

〈논 문〉

## 비선형 시변계의 잔류진동감소를 위한 입력 설계

방정훈\* · 박윤식\*\*

(1996년 10월 18일 접수)

### Input Design to Reduce Residual Vibration for a Nonlinear Time-varying System

Jeong-Hun Pang and Youn-Sik Park

**Key Words :** Residual Vibration(잔류진동), Nominal Input(공칭입력), Control Input(제어입력)

#### Abstract

A method of obtaining a control input to reduce residual vibration was developed for nonlinear time-varying systems moving along pre-determined two dimensional paths. First, the nonlinear system equation was solved with nominal input then linearized by nominal response which is defined at equilibrium point. Next an additional input can be obtained by solving the linearized equation that should satisfied the required boundary conditions. Residual vibration reduction was experimentally verified by applying the control input, which is sum of nominal and additional input, to a moving pendulum whose length is varying with time.

#### 1. 서론

고정도(high precision)의 위치제어가 필요한 기계 시스템은 공작기기 및 측정기기 등 각종 산업용 분야에서 널리 사용되어지고 있다. 이러한 시스템의 효율적인 사용을 위해서는 시스템의 운전 속도를 증대시킬 필요가 있으며, 이때 동작이 멈춘 후 시스템은 원하는 위치에 완전정지해야 한다. 그러나 운전속도가 빨라지게 되면 기계 구조물의 경우 잔류진동이 남아 있기 때문에 원하는 위치에 도달한 이후에도 다음 작업을 위해서는 일정 감쇠시간(settling time)이 필요하게 되며, 이것이 고속으로 시스템을 운영하는데 장애가 된다. 이는 구조물의 유연성에 기인하며, 이를 보완하기 위해서는 구조 강성을 높이는 방법 등이 필요한데 비용 적인 측면에서 그것은 바람직하지 못한 경우가 많다.

선형 시스템의 잔류진동을 감소시키기 위한 연구들은 많이 알려져 있으며, 대표적으로는 시스템에 감쇠를 주거나 혹은 운전속도를 제어하는 방법이 있다. 시스템에 가해지는 입력설계에 대한 연구들을 정리해 보면 다음과 같다. Aspinwall<sup>(1)</sup>은 정현함수의 하모닉 성분을 입력으로 사용할 때 정현함수의 계수를 일정 주파수 대역에서의 주파수 성분을 최소화하도록 함으로써 잔류진동을 감소하고자 하였다. Meckl과 Seering<sup>(2)</sup>은 램프함수와 정현함수의 조합을 이용한 속도 궤적을 구하였다. 이 때 모든 함수의 하모닉 성분들이 사용되었을 경우의 입력은 고유진동수를 가진하지 않는 최적 시간 입력으로 생각할 수 있다. Sakaar와 Tucker<sup>(3)</sup>는 단일링크 시스템에 대하여 제어입력에 의한 계의 응답을 적절한 전달 함수를 이용하여 표현하였다. Clhoub<sup>(4)</sup>는 로봇팔의 진동을 줄이기 위하여 관심부위에서의 가속도 피드백제어기를 설계하여 사용하였으며, Jayasuriya와 Choura<sup>(5)</sup>는 개회로제어를 사용하여 보의 진동을 감소시켰다. 그들은 가

\*삼성전자(주) 기술총괄

\*\*회원, 한국과학기술원 기계공학과

진기를 이용하여 움직이고 있는 보의 고유진동수에 해당하는 주파수 성분을 제거하였다. Bhat와 Miu<sup>(6)</sup>는 유연한 구조물의 잔류진동 제거를 위한 필요충분조건을 구하였는데 이는 제어입력의 라플라스 변환이 시스템의 고유진동수에 해당하는 주파수에서 영이 되는 것이다. 이들은 보를 일정위치로 이동시키기 위한 입력으로써 램프함수와 정현함수를 사용하였는데 원하는 변위성분은 램프함수로 주었고, 이 때 발생하는 잔류진동은 정현함수를 이용하여 제거하였다. Singer<sup>(7)</sup>는 충격열(impulse sequence)을 이용하였는데, 이는 시스템의 고유주기에 해당하는 시간간격으로 연속적인 충격을 가하여 원하는 시간에서의 진동을 제거하고자 하였다. 박<sup>(8)</sup>은 유연관절을 갖는 로봇에 대하여 적절한 입력설계에 의해 잔류진동을 감소시키고자 하였다. 또 다른 방법으로써 적절한 경로설계에 의하여 매니플레이터 첨단부의 잔류진동을 감소하고자 하는 연구 등이 있다.<sup>(9)</sup>

위에서 언급한 문헌들은 대부분 선형 시불변계(linear time invariant system)로서 시스템의 변수가 일정하거나 변화가 작기 때문에 이를 무시할 수 있는 경우였다. 최근에 Woo<sup>(10)</sup>는 시변유연계(time varying flexible structure)에 대하여 잔류진동을 없애기 위하여서는 모든 계의 극점에 대하여 잔류진동벡터가 영이 되어야 하며, 이를 점대점운동(point to point motion)에 적용하였다. 시불변계인 경우에 있어서는 제어입력을 주파수 분석할 경우 시스템의 고유진동수 성분이 없게 되면 그 성분을 가진하지 않게 되어 잔류진동이 발생하지 않지만, 시변계인 경우는 시스템의 고유진동수가 시간에 따라 변하기 때문에 주파수 영역에서의 해석이 아무런 정보도 주지 못한다는 사실에 주의할 필요가 있다.

본 연구에서는 이차원 평면운동을 하는 시변계의 잔류진동감소를 위한 제어입력을 구하고, 이를 실제 시스템에 적용하여 진동감소효과를 보이고자 한다. 대상 시스템은 줄의 길이가 변하는 진자로 구성되어 고유진동수가 시간에 따라 변하도록 하였다. 대부분의 위치제어 시스템의 특성과 유사하게 본 연구에서 사용하는 시스템도 일정 시간동안 정해진 운동경로를 따라 이동하게 되며, 이동이 멈춘 후에도 잔류진동을 계속하게 된다. 따라서 시스템의 운동은 정해진 운동경로를 따라 이동하는 매우 큰 강제운동과 계의 유연성에 의하여 수반되는 상

대적으로 작은 유연한 운동으로 구성하였다.

## 2. 시변계의 특성

### 2.1 입력 및 응답 특성

외부로부터의 입력이 가해지는 시스템의 상태방정식은 다음식과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

$A(t)$ ,  $B(t)$ 는 시스템행렬이며,  $u(t)$ 는 계에 주어진 입력이다. 시불변계인 경우에 대해서는 시스템행렬이 시간에 관계없이 일정하기 때문에 계의 고유진동수와 고유벡터가 일정하여 모달좌표계에서 비연성(decoupled)된 수식으로 나타낼 수 있으며, 이에 따라 계의 응답특성도 비교적 쉽게 구할 수 있다. 그러나 시변계인 경우는 일반적으로 위와 같이 모달좌표계에서 간단한 형태로 표시되지 않는다.

식 (1)의 상태방정식에 대한 시간영역에서의 응답은 식(2)로 표현할 수 있다.<sup>(8,9)</sup>

$$x(t_f) = \Phi(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \quad (2)$$

여기에서,  $\Phi(t_f, t_0)$ 는 상태전이행렬(state transition matrix)로 시불변계인 경우는, 이를 지수함수로 간단히 나타낼 수 있으나 시변계인 경우에는 특정한 함수로 나타낼 수 없기 때문에 각 시간간격으로 상태전이행렬을 구하여 계산한다. 상태전이행렬은 다음 식 (3)을 풀어서 얻을 수 있다.

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (3)$$

식 (2)는 시변계의 입력에 대한 응답특성을 시간영역에서 나타낸 것으로, 시간  $t=t_f$ 에서의 응답  $x(t_f)$ 는 초기 조건  $x(t_0)$  및 입력  $u(t)$ 와 상태전이행렬의 합성적 성분(convolution integral)으로 표현됨을 알 수 있다.

### 2.2 제어입력의 결정

초기 조건  $x(t_0)$ 를 일정시간 동안에 원하는 응답  $x(t_f)$ 로 변환시킬 수 있는 입력이 존재할 조건은 다음 식 (4)로 표현되는 가제어성 그라미안(controllability grammian)이 특이행렬(singular matrix)이 아닌 경우로서, 즉 이의 역행렬이 존재하면 된다.<sup>(9)</sup>

$$G(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \cdot B^T(\tau) \Phi^{-T}(\tau, t_0) d\tau \quad (4)$$

가제어성 그라미안의 역행렬이 존재할 경우 시스템은 제어 가능하다고 하며, 초기 조건  $x(t_0)$ 를 일정시간  $(t_f - t_0)$  동안에 원하는 응답  $x(t_f)$ 로 변경시킬 수 있는 입력  $u(t)$ 를 구할 수 있다. 식 (2)의 양변에  $\Phi^{-1}(t_f, t_0)$ 를 곱하면, 다음 식 (5)를 얻을 수 있다.

$$\Phi^{-1}(t_f, t_0)x(t_f) = x(t_0) \quad (5)$$

시불변계인 경우에는 입력  $u(t)$ 를 계의 고유진동수의 선형조합으로 대치하면, 다음 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos \Lambda_i t + b_i \sin \Lambda_i t) \quad (6)$$

이때 입력의 라플라스 변환이 계의 고유진동수에 해당하는 주파수에서 0이 되도록 하는 기여도 성분  $a_i, b_i$ 를 구할 수 있다.<sup>(6)</sup> 그러나 시변계인 경우 고유행렬의 시간변화율을 무시할 수 없을 때에는 고유진동수의 개념이 모호해지기 때문에는 입력  $u(t)$ 를 위와 같이 나타낼 수 없게 되므로 다음 식 (7)과 같이  $N$ 차의 다항식 함수로 가정하여 계산한다.

$$u(t) = \Psi(t) C \\ = \sum_{i=0}^N t^i c_i = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^N] \cdot [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_N]^T \quad (7)$$

식 (7)과 같이 입력  $u(t)$ 를  $N$ 차의 다항식 함수와 이에 대한 기여도 성분으로 나타내고, 이를 식 (5)에 대입하면 다음 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$\Phi^{-1}(t_f, t_0)x(t_f) \\ = x(t_0) + \left[ \int_{t_0}^{t_f} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \Psi(\tau) d\tau \right] C \quad (8)$$

따라서 기여도 성분을 나타내는 미지벡터  $C$ 는 다음 식 (9)와 같이 구할 수 있다.

$$C = \left[ \int_{t_0}^{t_f} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \Psi(\tau) d\tau \right]^{-1} \cdot \left[ \Phi^{-1}(t_f, t_0)x(t_f) - x(t_0) \right] \quad (9)$$

위에서 나타낸 바와 같이 시변계의 경우 모달 영역에서의 비연성된 수식을 얻을 수 없을 경우에 제어 입력을 다항식 함수의 선형조합으로 가정하여

상태천이행렬과 시스템행렬을 이용하여 구할 수 있다.

### 3. 비선형계에 대한 입력의 결정

#### 3.1 잔류진동감소를 위한 입력

일반적인 비선형계의 상태방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (10)$$

계가 강제인 경우로 가정한 경우의 공칭입력  $u_n(t)$ 에 의하여 공칭응답  $x_n(t)$ 가 얻어졌다면 이로부터 약간의 차이가 발생하는  $x(t), u(t)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Delta u(t) = u(t) - u_n(t) \quad (11)$$

$$\Delta x(t) = x(t) - x_n(t) \quad (12)$$

식 (10)을 테일러시리즈를 이용하여 전개하면 다음 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_n(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(x_n(t) + \Delta x(t), u_n(t) + \Delta u(t), t) \\ = f(x_n(t), u_n(t), t) \\ + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_n \Delta x(t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_n \Delta u(t) \quad (13)$$

식 (13)에서  $[ ]_n$ 은 공칭응답에서의 미분을 나타낸다. 공칭응답은 식 (10)을 만족하고,  $\Delta x(t), \Delta u(t)$ 가 충분히 작을 경우에는 테일러시리즈의 고차항은 무시할 수 있으므로, 다음 식 (14)와 같은 선형운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\Delta \dot{x}(t) \cong \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_n \Delta x(t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_n \Delta u(t) \quad (14)$$

식 (14)는 식 (10)의 비선형방정식에 공칭입력을 가했을 때 얻어지는 공칭응답으로부터 얻은 선형방정식이다. 여기서, 공칭입력이라는 것은 계를 완전강체로 고려한 경우로서 일정한 시간에 정해진 운동경로를 따라 점대점운동을 하는데 필요한 입력이다. 따라서 공칭입력만이 가해질 경우 시스템은 완전강체가 아니기 때문에 입력이 가해진 시간 이후에도 잔류진동이 계속 발생하게 되는데, 이를 제거(혹은 감소)하기 위해서는 공칭입력 이외의 추가적인 입력이 필요하다. 이러한 추가입력을 공칭입력에 더하여 얻은 제어입력은, 주어진 시간동안 계

에 작용하여 정해진 운동경로를 따라 이동하여야 하며 점대점운동이 끝난후에 발생하는 잔류진동을 감소시킬 수 있어야 한다. 따라서 공칭입력은 계의 강제운동을 발생시키기 위해 사용되며, 추가입력은 계의 유연성에 의하여 유발되는 잔류 진동을 제거하기 위하여 더하여진다고 할 수 있다. 식 (14)는 이러한 계의 잔류진동을 제거하기 위한 추가입력을 구하는데 필요한 운동방정식으로, 추가입력  $\Delta u(t)$ 는 다음의 경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\Delta x(t_0) = x(t_0) - x_n(t_0) \quad (15)$$

$$\Delta x(t_f) = x(t_f) - x_n(t_f) \quad (16)$$

$$\Delta \dot{x}(t_0) = \dot{x}(t_0) - \dot{x}_n(t_0) \quad (17)$$

$$\Delta \dot{x}(t_f) = \dot{x}(t_f) - \dot{x}_n(t_f) \quad (18)$$

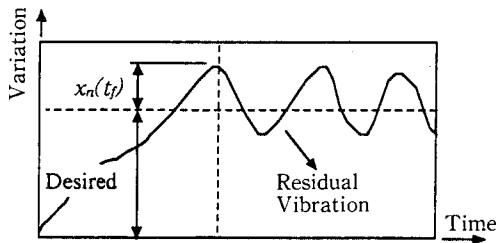
식 (15)~(18)에서 추가입력  $\Delta u(t)$ 에 의한 계의 응답  $\Delta x(t)$ ,  $\Delta \dot{x}(t)$ 는 입력이 가해지는 경계점인  $t_0$ 와  $t_f$ 에서 원하는 응답  $x(t)$ 와 공칭응답  $x_n(t)$ 의

차이만큼을 보상해 주어야 함을 알 수 있다. 다음 Fig. 1에 공칭입력에 의한 응답 및 추가 입력에 의하여 얻어져야 하는 계의 응답특성의 개념을 나타내었다. 만약에 입력이 가해지는 시간동안 이후에는 계의 잔류진동이 발생하지 않코자 한다면 시간  $t=t_f$ 에서 계의 응답은 0이 되어야 하므로 식 (16)과 (18)은 다음 식 (19) 및 (20)과 같이 간단히 표현할 수 있다.

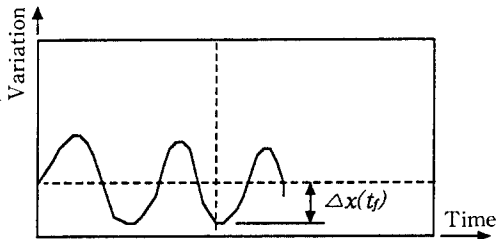
$$\Delta x(t_f) = -x_n(t_f) \quad (19)$$

$$\Delta \dot{x}(t_f) = -\dot{x}_n(t_f) \quad (20)$$

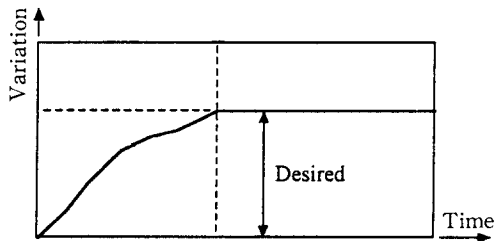
이상에서 본 바와 같이 비선형계의 잔류진동을 제거하기 위해서는 공칭응답에 대하여 식 (14)와 같이 선형화된 운동방정식을 얻어야 하며, 이 방정식을 이용하여 식 (19)~(20)의 경계조건을 만족하는 추가입력을 구하여야 한다. 이는 식 (7)의 입력에 의하여 일정시간 사이에 초기 상태를 원하는 상태로 변경할 수 있는 입력을 구하는 것이다.



(a) Response by nominal input



(b) Response by additional input



(c) Response by controlled input

Fig. 1 Concept of response characteristics by nominal, additional and controlled input

### 3.2 추가입력의 개선

공칭입력에 3.1에서 구한 추가입력을 더한 제어 입력이 가해졌을 때, 시간  $t_f$ 에서의 응답은 식 (19) 및 식 (20)으로부터 이상적으로 다음 식 (21), (22)와 같이 0이 되어야 한다.

$$\Delta x(t_f) + x_n(t_f) = 0 \quad (21)$$

$$\Delta \dot{x}(t_f) + \dot{x}_n(t_f) = 0 \quad (22)$$

위의 응답특성은 식 (10)의 비선형방정식과 식 (14)의 선형방정식을 각각 풀어서 얻은 응답특성을 산술적으로 더한 결과이다. 그러나 실제로는 공칭 입력과 추가입력이 동시에 식 (10)의 비선형방정식

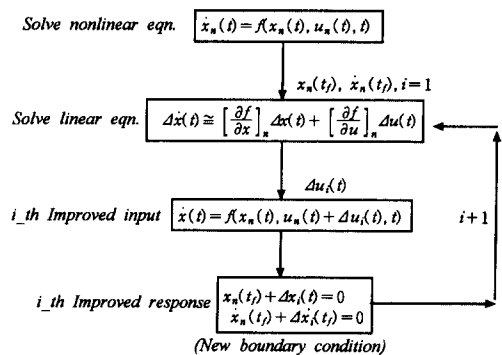


Fig. 2 Block diagram to obtain improved additional input

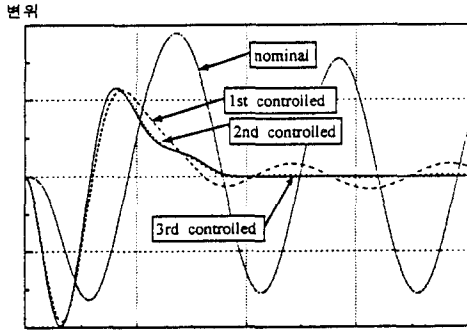


Fig. 3 Response by the improved control input

으로 표현되는 계에 작용하기 때문에 시간  $t_r$ 에서의 응답은 위의 두식을 더한 것과는 차이가 발생하게 된다. 따라서  $u_n(t) + \Delta u(t)$ 의 제어입력이 가해졌을 경우의 응답은 공칭입력만이 가해진 경우의 응답보다 작은 양이지만 잔류진동은 계속 남아 있게 된다. 이를 보완하기 위해서는 이때 얻어진 응답을 새로운 경계조건으로 사용하여 개선된 추가입력을 구하여야 하는데, 이 개념은 다음의 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다. Fig. 3은 개선된 제어 입력(공칭입력+개선된 추가입력)에 의한 잔류진동을 나타낸 것으로 개선회수가 증가할수록 계의 잔류진동이 점차 감소함을 알 수 있다.

#### 4. 운동방정식

##### 4.1 좌표계 설정

본 시스템에서는 반지름이 일정한 반원호를 따라 움직이는 장치를 만들었으며, 진자의 길이는 이의 이동거리에 따라 변할 수 있도록 구성하였다. 2차원의 운동경로를 따라 움직이는 시변계를 Fig. 4의 벡터선도를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. 초기 진자의 선단위치를 관성좌표계 OXY의 원점으로, 시간  $t$ 에서의 위치를 이동좌표계 oxy의 원점으로 설정하고, 진자의 질량을 집중질량으로 가정하여 라그랑지 운동방정식을 세운다. 임의의 시간  $t$ 에서 진자선단의 위치벡터  $\vec{r}(t)$ 는 관성좌표계의 원점으로부터 이동좌표계의 원점까지의 변위 벡터이므로 주어진 운동경로 및 속도선도에 의하여 결정될 수 있으며, 진자의 질점의 위치벡터는 벡터  $\vec{r}(t)$ 와 시간  $t$ 에서의 진자의 길이  $l(t)$ 에 의하여 표현가능하다. 따라서 초기 시간에 관성좌표계의 원점에서 정의된 질점의 위치로부터 시간  $t$ 에서의

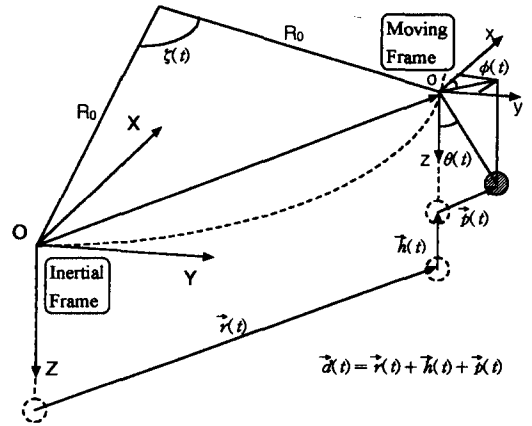


Fig. 4 Vector diagram

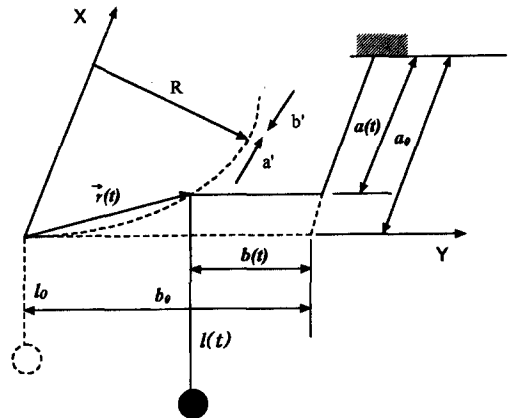


Fig. 5 Change of pendulum length

진자질점의 변위벡터  $\vec{d}$ 는 다음 식 (23)으로 나타낼 수 있으며, 각각의 벡터 성분은 아래와 같다.

$$\vec{d}(t) = \vec{r}(t) + \vec{h}(t) + \vec{b}(t) \quad (23)$$

$$\vec{r}(t) = r_x(t) \vec{i} + r_y(t) \vec{j} \quad (24)$$

$$\vec{h}(t) = -(l_0 - l_z(t)) \vec{k} \quad (25)$$

$$\vec{b}(t) = l_x(t) \vec{i} + l_y(t) \vec{j} - [l_z(t) - \sqrt{l^2(t) - l_x^2(t) - l_y^2(t)}] \vec{k} \quad (26)$$

여기서,  $l_0$ 는 시간  $t=t_0$ 에서의 진자의 길이,  $r_x(t)$ ,  $r_y(t)$ 는 시간  $t$ 에서 관성좌표계의 원점으로부터 진자 선단까지의  $x$  및  $y$ 방향 성분이며,  $l_x(t)$ ,  $l_y(t)$ ,  $l_z(t)$ 는 각각 이동좌표계로부터 진자질점까지의  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 방향의 변위성분이다. 따라서 변위벡터  $\vec{d}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{d}(t) = [r_x(t) + l_x(t)] \vec{i} + [r_y(t) + l_y(t)] \vec{j} + [-l_0 + \sqrt{l^2(t) - l_x^2(t) - l_y^2(t)}] \vec{k} \quad (27)$$

식 (23) ~ (27)에서 알 수 있듯이 미리 정의된 입력  $\vec{r}(t)$ 와 시간  $t$ 에서의 진자의 길이  $l(t)$ 에 의하여 각각의 벡터를 정의할 수 있다. 본 실험에서는 진자를 반지름이 일정한 원호의 궤적을 따라 운동하도록 하였으며, 이때의 진자의 길이변화를 Fig. 5를 참조하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. 진자의 길이는 헤드로부터 질점까지이며, 전체 줄의 길이는 항상 일정하기 때문에 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$l_0 + b_0 + a_0 = l(t) + b(t) + a(t) \quad (28)$$

식 (28)은 헤드가  $a$ 방향으로 움직일 경우에 해당하는 것으로 진자의 길이는 증가하게 된다. 따라서 임의의 시간  $t$ 에서 진자의 길이  $l(t)$ 는 다음 식과 같다.

$$l(t) = l_0 + r_x(t) + r_y(t) \quad (29)$$

헤드가  $b$ 방향으로 움직일 경우, 반대로 진자의 길이는 감소하게 되며, 식 (30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$l(t) = l_0 - (r_x(t) + r_y(t)) \quad (30)$$

#### 4.2 운동방정식과 공칭응답에 대한 고려

이동좌표계의 원점으로부터 진자질점까지의  $x$  및  $y$ 방향 성분을 일반 좌표  $l_x(t)$ ,  $l_y(t)$ 로 설정하면 식 (31), (32)의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{l}_x(t) = & [-Q(t)R(t) + S(t)l_x(t)l_y(t) \\ & - Q(t)l_y^2(t) + \dot{l}^2(t)l_x(t)m \\ & - l_x(t)\dot{l}_x^2(t)m - l_x(t)\dot{l}_y^2(t)m \\ & + l(t)l_x(t)\ddot{l}(t)m - R(t)m\ddot{r}_x(t) \\ & - l_y^2(t)m\ddot{r}_y(t) + l_x(t)l_y(t)m\ddot{r}_y(t)] \\ & / (R(t) + l_x^2(t) + l_y^2(t))m \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \ddot{l}_y = & -[R(t)S(t) + S(t)l_x^2(t) \\ & - Q(t)l_x(t)l_y(t) + \dot{l}^2(t)l_y(t)m \\ & - l_y(t)\dot{l}_x^2(t)m - l_x(t)\dot{l}_y^2(t)m \\ & - l(t)l_x(t)\ddot{l}(t)m - l_x(t)l_y(t)m\ddot{r}_x(t) \\ & + R(t)m\ddot{r}_y(t) + l_x^2(t)m\ddot{r}_y(t)] \\ & / (R(t) + l_x^2(t) + l_y^2(t))m \end{aligned} \quad (32)$$

식 (31), (32)에서  $Q(t)$ ,  $R(t)$ ,  $S(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q(t) = & gml_x(t)/\sqrt{R(t)} + ml_x(t)l(t)\dot{l}(t) \\ & - l_x(t)\dot{l}_x(t) - l_y(t)\dot{l}_y(t)]^2/R^2(t) \end{aligned} \quad (33)$$

$$R(t) = l^2(t) - l_x^2(t) - l_y^2(t) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} S(t) = & gml_y(t)/\sqrt{R(t)} + ml_y(t)[l(t)\dot{l}(t) \\ & - l_x(t)\dot{l}_x(t) - l_y(t)\dot{l}_y(t)]^2/R^2(t) \end{aligned} \quad (35)$$

이상에서 검토한 바와 같이 시간  $t$ 에서의 헤드의 위치를 이동좌표계의 원점으로 나타낸 경우, 이 원점으로부터 진자질점까지의  $x$  및  $y$ 방향의 변위를 각각 일반 좌표  $l_x(t)$ ,  $l_y(t)$ 로 설정함으로써 시스템의 운동방정식을 구할 수 있다.

식 (31) ~ (35)로 표현되는 계의 비선형 운동방정식은 진자의 강제운동  $\vec{r}(t)$ 에 의해 발생하는 진자의 잔류진동  $l_x(t)$ ,  $l_y(t)$ 를 나타낸다. 위의 식들을 이용하여 공칭입력에 의한 공칭응답을 구할 수 있으며, 이로부터 식 (14)의 선형방정식을 유도하고 식 (19), (20)을 만족시키는 추가입력을 구할 수 있다.

계의 운동방정식은 Fig. 4에 보인 바와 같이 이동좌표계의 원점  $oxy$ 로부터 진자질점까지의 회전 각  $\theta(t)$  및  $\phi(t)$ 로 표현되는 구좌표계를 일반 좌표로 설정하면, 다음 식 (36) 및 (37)과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} l(t)[\ddot{\theta}(t) - \dot{\phi}^2(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t)] \\ + 2\dot{l}(t)\dot{\theta}(t) + \ddot{r}_x(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t) \\ + \ddot{r}_y(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t) + g\sin\theta(t) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} l(t)\ddot{\phi}(t)\sin\theta(t) + 2\dot{l}(t)\dot{\theta}(t)\dot{\phi}(t)\cos\theta(t) \\ + 2\dot{l}(t)\dot{\phi}(t)\sin\theta(t) - \ddot{r}_x(t)\sin\phi(t) \\ + \ddot{r}_y(t)\cos\phi(t) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

식 (31), (32)와 (36), (37)은 동일한 시스템에 대하여 서로 다른 일반 좌표를 사용한 경우의 운동방정식으로, 헤드의 움직임으로 표현되는 입력  $\ddot{r}_x(t)$ ,  $\ddot{r}_y(t)$ 에 대하여 서로 일치하는 응답특성을 나타낸다. 그런데 본 시스템의 경우에는  $l_x(t)$ ,  $l_y(t)$ 로 표현되는 병진좌표계를 사용하여야만 하는데, 이는 비록 구좌표계를 사용하면 운동방정식은 간단하게 표현할 수 있지만 임의의 평형상태를 기준으로 하는 공칭운동을 정의할 수 없는 단점이 있기 때문이다. 이는 비선형계인 경우, 시스템의 운동방정식은 공칭입력에 의한 공칭응답을 구하는데 필요할 뿐만 아니라, 잔류진동을 제거하기 위한 추가입력을 구하기 위해서는 공칭응답으로부터의 선형화된 운동방정식이 필요하기 때문이다.

다음 Fig. 6에 공칭응답을 정의하기 위한 좌표축 설정의 예를 나타내었다. Fig. 6(a)의 1차원 운동을 하는 진자의 경우에는  $\theta=0$ 을 기준으로,  $\theta(t)$

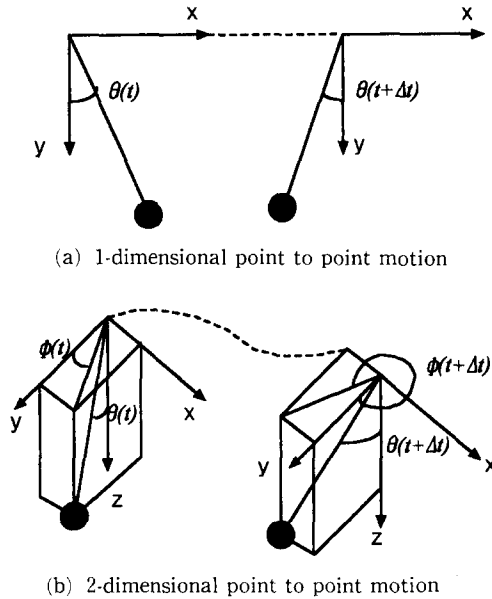


Fig. 6 Coordinate selection for nominal motion definition

및  $\theta(t+\Delta t)$ 의 움직임을 정의할 수 있으나, Fig. 6(b)의 2차원 운동을 하는 경우에는 구좌표계를 일반좌표로 설정하였다면 시간  $\Delta t$  사이에 진자의 변화가 미소하다 할지라도 그림과 같이  $\phi$ 의 변화량은 매우 크게 발생하기 때문에  $\phi=0$ 을 평형 상태라고 말할 수 없으며, 따라서 어떠한 값을 기준으로 한 공칭운동을 정의할 수 없다. 그러나 병진 좌표계의 경우에는  $x=0, y=0, z=0$ 의 평형상태를 기준으로 한 공칭운동을 정의할 수 있기 때문에 운동방정식이 복잡해지는 단점에도 불구하고 선형 운동방정식을 얻기 위해서는 이 좌표계를 사용하여 시스템을 해석하였다.

### 5. 실험

#### 5.1 실험장치의 구성

2차원 평면운동을 하는 진자의 잔류진동감소를 실험적으로 구현하기 위하여 Fig. 7과 같은 실험장치를 구성하였다. 헤드를 2차원 평면상에서 움직일 수 있도록 하기 위하여 2개의 구동모터를 사용하였으며, 진자의 길이는 헤드의 움직임에 따라 변할 수 있도록 하여 시스템은 시간에 따라 변하는 시변유연계를 구현하였다. 제어 시변효과에 의한 제어 입력 및 잔류진동의 변화를 살펴보고자 진자의

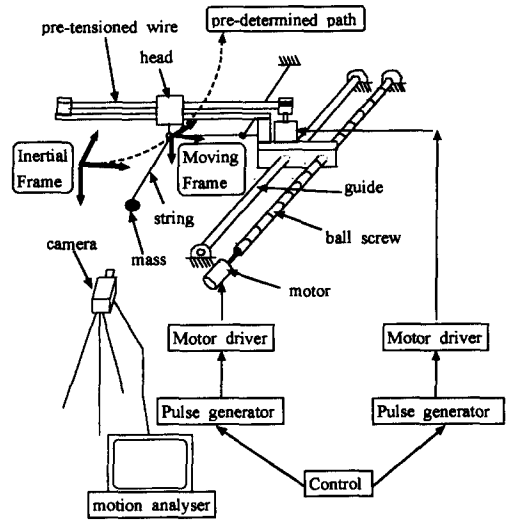


Fig. 7 Experimental set up

길이는 두방향 운동 모두에 의존하여 변할 수 있도록 장치를 구성하였다. 본 실험에서는 공칭입력에 의한 응답과, 공칭입력에 추가입력을 더한 제어입력에 의한 응답을 비교함으로써 잔류진동감소 효과를 구현하고자 하는데, 이를 위하여서는 원하는 입력을 정확하게 나타낼 수 있는 실험장치가 필요하다. 정해진 속도선도에 의하여 2차원 평면운동을 하기 위하여 헤드는 인장력이 가해진 줄에 의하여 모터와 연결되었으며, 또 다른 모터는 볼 스크루 및 선형 가이드에 의하여 가동부를 이송시킬 수 있도록 구성하였다.

헤드의 이동이 멈춘 후 발생하는 진자의 잔류진동 측정을 위해 고속촬영기를 사용하였으며, 이때의 분해능은 60 frame/sec로써 약 0.0166초의 간격으로 진자의 움직임을 측정하였다.

#### 5.2 공칭입력

실험은 헤드의 움직임을 위한 공칭입력을 반지름이 7.5 cm인 반원호를 2초 동안에 이동하도록 하여 진자의 길이가 증가후 감소하도록 하였다. 헤드는 관성좌표의 원점으로부터 출발하여 일정한 반지름을 따라 회전하기 때문에 헤드의 움직임을 회전 중심으로부터의 회전각  $\zeta_n(t)$ 를 이용하여 나타낼 수 있다. 본 실험에서의 공칭입력은 다항식 함수를 사용하였으며, 다음 식 (38)과 같다.

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(t_0) + \frac{10}{t_f^3} (\zeta_n(t_f) - \zeta_n(t_0)) t^3$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{15}{t_f^4}(\zeta_n(t_f) - \zeta_n(t_0))t^4 \\
 & + \frac{6}{t_f^5}(\zeta_n(t_f) - \zeta_n(t_0))t^5 \quad (38)
 \end{aligned}$$

여기에서  $\zeta_n(t_f)$ 는 총 회전각,  $t_f$ 는 입력작용 시간이다.  $\zeta_n(t)$ 에 의한 헤드의 위치를 식 (31), (32)의 운동방정식에 대입하기 위하여  $x$ ,  $y$ 방향으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{r}_n(t) = r_{xn}(t) \vec{i} + r_{yn}(t) \vec{j} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 r_{xn}(t) &= |\vec{r}_n(t)| \sin\left(\frac{\zeta_n(t)}{2}\right) \\
 &= 2R \sin^2\left(\frac{\zeta_n(t)}{2}\right) \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{yn}(t) &= |\vec{r}_n(t)| \cos\left(\frac{\zeta_n(t)}{2}\right) \\
 &= 2R \sin\left(\frac{\zeta_n(t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\zeta_n(t)}{2}\right) \quad (41)
 \end{aligned}$$

$$\dot{r}_{xn}(t) = R \sin \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n(t) \quad (42)$$

$$\dot{r}_{yn}(t) = R \cos \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n(t) \quad (43)$$

$$\ddot{r}_{xn}(t) = R(\cos \zeta_n(t) \ddot{\zeta}_n(t) - \sin \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n^2(t)) \quad (44)$$

$$\ddot{r}_{yn}(t) = R(-\sin \zeta_n(t) \ddot{\zeta}_n(t) + \cos \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n^2(t)) \quad (45)$$

### 5.3 추가입력의 결정

5.2에서 제시한 공칭입력  $\dot{r}_{xn}(t)$ ,  $\dot{r}_{yn}(t)$ 를 가하였을 때의 공칭응답 특성을 상태변수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t) \quad (46)$$

$$y(t) = [l_x(t) \dot{l}_x(t) l_y(t) \dot{l}_y(t)]^T \quad (47)$$

식 (46)을 3.1에서 제시한 바와 같이 공칭응답에 대하여 선형화하면 다음과 같다.

$$\Delta \dot{y}(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]_n \Delta y(t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_n \Delta u(t) \quad (48)$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial l_x} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial \dot{l}_x} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial l_y} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial \dot{l}_y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial l_x} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial \dot{l}_x} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial l_y} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial \dot{l}_y} \end{bmatrix}_n \quad (49)$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial r_x} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial \dot{r}_x} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial \ddot{r}_x} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial r_y} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial \dot{r}_y} & \frac{\partial \dot{l}_x}{\partial \ddot{r}_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial r_x} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial \dot{r}_x} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial \ddot{r}_x} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial r_y} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial \dot{r}_y} & \frac{\partial \dot{l}_y}{\partial \ddot{r}_y} \end{bmatrix}_n \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta u(t) &= [\Delta r_x(t) \Delta \dot{r}_x(t) \Delta \ddot{r}_x(t) \Delta r_y(t) \\
 & \quad \Delta \dot{r}_y(t) \Delta \ddot{r}_y(t)] \quad (51)
 \end{aligned}$$

헤드는 정해진 운동경로를 따라 움직여야 하기 때문에 식 (51)의 추가입력과 공칭입력의 합은 항상 식 (40)~(45)의 구속조건을 만족하여야 하므로, 이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\Delta r_x(t) = R \sin \zeta_n(t) \Delta \zeta(t) \quad (52)$$

$$\Delta r_y(t) = R \cos \zeta_n(t) \Delta \zeta(t) \quad (53)$$

$$\Delta \dot{r}_x(t) = R[\sin \zeta_n(t) \Delta \dot{\zeta}(t) + \cos \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n(t) \Delta \zeta(t)] \quad (54)$$

$$\Delta \dot{r}_y(t) = R[\cos \zeta_n(t) \Delta \dot{\zeta}(t) - \sin \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n(t) \Delta \zeta(t)] \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \ddot{r}_x(t) &= R\{[\sin \zeta_n(t) \Delta \ddot{\zeta}(t) + 2\cos \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n(t) \Delta \dot{\zeta}(t)] \\
 & \quad + \Delta \zeta[\cos \zeta_n(t) \ddot{\zeta}_n - \sin \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n^2(t)]\} \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \ddot{r}_y(t) &= R\{[\cos \zeta_n(t) \Delta \ddot{\zeta}(t) - 2\sin \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n(t) \Delta \dot{\zeta}(t)] \\
 & \quad - \Delta \zeta[\cos \zeta_n(t) \ddot{\zeta}_n^2 \\
 & \quad + \sin \zeta_n(t) \dot{\zeta}_n^2(t)]\} \quad (57)
 \end{aligned}$$

따라서 추가입력  $\Delta u(t)$ 는 운동경로의 회전반경 중심으로부터 정의되는 미소 회전각  $\Delta \zeta(t)$  및  $\Delta \dot{\zeta}(t)$ ,  $\Delta \ddot{\zeta}(t)$ 의 함수로 나타낼 수 있다. 따라서 공칭운동에 대하여 선형화한 식 (48)을 다시 나타내면

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{y}(t) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{n \times 4} \Delta y(t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{n \times 6} R \left[ G(\zeta_n(t), \right. \\
 & \quad \left. \dot{\zeta}_n(t), \ddot{\zeta}_n(t)) \right]_{6 \times 3} \begin{bmatrix} \Delta \zeta(t) \\ \Delta \dot{\zeta}(t) \\ \Delta \ddot{\zeta}(t) \end{bmatrix} \quad (58)
 \end{aligned}$$

식 (58)은 시스템의 잔류진동이 발생하지 않도록 하기 위한 추가입력을 구하는 선형방정식이다. 추가 입력은 다음 식 (59)의 5차 다항식 함수를 사용하였으며, 식 (60)~(64)의 조건을 만족시키도록 설계되어야 한다.

$$\Delta \ddot{\zeta}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 t^4 + a_6 t^5 \quad (59)$$

$$\Delta l_x(t_f) = -l_{xn}(t_f) \quad (60)$$

$$\Delta \dot{l}_x(t_f) = -\dot{l}_{xn}(t_f) \quad (61)$$

$$\Delta l_y(t_f) = -l_{yn}(t_f) \quad (62)$$

$$\Delta \dot{l}_y(t_f) = -\dot{l}_{yn}(t_f) \quad (63)$$

$$\Delta \zeta(t_f) = 0, \Delta \dot{\zeta}(t_f) = 0 \quad (64)$$

### 5.4 실험결과

Fig. 8에 진자의 길이 및 주파수의 변화를 Fig. 9



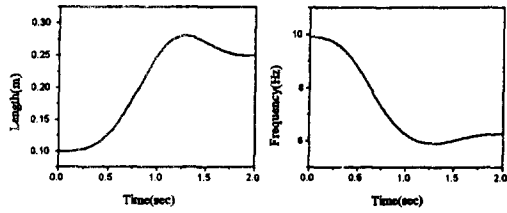
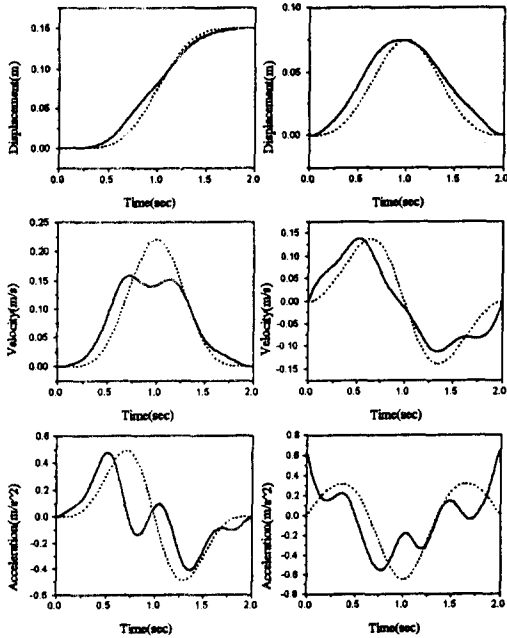


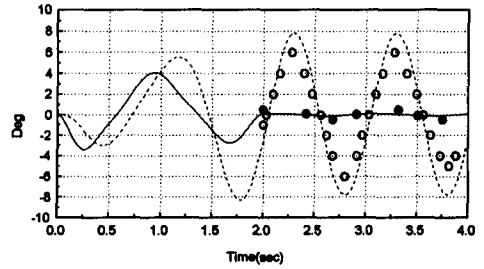
Fig. 8 Change of pendulum length and frequency



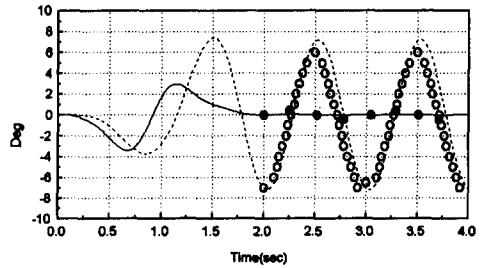
(a) x-direction (b) y-direction

Fig. 9 Input (nominal ---- vs controlled —)

에  $x$  및  $y$  방향의 입력을 나타내었다. 진자의 변위(잔류진동)는 이동좌표계의 원점으로부터  $x$  및  $y$  축을 중심으로 하는 회전각으로 Fig. 10에 나타내었다. 실험결과, 제어입력에 의해 계의 잔류진동이 현저히 감소함을 알 수 있다. 여기서 사용된 제어입력은 공칭입력과 Fig. 2의 방법에 의하여 구한 개선된 추가입력의 합으로써 세번째 iteration 결과를 사용하였다. Fig. 11은 iteration 횟수의 증가에 의한 개선된 추가입력의 효과를 나타낸 것이다. 개선된 추가입력을 적용한 제어입력에 대한 응답특성 결과 시뮬레이션 및 실험결과 iteration 횟수가 증가할수록 이에 의한 제어응답은 점차 안정화(잔류진동량 감소)하는 경향을 볼 수 있었으나 수렴성에 대한 이론적 검증은 확보하지 못한 상태이다. 3가지의 다른 개선된 추가 입력을 사용한 경우에 대해



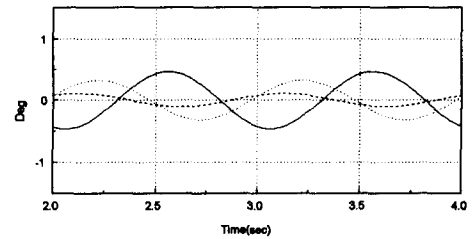
(a) Rotation about local x-axis



(b) Rotation about local y-axis

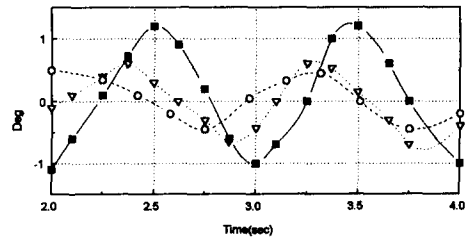
---Simulation (Nominal)    ○ Experiment (Nominal)  
—Simulation (Control)      ● Experiment (Control)

Fig. 10 Response of pendulum



(a) Simulation

— 1st improved  
--- 2nd improved  
-·- 3rd improved



(b) Experiment

■ 1st improved  
▽ 2nd improved  
○ 3rd improved

Fig. 11 Effect of improved additional input (Residual rotation about local x axis)

여 대체로 실험값과 수치해의 경향이 유사하게 나타남을 볼 수 있었다. 그러나 실험값이 수치해에 비하여 다소 높게 측정되는 이유는 추가입력에 의한 응답특성이 시간  $t=t_f$ 에서 식 (60)~(64)의 조건을 정확히 만족시켜 주지 못했기 때문이며 이는 실험에 기인한 각종 오차때문이라 생각된다.

## 6. 결 론

본 연구에서 얻을 수 있는 결론은 다음과 같다.

본 연구에서는 길이가 변하는 진자를 2차원 평면 상에서 주어진 경로를 따라 일정거리만큼 이동 시킨 경우에 발생하게 되는 진자의 잔류진동은 공칭 응답으로부터 선형화된 운동방정식에서 구한 추가입력을 공칭입력에 가하여 구한 제어입력에 의하여 감소시킬 수 있음을 수치해석 및 실험을 통하여 확인 하였다.

복잡한 비선형 시변유연계에 대하여 본 이론을 적용할 경우 유한요소법 등을 이용하여 계를 모델링한후 제안된 방법에 의하여 제어입력을 구할 수 있다. 그러나 개선된 추가입력을 구하기 위한 반복작업시 해의 수렴성 여부는 검증이 되어야 할 것이다.

## 참고문헌

- (1) Aspinwall, D. M., 1980, "Acceleration Profiles for Minimizing Residual Response," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 102, pp. 3~6
- (2) Meckl, P. H. and Seering, W. P., 1985, "Minimizing Residual Vibration for Point-to-Point Motion," *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 107, No. 4, pp. 378~382
- (3) Skaar, S. B. and Tucker, D., 1986, "Point Control of a One-Link Flexible Manipulator," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 23~27
- (4) Chalhoub, N. G. and Ulsoy, A. G., 1987, "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 109, pp. 299~309
- (5) Jayasuriya, S. and Choura, S., 1990, "Active Quenching of a Set of Pre-determined Vibratory Modes of a Beam by a Single Fixed Point Actuator," *International Journal of Control*, Vol. 51, No. 2, pp. 445~467
- (6) Bhat, S. P. and Miu, D. K., 1990, "Precise Point-to-Point Positioning Control of Flexible Structures," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, pp. 667~674
- (7) Singer, N. C., 1989, "Residual Vibration Reduction in Computer Controlled Machines," *MIT Artificial Intelligence Lab Technical Report # 1030*.
- (8) 박주이, 장평훈, "입력 다듬기방법을 이용한 유연관절을 갖는 로봇의 잔류진동," 대한기계학회논문집, 제18권, 제11호, pp. 3066~3074.
- (9) 박경조, 박윤식, "토크 제한하에서의 첨단부 잔류진동감소를 위한 매니플레이터 경로설계," 대한기계학회논문집, 제17권, 제10호, pp. 2437~2445.
- (10) Woo, K. J. and Park, Y. S., 1994, "Residual Vibration Reduction of Time varying Structures by Input Shaping," *Journal of Robotics and Mechatronics*, Vol. 6, No. 3, pp. 220~229
- (11) Brogan, W. L., *Modern Control Theory*, Third Edition, Prentice Hall, pp. 308~40