$$u_1(t) = -\frac{(\hat{x}(t)^T PB)}{v(t)} \eta(\hat{x}(t)) \tag{10}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{v(t)} \left\{ \frac{(\hat{x}(t)^T PB)^2}{v(t)} \eta(\hat{x}(t)) - \eta(\hat{x}(t)) \right\} \tag{11}$$

$$u_2(t) = -\frac{(x(t)^T PB)}{w(t)} \eta(x(t)) \tag{12}$$

$$\dot{w}(t) = \frac{1}{w(t)} \left\{ \frac{(x(t)^T PB)^2}{w(t)} \eta(x(t)) - \frac{(\hat{x}(t)^T PB)^2}{v(t)} \eta(\hat{x}(t)) - \eta(x(t)) - \frac{|\hat{x}(t)^T PB| \cdot |x^T PB|}{v(t)} \eta(\hat{x}(t)) \right\} \tag{13}$$

여기서, $w(t) \in R$ 이다.

(보조정리 2)

초기치 $w(t_0) > 0$ 를 가진 식 (13)의 해 $w(t)$ 는 $w(t) > 0, (t \geq t_0)$ 이다.

(증명)

$w(t_0) > 0$ 의 초기치를 가진 식 (13)의 해 $w(t)$ 가 감소하여 0이 되자면 적어도 임의의 구간 $I = (a, b)$ 에서

$$T(x(t), t) \leq w(t) \tag{14}$$

를 만족하고, $w(t_1) = 0 (t_1 \in I)$ 일 필요가 있다. 여기서,

$$T(x(t), t) = \left\{ \frac{(\hat{x}(t)^T PB)^2}{v(t)} \eta(\hat{x}(t)) + \eta(x(t)) + \frac{|\hat{x}(t)^T PB| \cdot |x(t)^T PB|}{v(t)} \eta(\hat{x}(t)) \right\}^{-1} \cdot (x(t)^T PB)^2 \eta(x(t)) \tag{15}$$

이다.

(가정 5)에서 $\eta(x)$ 는 $x(t) = 0$ 이외에서는 양이고, (가정 2)에서 $(x(t)^T PB)^2$ 는 거의 모든 $x(t)$

에서 양이며, $v(t) > 0$ 이다. 따라서, $T(\mathbf{x}(t), t)$ 는 거의 모든 t 에서 양이다. 또한, (가정 3)에서 $\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B} = 0$ 의 해와 일치하는 $\dot{\mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{N} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 해의 궤적은 없으므로 구간 I 의 거의 모든 t 에서 $T(\mathbf{x}(t), t) < w(t)$ 이 만족되며, 이것을 만족하는 $w(t)$ 는 0이 되지 않는다는 것을 알 수 있다. 그러므로, $w(t) > 0$ 이다.

(정리 2)

(가정 1)로부터 (가정 6)까지의 전제하에서 식 (1)은 식 (9)의 제어법칙에 의해 대역적으로 점근 안정이 된다.

(증명)

식 (13)의 Lyapunov 함수로서

$$V_3(w(t)) = \frac{1}{2} w^2(t) \quad (16)$$

로 두고, 식 (1), (11), (13)으로 구성된 확장계의 Lyapunov 함수로서는

$$V(\mathbf{x}(t)) = V_1(\mathbf{x}(t)) + V_2(v(t)) + V_3(w(t)) \quad (17)$$

로 두어서, 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t), v(t), w(t)) &= \dot{V}_1(\mathbf{x}(t)) + \dot{V}_2(v(t)) + \dot{V}_3(w(t)) \\ &\leq -\gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B} \{u_1(t) + u_2(t)\} \\ &\quad + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{N} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \dot{v}(t) v(t) + \dot{w}(t) w(t) \end{aligned}$$

로 된다. 위의 식에 식 (10), (11), (12), (13)을 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t), v(t), w(t)) &\leq -\gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})(\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) + \eta(\mathbf{x}(t)) \\ &\quad + \frac{(\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &\quad - \frac{(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2}{w(t)} \eta(\mathbf{x}(t)) \\ &\quad + \frac{(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2}{w(t)} \eta(\mathbf{x}(t)) - \frac{(\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &\quad - \frac{|\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \cdot |\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}|}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \eta(\mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

로 되어

$$\dot{V}(\mathbf{x}, v, w) \leq -\gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad (18)$$

로 된다. 식 (17)과 (18)로부터 $\mathbf{x}(t)$, $v(t)$, $w(t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 는 유계이며, (보조정리 1)과 (보조

정리 2)로부터 $v(t) > 0$, $w(t) > 0$ 이고, $u_1(t)$ 도 유계이다.⁽¹⁰⁾ $u_2(t)$ 의 유계성에 대해서는 다음과 같이 된다. 먼저, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 이외에서는 $\lim_{t \rightarrow \infty} \{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\} \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) > 0$ 이기 때문에 (보조정리 2)를 이용하면 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) > 0$ 로 됨을 알 수 있다. 또한, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 일 경우에는 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 의 유계성으로부터 $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$ 이 되므로 $\{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\}^2 \leq v(t)$ 를 이용하면 식 (15)의 $T(\mathbf{x}(t), t)$ 는

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}(t), t) &\geq \{\eta(\mathbf{x}(t)) + \eta(\mathbf{x}(t)) + \eta(\mathbf{x}(t))\}^{-1} \\ &\quad \{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\}^2 \eta(\mathbf{x}(t)) \\ &\geq \frac{\{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\}^2}{3} \end{aligned}$$

로 된다. 이것을 식 (14)에 이용하면

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2 \leq 3w(t)$$

이므로

$$|u_2(t)| = \left| \frac{\{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\}}{w(t)} \eta(\mathbf{x}(t)) \right| \leq 3 \left| \frac{\eta(\mathbf{x})}{(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B})} \right|$$

로 되고, (가정 5)로부터

$$|u_2(t)| \leq M$$

이므로 $u_2(t)$ 는 유계이다. 이상으로부터 식 (1)의 우변은 유계로 되고, $\mathbf{x}(t)$ 는 일양연속(uniformly continuous)이다.

식 (2), (5), (16), (17), (18)로부터

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(\mathbf{x}(t), v(t), w(t)) \\ &= V(\mathbf{x}_0, v_0, w_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(\mathbf{x}(t), v(t), w(t)) dt \\ &\leq V(\mathbf{x}_0, v_0, w_0) - \int_{t_0}^t \gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

로 되고

$$\int_{t_0}^t \gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt \leq V(\mathbf{x}_0, v_0, w_0) \quad (19)$$

가 유도되어진다. 식 (19)의 양변의 극한을 취하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt \leq V(\mathbf{x}(t_0), v(t_0), w(t_0)) \quad (20)$$

로 된다. $\mathbf{x}(t)$ 가 일양연속, 유계이므로 $\gamma \|\mathbf{x}(t)\|^2$ 도 유계이다. 식 (20)의 우변은 정수이므로 Barbalat의 보조정리⁽¹³⁾를 이용하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

가 유도되어지고, 증명이 완료된다.

(정리 2)에서 식 (9)의 제어법칙에 의하여 식 (1)의 계를 대역적으로 점근안정화 가능한 것이 알려졌다지만, 식 (12)은 식 (1)의 상태 $\mathbf{x}(t)$ 를 이용하고 있기 때문에 실제로 식 (9)의 제어법칙을 실현할 수 없다. 다음의 정리는 $w(t_0) \approx 0$ 로 취할 경우 $u_2(t)$ 의 역할은 무시될 수 있음을 보여 줌으로, 실제 제어법칙을 실현할 때 $u(t) = u_1(t)$ 만을 이용해도 된다는 것을 나타내 준다.

(정리 3)

$w(t_0) \approx \infty$ 로 취하면 식 (9)의 제어법칙에서 $u_2(t)$ 의 영향은 무시될 수 있으며, 실제로 $u(t) = u_1(t)$ 에 의해 식 (1)의 계는 대역적으로 점근안정된다.

(증명)

임의의 $\eta(\mathbf{x}(t)) = |\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \cdot \eta'(\mathbf{x}(t))$ ($\eta'(\mathbf{x}(t))$ 는 양의 값을 가지는 함수)에 대하여 생각하자. $w(t_0) \approx \infty$ 로 취하면, 식 (13)은

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\approx \frac{1}{w(t)} \left\{ -\frac{(\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \cdot |\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}|}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \eta(\mathbf{x}(t)) \right\} \\ &= T'(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

로 되고, $v(t)$ 가 충분히 클 경우에는 $\dot{w}(t) \approx 0$, $w(t) \approx 0$ 로 되는 것은 간단히 알 수가 있다. 그러나, $v(t)$ 가 감소되어 작아질 경우에는 간단하게 $\dot{w}(t) \approx 0 (t \geq 0)$ 라고 할 수는 없다. 그래서, $v(t)$ 가 감소하여 갈 경우에는

$$|\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}|^2 \leq v(t)$$

가 만족되어지는 것을 이용하면

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\approx T'(\mathbf{x}, t) \\ &\geq \frac{1}{w(t)} \left\{ -\eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \frac{|\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}|}{|\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}|} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) \right\} \\ &= \frac{1}{w(t)} \left\{ -\eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) - |\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \eta'(\hat{\mathbf{x}}(t)) \right. \\ &\quad \left. - \eta(\mathbf{x}(t)) \right\} \end{aligned}$$

로 되며, $w(t_0) \approx \infty$ 이므로

$$\dot{w}(t) \approx T'(\mathbf{x}, t) \approx 0 \tag{21}$$

로 되어

$$\dot{w}(t) \approx 0, w(t) \approx \infty$$

로 되는 것을 알 수 있다. 이것을 이용하면

$$u_2(t) = -\frac{\{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\}}{w(t)} \eta(\mathbf{x}) \approx 0$$

로 된다. 여기서, $\eta(\mathbf{x}(t)) = |\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \cdot \eta'(\mathbf{x}(t))$ 은 임의로 가정하였으며, 또한, (정리 2)의 증명은 $\eta(\mathbf{x}(t))$ 에는 의존하지 않으므로

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) \approx u_1(t) \\ &= -\frac{\{\hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B}\}^2}{v(t)} \eta(\hat{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned}$$

로 된다. 그러나, $t \rightarrow \infty$ 에서는 $w(t)$ 가 매우 작은 값이 되어 $w(t) \neq \infty$, $u_2(t) \neq 0$ 일 수도 있으나, 이때에는 $\mathbf{x}(\infty) = \hat{\mathbf{x}}(\infty)$ 로 되어 식 (9), (10)만으로도 식 (1)은 안정화된다. 이상으로 증명이 완료된다.

이상의 결과에 의해서 식 (1)의 출력과 식 (6)을 이용하여 식 (10)의 제어기를 설계하여 불확실성이 있는 비선형계인 식 (1)을 대역적으로 점근 안정화할 수 있음을 알 수 있다.

4. 수치해석

여기서는 3장에서 제안한 제어법칙의 유효성을 수치예를 통하여 확인한다. 다음의 비매칭 불확실성을 가진 비선형계를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \mathbf{N}f(\mathbf{x}(t)) \tag{22} \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

여기서, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ 이고, $\mathbf{N}f(\mathbf{x}(t))$ 는 비매칭 불확실성(단, $\mathbf{N} = [1 \ 0]^T$, $|f(\mathbf{x}(t))| \leq |0.1x_1^2(t)|$)이다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \text{에 대한 Lyapunov 함수를} \\ V(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \tag{23} \end{aligned}$$

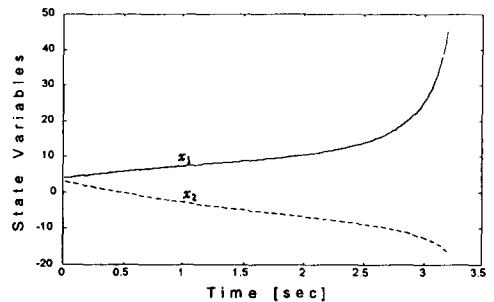


Fig. 2 State variables in case of control law, $u(t) = 0$

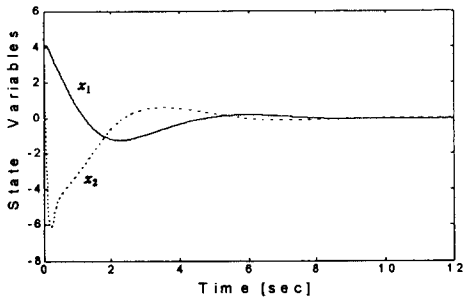


Fig. 3(a) State variables in case of control law, $u(t)$ (=Eq. (10))

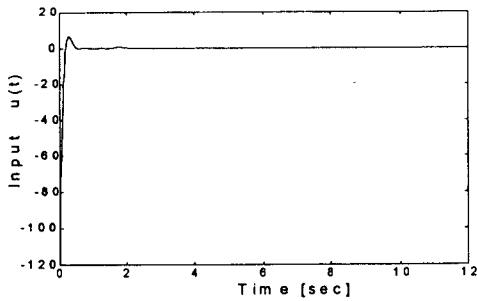


Fig. 3(b) Control law, $u(t)$ (=Eq. (10))

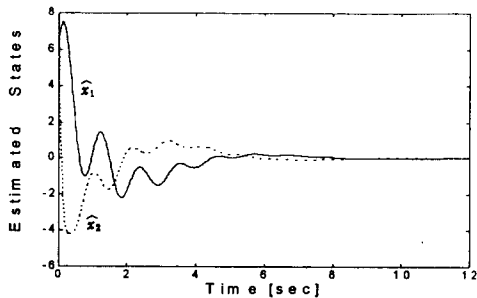


Fig. 3(c) Estimated state variables in case of new control law, $v(t)$

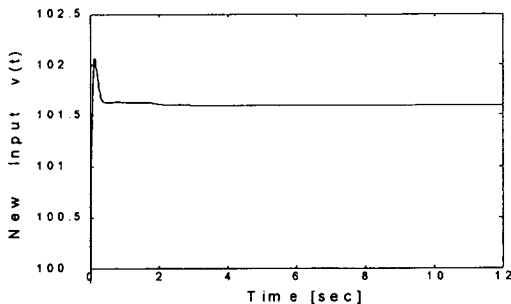


Fig. 3(d) New control law, $v(t)$

로 선택하고, $\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}<0$ ($\mathbf{x}(t)\neq\mathbf{0}$)이 만족되는 정칙행렬중에서 임의로 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 를 취하고

$$\begin{aligned} &|\mathbf{x}(t)^T\mathbf{BPNf}(\mathbf{x}(t))|+\|0.1\mathbf{x}(t)\| \\ &\leq\|\mathbf{x}(t)^T\mathbf{BP}\|\cdot\|0.1\mathbf{x}(t)^T\|^2+\|0.1\mathbf{x}(t)^T\|=\eta(\mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

로 하면 (가정 1)로부터 (가정 5)가 만족되어지는 것을 알 수 있고, $\text{rank}\{n+r\}=3$ 이므로 (가정 6)도 만족되어지는 것을 알 수 있다.

수치해석 결과는 다음과 같다. 초기치를 $\mathbf{x}(0)=[4 \ 3]^T$ 로 하고, 제어법칙을 $u(t)=0$ 로 한 경우를 Fig. 2에 나타내었다. 그림으로부터 계가 발산함을 알 수 있다. 이것에 비하여 제어법칙 식 (10)과 식 (11)로 되어진 제어법칙 $u(t)=u_1(t)$ 를 입력한 경우의 결과는 Fig. 3에 나타내었다. 여기에서, $\mathbf{L}_1=[2 \ 2]^T$, $L_2=30$, $v(0)=10$, $\hat{x}_1(0)=6$, $\hat{x}_2(0)=8$ 이다. Fig. 3(a)는 상태 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 를 나타내며, Fig. 3(b)는 입력 $u(t)$ 를, Fig. 3(c)는 상태추정치 $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$ 를, Fig. 3(d)는 새로운 상태변수 $v(t)$ 를 나타낸다. 그림으로부터 $\mathbf{x}(t)$ 가 $\mathbf{0}$ 에 수렴하는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 비매칭 불확실성을 가진 비선형계를 비선형 동적 보상기와 비례-적분관측기를 이용하여 출력피드백에 의한 제어법칙을 설계하고, 계를 대역적으로 점근안정화가 가능한 것을 보임으로써, 비선형 동적 제어법칙을 이용한 경우에는 관측기의 출력을 이용하여 페루-프계의 안정성을 확보함이 가능한 것을 증명하였다. 여기에서는, 공칭계가 선형계이지만, 관측출력을 얻는 것이 가능하다면 비선형계의 경우에도 동일한 결과가 얻어질 것이 예측되어진다.

참고문헌

- (1) Kokotovic, P. V. and Sussman, H. J., 1989, "A Positive Real Condition for Global Stabilization of Nonlinear System," *Sys. and Contr. Lett.*, No. 13, pp. 125~133.
- (2) Byrnes, C. I., Isidori, A. and Willems, I. C., 1991, "Passivity, Feedback Equivalence and the Global Stabilization of Minimum Phase Non-

- linear Systems," *IEEE AC-36*, pp. 1218~1240.
- (3) Hujiberts, H. J. C. and Nijimeijer, H., 1992, "Dynamic Disturbance Decoupling for Nonlinear Systems," *SIAM J. Contr. and Optim.*, Vol. 30, No. 2, pp. 336~349.
- (4) Nijimeijer, H. and Van der Schaft, 1990, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Spriger Verlag.
- (5) Gutmann, S., 1979, "Uncertain Dynamical Systems-A Lyapunov Min-Max Approach," *IEEE Trans. AC-24*, pp. 437~443.
- (6) Corless, M. J. and Leitmann, G., 1981, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Trans., AC-26*, pp. 1139~1144.
- (7) Chen, Y. H. and Leitmann, G., 1987, "Robustness of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions," *Int. J. Control*, Vol. 45, pp. 1527~1542.
- (8) Qu, Z., 1992, "Global Stabilization of Nonlinear Systems with a Class of Unmatched Uncertainties," *Sys. and Contr. Lett.*, Vol. 18, pp. 301~307.
- (9) 成烈完, 柴田, 1994, "マッチング条件のない不確かさを持つ非線形系のロバスト安定化," システム制御情報學會研究発表講演會, pp. 613~614.
- (10) 成烈完, 柴田, 1995, "非線形動的補償器による非マッチング不確かさを持つ非線形系の大域的漸近安定化," 計測自動制御學會論文集, 第31卷, pp. 1573~1578.
- (11) Marino, R. and Tomei, "Observer-based Adaptive Stabilization for a Class of Nonlinear Systems," *Automatica*, Vol. 28, pp. 787~793.
- (12) Soffker, D. and Yu, T. J., 1994, "Design of Proportional-Integral Observer for Nonlinear Systems," *Proc. of 1st ACC*, pp. 637~640.
- (13) Slotine, J. J. and Li, W., 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall.