

〈논 문〉

등온가열에 의한 접촉융해의 초기 과도과정에 대한 근사적 해석해

유 호 선*

(1997년 6월 26일 접수)

An Approximate Analytical Solution for the Initial Transient Process of Close-Contact Melting on an Isothermal Surface

Hoseon Yoo

Key Words : Close-Contact Melting(접촉융해), Isothermal Heating(등온가열), Liquid Film Thickness(액막두께), Solid Descending Velocity(고상하강속도)

Abstract

An approximate analytical solution for the initial transient process of close-contact melting occurring between a phase change material kept at its melting temperature and an isothermally heated flat surface is derived. The model is so developed that it can cover both rectangular and circular cross-sectional solid blocks. Normalization of simplified model equations in reference to the steady solution enables the solution to be expressed in a generalized form depending on the liquid-to-solid density ratio only. A selected result shows an excellent agreement with the previously reported numerical data, which justifies the present approach. The solution appears to be capable of describing all the fundamental characteristics of the transient process. In particular, dependence of the solid descending velocity on the density ratio at the early stage of melting is successfully resolved. The effects of other parameters except the density ratio on the transient behaviors are efficiently represented via the steady solution implied in the normalized result. A simple approximate method for estimating the effect of convection on heat transfer across the liquid film is also proposed.

———— 기호설명 ————

A : 접촉면적

C : 상수

c : 비열

erf : 오차함수

g : 중력가속도

\tilde{g} : 무차원 가속도, gR^3/α^2

H : 고상의 높이

\tilde{H} : 무차원 높이, H/R

h_{sf} : 융해잠열

k : 열전도율

M : 고상의 질량

m : 양의 정수

n : 지수

P : 압력

Pr : Prandtl수, $\mu c/k$

\dot{q} : 열유속

R : 고상의 접촉길이 또는 반경

r : 길이 또는 반경방향 좌표

*희원, 숭실대학교 기계공학과

- Ste : Stefan수, $c\Delta T/h_{sf}$
- T : 온도
- T_b : 액막내 액체의 평균온도
- T_m : 용점온도
- ΔT : 가열온도차
- t : 시간
- \tilde{t} : 무차원 시간, $t\alpha/R^2$
- \tilde{t} : 표준화된(normalized) 시간, $\tilde{t}\tilde{V}_s/\tilde{\delta}_s$
- u : r -방향 속도
- V : 고상하강속도
- \tilde{V} : 무차원 V , VR/α
- \tilde{V} : 표준화된 V , \tilde{V}/\tilde{V}_s
- v : z -방향 속도
- z : 두께방향 좌표
- α : 열확산계수, $k/(\rho_i c)$
- δ : 액막두께
- $\tilde{\delta}$: 무차원 δ , δ/R
- $\tilde{\delta}$: 표준화된 δ , $\tilde{\delta}/\tilde{\delta}_s$
- ζ : 무차원 z , z/δ
- λ : 계수
- μ : 점도
- $\tilde{\rho}$: 밀도비, ρ_i/ρ_s
- ρ_i : 액상밀도
- ρ_s : 고상밀도
- θ : 무차원 온도, $(T - T_m)/\Delta T$
- ϕ : 무차원 상경계면 온도구배, $-(\partial\theta/\partial\zeta)_{\zeta=1}$

하첨자

- app : 근사해
- i : 상경계면
- N : Neumann해
- s : 정상해
- w : 가열면

1. 서 론

접촉용해는 두 고체사이의 경계면에서 일어나는 기초적인 현상으로서 자연적인 또는 기술적인 여러 과정에 수반된다. 공학적인 관점에서는 접촉용해시 높은 열전달률과 낮은 마찰계수가 중요한 관심사이다. 프라이팬위에서 버터덩어리를 녹일 때 눌러주는 것이나 스케이트날의 단면적을 적절한 크기로 제작하는 것은 이미 접촉용해의 잇점을 경험적으로 이용하고 있는 예이다. 실제로 밀폐용기내에 충전

된 상변화물질을 이용한 잠열축열, 저용점물질의 표면코팅에 의한 고체부품사이의 용해윤활(melt lubrication), 극저에서의 발열체 배설, 포신내부를 고속으로 통과하는 포탄의 표면용해에 의한 마찰저감 등 다양한 분야에 적용되고 있거나 적용이 모색되고 있다.⁽¹⁾

이러한 배경에서 지난 수십년간 접촉용해에 관한 수많은 연구가 수행되었으며, 최근 Bejan⁽²⁾에 의해 포괄적이며 체계적으로 정리된 바 있다. 여기에 요약된 바에 의하면, 접촉용해 해석을 위한 이론적 모델의 공통점중 하나는 과정이 정상 또는 준정상(quasi-steady) 상태로 진행된다는 가정이다. 즉 지금까지 발표된 연구의 대부분은 (준)정상상태 접촉용해를 대상으로 하였다. 사실 일반적인 접촉용해 시스템은 초기의 과도과정을 거쳐 궁극적으로는 정상상태로 접근하기 때문에 과도기간이 길지 않다면 전체적인 현상에 큰 영향을 미치지 않을 수도 있다. 그러나, 과도기간 및 거동의 정량적 특성을 파악하기 위해서 또는 정상상태 접촉용해 도중 용해조건이 급격한 변화가 수반되는 경우와 같이 과도기동 자체가 문제의 핵심이 되는 시스템의 특성을 이해하기 위해서는 비정상상태에 대한 해석이 요구된다. 특히 접촉용해 시작직후에 일어나는 밀도차로 인한 불안정 현상⁽³⁾을 규명하기 위해서 이러한 해석은 필수적이다. 아울러 과도기동의 본질은 학문적 관심의 대상으로서도 충분한 가치가 부여될 수 있다.

접촉용해의 초기 과도과정에 관한 연구는 Hong과 Saito⁽⁴⁾에 의해 처음으로 수행된 것으로 보인다. 이들은 등온으로 유지되는 평판위 상변화물질의 접촉용해에 대하여 단순화과정없이 비정상 유동 및 열전달 특성을 정교하게 수치해석하였다. 수개의 적용예에 대한 결과에서 용해시작부터 정상상태에 도달하는 과도과정동안 주요 변수의 시간변화를 제시하였으며, 가열조건을 대표하는 Stefan수의 증가에 따라 액막내의 대류가 강화되고 그 영향이 정량적으로 상당하다는 사실도 보고하였다. 이러한 성과에도 불구하고, 이 연구는 수치해석방법의 개발과 그 유용성의 검증에 치중하였을 뿐 과도 접촉용해의 기본적인 특성에 접근하려는 노력은 미흡하였다. 최근 Saito⁽³⁾등은 같은 수치해석방법을 등온 유속 가열조건으로 확장한 바 있으나 주목할 만한 개선은 없었다.

본 연구의 목적은 해석적 접근을 통하여 등온가

열에 의한 접촉용해시 초기 과도거동의 본질을 보다 체계적으로 규명하는 데 있다. 접촉용해의 기본 특성이 훼손되지 않는 범위내에서 단순화된 모델방정식을 정립하고 근사적 해석해를 모색한다. 만일 간결한 형태의 근사적 해석해가 존재한다면, 적용이 용이함은 물론 각 특성인자의 영향을 효율적으로 파악할 수 있으며, 실험결과 또는 수치해의 검증에 위한 이론적 기준으로서도 유용하기 때문이다. 적절한 방법으로 해석과정에 도입된 가정을 검증하고, 결과의 타당성 및 유용성에 관하여 고찰할 것이다.

2. 과도 접촉용해 모델

본 연구의 해석대상은, 좌표계와 함께 Fig. 1에 도시되었듯이, 최초 용점온도 T_m 상태이고 높이 H 인 단위길이 직사각형(또는 축대칭 원형단면) 고상의 상변화물질이 시간 $t=0$ 부터 온도 $T_m + \Delta T$ 로 가열되는 고체평판위에서 길이(또는 반경) R 에 걸쳐 중력에 의해 접촉용해하는 현상이다. 중력 대신 수직방향 외력에 의해 접촉이 유지되는 경우도 해석방법의 차이는 없다. 가열평판으로부터의 열전달에 따라 용해가 시작되면 상변화물질과 평판사이에는 얇은 액막이 형성되며, 용해되는 액체는 고체의 하강에 의해 액막의 양단으로 유동하여 외부로 압출된다. 액막두께와 고상하강속도는 용해의 진행에

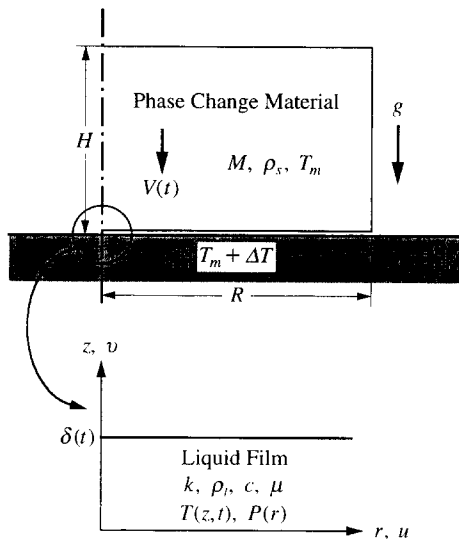


Fig. 1 Schematic of close contact melting system considered in the present study.

따라 변화하며, 상경계면에서의 용해율과 고상하강속도가 일치하는 (준)정상상태로 접근할 것이다. 본 연구는 이러한 용해의 시작으로부터 정상상태에 도달할 때까지의 과도과정을 해석한다. 또한, 하나의 정상상태로 접촉용해중 가열온도, 외력과 같은 용해조건의 급격한 변화에 따라 다른 정상상태로 천이하는 과정도 이 문제와 본질적으로 동일하다.

시스템의 특성에 해석적으로 접근하기 위하여 다음의 가정을 도입하였다. 먼저, 액막을 통한 열전달은 전도에 의해 지배된다. 이 가정은 Ste가 작은 경우 유효하다는 사실이 이미 확립되어 있으며,⁽²⁾ 정상상태에서 액막내 대류효과를 취급한 유효선등⁽⁵⁾은 대략 $Ste < 0.1$ 라는 범위를 구체화하였다. 대류가 무시될 수 있는 Ste의 범위는 상세한 해석에 의존하지 않아도 간단한 근사해석만으로도 결정될 수 있으며, 부록 A에 관련된 내용을 수록하였다. 더욱이 일반적인 접촉용해 시스템의 가열조건은 $Ste < 0.1$ 를 충분히 만족하므로⁽⁶⁾ 이 가정으로 인한 문제는 없으리라 판단된다. 또한 전도가 지배적인 접촉용해 시스템에서 액막두께의 길이(또는 반경)방향 변화는 없다.⁽¹⁾ 다음으로, 초기 과도과정동안 용해로 인한 고상의 질량변화 즉 높이변화는 없다고 간주한다. 실제 접촉용해시 과도기간은 길지 않으므로, 용해율이 크지 않은 상기 Ste의 범위에 대하여, 고상의 질량변화에 따른 영향은 무시될 수 있기 때문이다.^(3,4)

고상하강속도 V 및 액막두께 δ 의 시간변화로 대표되는 과도 접촉용해의 기본특성은 액막과 고상 사이의 역학적 평형 및 상경계면에서의 에너지 균형에 의해 결정된다. 고상에 작용하는 중력, 고상의 하강에 따른 관성력 및 액막내 압력사이의 평형 관계는

$$M \left(g - \frac{dV}{dt} \right) = \int_A P dA \quad (1)$$

이다. 물리적 관점에서 용해에 따른 고상의 하강속도 dV/dt 는 중력가속도 g 에 비하여 극히 작은 것으로 예상되므로 해석에서 무시하되⁽⁶⁾ 연관된 내용은 추후 검토하기로 한다. 상경계면에서의 에너지 균형은 온도구배와 용해율의 향으로

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = \rho_s h_{sf} \left(V + \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (2)$$

로 표현된다. 여기서 우변 괄호안의 용해율은 후술되듯이 액막내 유동에 대한 역할이 상이한 고상하

강속도와 액막두께 변화율로 구성된다. 고상하강속도는 초기 과도과정동안 감소하면서 정상상태로 접근하리라 쉽게 예상되지만, 고액밀도차가 존재할 때 액막두께 변화율의 거동이 관심사이다.

3. 해 석

모델방정식 (1)과 (2)의 해를 구하기 위해서는 각각에 나타난 액막내 압력 및 상경계면 온도구배를 종속변수 V 및 δ 의 향으로 변환하여야 한다. 얇은 액체층내부 유체유동에 있어서 관성력 및 압력의 두께방향변화는 무시될 수 있으며^(4,7,8) 앞에서 가정하였듯이 열전달에 있어서 대류를 배제하면, 액막내의 연속, 운동량 및 에너지 방정식은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial(r^n u)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dr} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (5)$$

여기서 $n=0$ 및 1은 각각 직사각형 및 원형단면의 고상에 대응하며, 본 해석은 양자를 포괄한다. 에너지 방정식 (5)에서 확산항에 대한 비정상항의 크기차수(order-of-magnitude)비는 $\delta^2/(at)$ 로서 현 단계에서는 평가가 불가능하기 때문에, 비정상항을 포함시켜 해석한 후 그 효과를 검토하기로 한다. 식 (3)~(5)를 위한 가열면($z=0$) 및 상경계면($z=\delta$)에서의 경계조건은 각각 다음과 같다.

$$u=0; v=0, T=T_m + \Delta T \quad (6)$$

$$u=0; v = -\frac{\rho_s}{\rho_l} V - \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt}, T=T_m \quad (7)$$

식 (7)의 v 에 대한 조건에서 고액밀도차로 인한 고상하강속도 및 액막두께 변화율의 액막내 유동에 대한 역할이 상이함에 주목할 필요가 있다.

밀도차가 없는 경우 식 (1)에 포함된 액막내 길이(또는 반경)방향 압력분포 $P(r)$ 을 식 (3)과 (4)로부터 유도하는 과정은 잘 확립되어 있으므로^(6,8) 밀도차의 효과만 추가하면 된다. 경계조건 식 (6) 및 (7)과 함께 식 (4)의 해를 구하면

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dr} \right) z(z - \delta) \quad (8)$$

이다. 식 (8)을 식 (3)에 대입한 후 z 에 대하여

적분하고 v 에 대한 경계조건을 적용하면 액막내 압력구배

$$\frac{1}{r} \frac{dP}{dr} = -\frac{12\mu}{(n+1)\delta^3} \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} V + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (9)$$

가 얻어진다. 이 과정에서 $r=0$ 에서의 대칭조건이 적용되었다. 식 (9)를 적분하고 액막끝에서의 경계조건 $P(R)=0$ 을 대입함으로써 다음의 압력분포가 결정된다.

$$P = \frac{6\mu(R^2 - r^2)}{(n+1)\delta^3} \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} V + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (10)$$

이 결과를 고상의 가속도가 무시된 식 (1)에 대입하여 기호설명에 정의된 무차원 변수 및 인자의 향으로 표현하면 다음과 같이 정리된다.

$$\tilde{V} + (1 + \tilde{\rho}) \frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{CPr} \right) \tilde{\delta}^3 \quad (11)$$

여기서 상수 C 는 고상이 직사각형 단면인 경우 4, 원형단면인 경우 3/2이다.⁽⁶⁾

식 (2)에 나타난 상경계면 온도구배는 경계조건식 (6)과 (7)에 대한 식 (5)의 해 즉 액막내 과도 온도분포로부터 결정되어야 한다. 그러나 경계인 액막두께 $\delta(t)$ 의 시간변화로 인하여 식 (5)의 해석해는 존재하지 않으므로 근사적 접근이 불가피하다. 1차근사로서 액막내 온도분포에 대한 경계 이동의 영향을 무시하면, 초기조건 $T(z, 0) = T_m$ 에 대하여 식 (5)는 다음 해를 갖는다.⁽⁹⁾

$$\theta = (1 - \zeta) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m^2 \pi^2 \zeta / \delta^2} \sin(m\pi\zeta) \quad (12)$$

여기서 $\zeta = z/\delta$ 로 정의되었으며, 우변의 제1항은 정상상태 선형온도분포, 제2항 즉 무한급수는 비정상효과이다. 이러한 근사적 접근의 타당성에 관해서는 부록 B에서 구체적으로 취급하였다. 한편 식 (2)를 무차원화하면

$$\tilde{V} + \frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{\rho} Ste}{\tilde{\delta}} \phi \quad (13)$$

로서, 무차원 상경계면 온도구배는 $\phi = -(\partial\theta/\partial\zeta)_{\zeta=1}$ 로 정의되었으며 온도분포 식 (12)에 대응하는 ϕ 는 다음과 같다.

$$\phi = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 \pi^2 / \delta^2} \quad (14)$$

무차원화된 모델방정식 (11)과 (13)은 아직도 $\tilde{V}(\tilde{t})$ 및 $\tilde{\delta}(\tilde{t})$ 에 대한 해석해를 유도하기는 곤란

할 뿐만아니라 여러 인자를 현시적으로 포함한 불편한 형태이다. 만일 수치해석에 의존한다 하여도 이들 인자의 가능한 조합에 대응하는 경우의 수가 상당하기 때문이다. 이러한 모델방정식의 특성인자에 대한 현시적 의존성을 완화하고 추가적인 단순화 가능성을 모색하기 위하여 정상해(steady solution)에 기준한 표준화(normalization)를 시도하였다. 정상상태에 도달하면 식 (11), (13) 및 (14)에서 $d\hat{\delta}/d\hat{t}=0$ 이고 $\phi=1$ 이므로 쉽게 다음과 같은 해가 결정된다.

$$\tilde{V}_s = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{CPr} \right)^{1/4} (\tilde{\rho}Ste)^{3/4} \quad (15)$$

$$\tilde{\delta}_s = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{CPr} \right)^{-1/4} (\tilde{\rho}Ste)^{1/4} \quad (16)$$

이 정상해는 $\tilde{\rho}=1$ 인 경우 잘 알려진 결과^(2,6,8)와 일치하지만, $\tilde{\rho} \neq 1$ 인 경우 다소 차이가 있는데 그 원인은 타연구에 내포된 $\tilde{\rho}$ 와 연관된 불확실성이라는 사실이 이미 규명된 바 있다.⁽⁵⁾ 식 (15)와 (16)을 이용하여 $\hat{V} = \tilde{V}/\tilde{V}_s$ 및 $\hat{\delta} = \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_s$ 로 표준화하면 식 (11), (13) 및 (14)는 각각

$$\hat{V} + (1-\tilde{\rho}) \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{t}} = \hat{\delta}^3 \quad (17)$$

$$\hat{V} + \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{t}} = \frac{\phi}{\tilde{\rho}} \quad (18)$$

$$\phi = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 \pi^2 \hat{t} / (\tilde{\rho}Ste\hat{\delta}^2)} \quad (19)$$

로 변환된다. 이 결과에서 두가지 의미있는 사실이 발견된다. 첫째, 표준화 과정에서 $\hat{t} = \tilde{t} / (\tilde{\delta}_s / \tilde{V}_s)$ 로 나타났다. 이것은 정상상태 도달에 소요되는 무차원 시간의 크기차수가 $\tilde{\delta}_s / \tilde{V}_s$ 로서, 주어진 접촉용해 시스템에 대하여 이미 알려진 정상해만으로도 과도과정의 지속시간이 대략적으로 평가될 수 있다는 의미이다. 둘째, 표준화된 식은 $\tilde{\rho}$ 와 Ste만의 함수로서 다른 인자와는 무관하다. 더욱이 Ste는 비정상효과에만 연관됨에 비하여 $\tilde{\rho}$ 는 식 (17)에서 자명하듯이 전반적인 접촉용해의 과도거동에 영향을 미친다. 즉 대부분의 상변화물질에서 정량적으로는 $\tilde{\rho} \approx 1$ 이지만, $\tilde{\rho}=1$ 와 $\tilde{\rho} \neq 1$ 사이에는 정성적으로 상당한 차이가 있음을 유추할 수 있다.

추가적인 단순화를 모색하기 위하여, 식 (17)을 (18)에 대입하여 \hat{V} 을 소거한

$$\tilde{\rho} \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{t}} = \frac{\phi}{\tilde{\rho}} - \hat{\delta}^3 \quad (20)$$

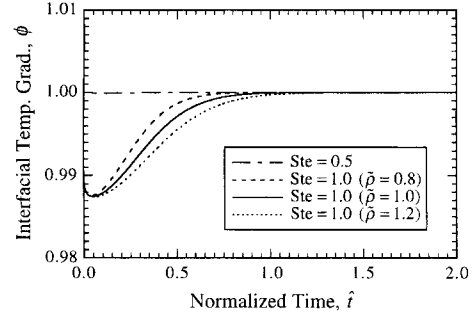


Fig. 2 Time evolution of the interfacial temperature gradient for different Stefan numbers and density ratios.

와 식 (19)의 급수에 나타난 지수의 형태를 고찰할 때, $\tilde{\rho}$ 및 Ste이 작을수록 비정상효과는 약화됨을 알 수 있다. 식 (20)에 대한 수치해로부터 $\phi(\hat{t})$ 를 정량적으로 확인한 결과가 Fig. 2이다. 여기서 $\tilde{\rho}$ 의 값은 실제 상변화물질의 밀도차를 고려하여 가능한 최대범위를 취하였다. 일단 변화의 경향은 예상과 일치한다. 그러나 보다 중요한 것은 모델방정식이 유효한 범위(대략 $Ste < 0.1$)에 대하여 $\tilde{\rho}$ 및 Ste에 무관하게 $\phi=1$ 즉 비정상효과는 무시될 수 있다는 사실이다. 이것은 등온 가열조건이고 Ste가 작은 경우에 대한 추후의 과도 접촉용해 해석시 처음부터 액막내 온도분포를 선형으로 가정할 수 있음을 의미한다. 이에 따라 식 (20)은 Ste와는 독립적인

$$\tilde{\rho} \frac{d\hat{\delta}^2}{d\hat{t}} = 2(1 - \hat{\delta}^4) \quad (21)$$

로 단순화되며, 초기조건 $\hat{\delta}(0)=0$ 와 함께 다음과 같은 해석해를 갖는다.

$$\hat{\delta} = \tanh^{1/2}(2\tilde{\rho}^{-1}\hat{t}) \quad (22)$$

$$\hat{V} = \tilde{\rho}^{-1}[(1-\tilde{\rho})/\hat{\delta} + \hat{\delta}^3] \quad (23)$$

특히 $\tilde{\rho}=1$ 인 경우 식 (23)은 보다 간결하게 \hat{t} 의 현시적인 함수형태로 표현된다.

$$\hat{V} = \tanh^{3/2}(2\hat{t}) \quad (24)$$

4. 결과에 대한 고찰

지금까지 등온으로 가열되는 접촉용해의 초기 과도과정에 대한 근사적 해석해를 성공적으로 유도하였다. 먼저 해석해의 타당성 및 유용성을 검증하기 위하여 가용한 자료와 비교하기로 한다. 비정상 접

Table 1 Reference conditions used for validation and discussion

Parameter	Ste	Pr	\tilde{H}	\tilde{g}
Value	0.01266	13.44	1.0	5.521×10^{11}

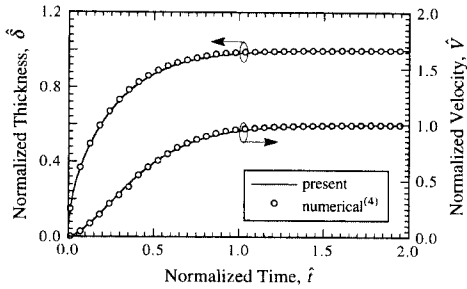


Fig. 3 Comparison of time evolutions of the solid descending velocity and liquid film thickness between the present results and available numerical data.

축용해에 대하여 발표된 실험자료는 전무하며 수치해도 Hong과 Saito⁽⁴⁾의 결과가 유일하기 때문에 이것을 비교대상으로 취하였다. 비교를 위한 자료의 표준화 또는 이후의 계산에 사용될 기준조건을 문헌⁽⁴⁾에서 인용하여 Table 1에 요약하였으며, $\tilde{\rho} = 1$ 인 경우 이 조건에 대한 수치해와 해석해를 Fig. 3에서 비교하였다. 고상하강속도와 액막두께 모두 정성적, 정량적으로 거의 완전하게 일치한다. 제한된 경우에 대한 비교이지만, 정교한 모델에 의한 복잡한 수치해와 간결한 해석해의 양호한 일치 는 본 해석이 타당한 방법에 의존하여 실제 현상을 잘 반영하도록 수행되었음을 의미한다.

표준화된 해석해 식 (22)와 (23)은 밀도비 $\tilde{\rho}$ 만의 현시적인 함수이다. 즉 어떤 접촉용해 시스템이 해석해의 전제조건인 $Ste < 0.1$ 을 만족하면(전술하였듯이 대부분의 경우가 해당됨) 그 과도거동은 $\tilde{\rho}$ 만에 의존하는 일반화된 형태로 결정된다. 다른 특성인자의 영향은 후술되듯이 정상해를 통하여 효율적으로 결과에 반영될 수 있다. 해석해의 $\tilde{\rho}$ 에 대한 의존성을 고찰하기 위하여 Fig. 4와 5에 액막두께 $\tilde{\delta}$ 및 고상하강속도 \tilde{V} 의 시간변화를 도시하였다. 먼저 Fig. 4에서 $\tilde{\rho}$ 는 $\tilde{\delta}$ 에 정량적인 영향을 미칠 뿐 정성적 변화는 초래하지 않는다. 밀도비의 증가에 따라 $\tilde{\delta}$ 의 성장은 완만해지며 정상상태 도달시간이 지연된다. 이점은 식 (22)에서도 자명하다. 이에 비하여 Fig. 5에 나타난 \tilde{V} 에 대한 $\tilde{\rho}$ 의

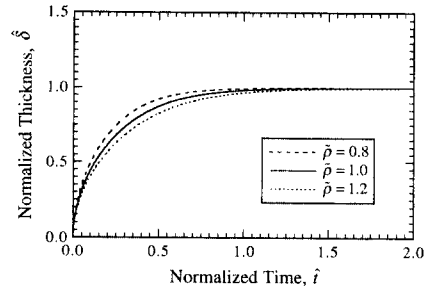


Fig. 4 Effect of the density ratio on time evolution of the liquid film thickness.

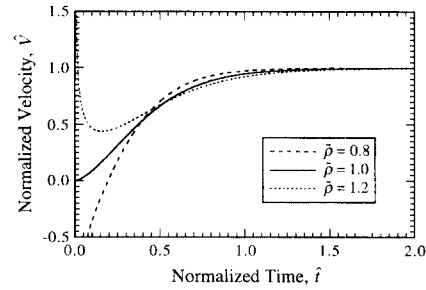


Fig. 5 Effect of the density ratio on time evolution of the solid descending velocity.

영향은 현저하다. 용해시작시 0으로부터 변곡하면서 증가하는 $\tilde{\rho} = 1$ 인 경우를 경계로 $\tilde{\rho} < 1$ 이면 $-\infty$ 로부터 단조증가하면서, $\tilde{\rho} > 1$ 이면 $+\infty$ 로부터 감소후 최소값을 지나 증가하면서 정상상태로 접근한다. 과도과정동안의 이 특이한 거동은 해석상의 오류가 아니라 물리적 설명이 가능한 접촉용해의 특징적인 현상이다. 액상의 비체적이 고상보다 크면($\tilde{\rho} < 1$) 가열과 동시에 용해에 의해 생성된 액체 중 액막을 채우고 난 잉여량에 의해 액막내의 압력이 급증함으로써 고상을 급상승($\tilde{V} \rightarrow -\infty$)시키게 되며, 반대의 경우($\tilde{\rho} > 1$) 액체의 결핍으로 고상이 급하강한다. 시간의 경과에 따라 액막두께가 성장하고 액막내 액체의 횡방향 유동이 확립되면, 즉 용해율의 감소와(후술될 Fig. 6 참조) 액막두께의 급성장으로 인하여 잉여 또는 결핍 액체량(식 (17)의 좌변 제2항)이 액막두께에 비하여 상대적으로 작아지면, 이 현상은 점차 소멸된다. Fig. 4와 5에서 $\tilde{\delta}$ 이 상당히 성장한 $t̂ > 0.2$ 이면 그 영향이 일부 잔재하고 있을 뿐 현상자체는 거의 사라진 상태이다. 여기서 검토된 용해시작 직후의 불안정 현상은 Saito등⁽³⁾에 의해 지적된 바 있으며 경계조건은 본 연구와 상이하지만 밀도차가 고려된 그들의 수치해

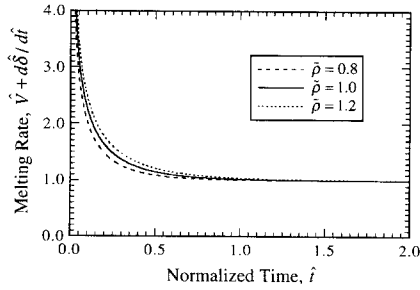


Fig. 6 Effect of the density ratio on time evolution of the melting rate.

석에서도 유사한 거동이 예측된 바 있으나 구체적 설명은 없었다.

상기 $\hat{\rho} \neq 1$ 인 경우에 대한 \hat{V} 의 특이한 거동과 공학적으로 관심있는 용해율 $\hat{V} + d\hat{\delta}/d\hat{t}$ 의 관계를 고찰하기 위하여 식 (18)에 $\phi=1$ 을 대입하여 구한 용해율 즉 $\hat{\delta}^{-1}$ 를 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 5와 6의 비교에서, $\hat{\rho}=0.8$ 인 경우 $\hat{t} \rightarrow 0$ 일 때 $\hat{V} \rightarrow -\infty$ 임에도 $\hat{V} + d\hat{\delta} \rightarrow \infty$ 인 점과 대략 $0.5 < \hat{t} < 1.5$ 인 범위에서 $\hat{\rho}$ 의 증가에 따라 \hat{V} 이 감소함에도 $\hat{V} + d\hat{\delta}/d\hat{t}$ 는 시간에 무관하게 $\hat{\rho}$ 에 비례하여 증가하는 점으로부터 과도과정동안 용해율은 \hat{V} 보다는 액막두께 변화율 $d\hat{\delta}/d\hat{t}$ 에 의해 주도됨을 알 수 있다. 기존의 연구에서 정상해를 추구한 핵심적인 이유중의 하나가 정상상태에서는 용해율이 \hat{V} 와 일치하기 때문이었음을 고려하면,^(2,6) 이 결과는 과도해의 필요성을 보여주는 중요한 의미가 있다. 한편 $\hat{\rho} \neq 1$ 에 대응하는 초기 \hat{V} 의 극한거동과 관련하여 해석에서 무시된 모델방정식 (1)의 하강가속도에 관하여 검토할 필요가 있다. 즉 하강가속도가 무시된 해임에도 Fig. 5에서 $\hat{t} \rightarrow 0$ 일 때 $\hat{V} \rightarrow \pm\infty$ 이므로 $|d\hat{V}/d\hat{t}| \rightarrow \infty$ 이기 때문이다. Fig. 7은 Table 1의 조건에 대하여 해석해로부터 계산된 $\hat{\rho}$ 에 따른 무차원 하강가속도의 중력가속도에 대한 비이다. 예상대로 $\hat{\rho}=1$ 인 경우 거의 무시될 수 있는 크기이나, $\hat{\rho} \neq 1$ 인 경우 $\hat{t} \rightarrow 0$ 에 따라 가속도비의 절대값이 증가하며 이론적으로 $\hat{t}=0$ 에서는 무한대가 된다. 그러나 과도거동에 영향을 미칠 수 있는 크기의 가속도비는 용해시작 직후의 극히 짧은 시간에 국한되며(Fig. 7의 시간스케일 참조), 시간에 따라 급격히 감소하므로 해석에서 무시될 수 있을 것으로 보인다.

마지막으로 $\hat{\rho}$ 에만 의존하는 해석해로부터 Ste, Pr 등 다른 특성인자의 영향을 파악하기로 한다.

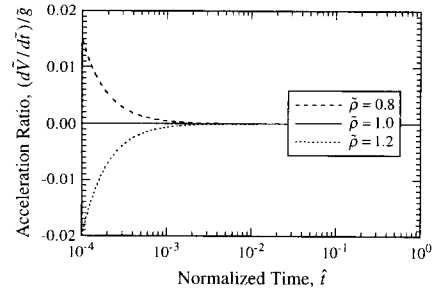


Fig. 7 Estimated magnitude of the solid descending acceleration in comparison to the gravity at different density ratios during the early stage of close-contact melting.

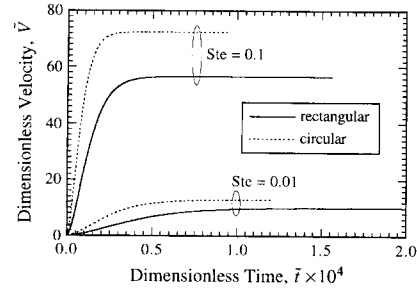


Fig. 8 Effect of the Stefan number on time evolution of the solid descending velocity for different solid geometries.

특성인자는 해석해에 현시적으로 나타나지 않으나, 예를들어 $\hat{V}(\hat{t})$ 이 결정되면 전술한 정상해를 통하여 $\hat{V} = \hat{V}\hat{V}_s$ 및 $\hat{t} = \hat{t}(\hat{\delta}_s/\hat{V}_s)$ 의 형태로, 그 영향은 쉽게 정량화된다. 방법이 동일하기 때문에 중복을 피하기 위하여 대표적으로 $\hat{\rho}=1$ 인 경우에 대하여 Ste의 영향을 취급하였으며, Fig. 8은 고상하강속도에 대한 결과이다. 기존의 연구⁽⁴⁾와 부합되게 Ste이 클수록 \hat{V} 는 증가하며 보다 짧은 시간에 정상상태에 도달한다. 또한 단위길이의 직사각형 고상보다 원형단면인 경우의 \hat{V} 가 크며⁽⁶⁾ 과도과정의 지속시간은 짧다. 과도 접촉용해 거동에 대한 특성인자의 정량적 영향을 고찰하기 위하여 수치해석에 의존할 때 수많은 반복계산이 필요함에 비하여,⁽³⁾ 근사적이지만 해석해가 존재하면 단순한 수치대입만으로도 충분하다. 이러한 적용의 용이성(또는 효율성) 이외에도 해석해는 실험이 부여된 조건으로부터 이겨낸 정도를 판정하는 지표로서 또는 수치해석의 타당성을 검증하는 기준으로서도 매우 유용할 것이다.

5. 결 론

본 연구는 등온으로 가열되는 평판위에서 용점온도로 유지되는 상변화물질이 중력에 의해 접촉용해될 때 초기의 과도과정을 해석적으로 취급하였다. 고상과 액막내 압력사이의 역학적 평형 및 상경계면에서의 에너지 균형에 기초한 모델방정식을 정립하고 타당성이 검증될 수 있는 근사화를 통하여 단순화하였다. 모든 특성인자에 현시적으로 의존하는 무차원화된 모델방정식을 정상해를 기준으로 표준화한 결과 밀도비 및 Stefan수만의 함수형태로 표현되었다. 해석에 도입된 근사화의 유효범위(대략 $Ste < 0.1$) 이내에서 Ste의 함수인 상경계면 온도구배는 과도과정동안 불변이었으며, 이는 추후 해석에서 액막내의 온도분포는 선형으로 취급될 수 있음을 의미한다. 이에 따라 표준화된 모델방정식은 밀도비에만 의존하는 형태로 귀결되며, 간결한 해석해가 유도되었다.

최초로 유도된 근사적 해석해의 타당성은 제한된 조건에 대하여 가용한 수치해와 거의 완전하게 일치하는 사실로부터 확립될 수 있었다. 해석해의 해상도는 용해시작 직후의 밀도차로 인한 고상하강속도의 불안정 현상과 그후 정상상태로 접근하는 거동을 파악하기에 충분하였다. 정상상태 용해율은 고상하강속도에 의해 결정되지만, 과도상태 용해율은 고상하강속도보다는 액막두께 변화율에 의해 주도됨도 규명되었다. 해석해에 근거한 고상의 하강 가속도는 용해시작 직후 극히 짧은 시간내에 급속히 감쇠되므로 중력가속도에 비하여 무시될 수 있었다. 마지막으로, 접촉용해의 초기 과도거동에 대한 특성인자의 영향은 표준화된 해석해에 암시적으로 포함된 정상해를 통하여 효율적으로 반영됨을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) Bejan, A., 1989, "The Fundamentals of Sliding Contact Melting and Friction," *J. Heat Transfer*, Vol. 111, pp. 13~20.
 (2) Bejan, A., 1994, "Contact Melting Heat Transfer and Lubrication," *Advances in Heat Transfer*, Vol. 24, pp. 1~38.
 (3) Saito, A., Kumano, H., Okawa, S. and Yamashita, K., 1996, "Analytical Study on Transient

Direct Contact Melting Phenomena," *Trans. of the JAR*, Vol. 13, pp. 97~108 (in Japanese).

(4) Hong, H. and Saito, A., 1993, "Numerical Method for Direct Contact Melting in Transient Process," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2093~2103.
 (5) 유호선·홍희기·김찬중, 1997, "종방향대류 및 고액밀도차가 고려된 접촉용해에 대한 해석해," 대한기계학회 논문집, 제21권, 제9호, pp. 1165~1173
 (6) Moallemi, M. K., Webb, B. W. and Viskanta, R., 1986, "An Experimental and Analytical Study of Close-Contact Melting," *J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 894~899.
 (7) Batchelor, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, pp. 219~222.
 (8) Bejan, A., 1995, *Convection Heat Transfer*, 2nd ed., Wiley, New York, pp. 434~455.
 (9) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. Oxford University Press, Oxford, UK, Chaps. III and XI.

부록 A 액막내 대류효과에 대한 근사적 해석

과도과정동안 상경계면에서의 용해는 주로 액막 두께의 성장에 기여하므로 액막내 대류효과는 액막 두께가 불변이며 고상하강속도와 용해율이 일치하는 정상상태에서 가장 현저하다. 따라서 정상상태에서의 대류효과를 해석함으로써 과도과정동안 대류가 무시될 수 있는 인자의 범위를 결정할 수 있다. 여기서는 이에 대한 근사적 해석방법을 취급하고자 한다.

정상상태에서 액막전체에 대한 에너지 균형은

$$\dot{q}_w = \dot{q}_1 + \rho_s c V_s (T_b - T_m) \quad (A1)$$

이다. 여기서 $\rho_s V_s$ 와 T_b 는 액막 양단에서 유출되는 액체의 질량유량과 평균온도이며, \dot{q}_w 와 \dot{q}_1 는 가열면과 상경계면에서의 열유속이다. 식 (A1)은 액막내의 대류가 포함된 정상상태 에너지 방정식

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^n \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (vT) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (A2)$$

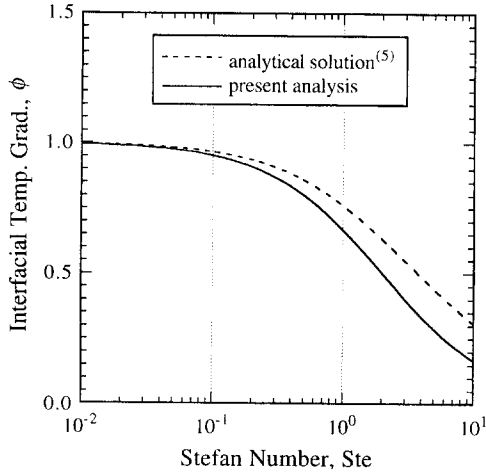


Fig. A1 Comparison of convection effect on the interfacial temperature gradient between the present approximate analysis and the previous study.

을 액막두께 및 길이(또는 반경)방향으로 적분한 결과로서, 식 (A1) 우변 제2항이 식 (A2)의 대류항에 대응한다. 대류효과는 여러 형태로 표현될 수 있지만, 본 연구에서는 액막내 온도분포의 비선형성을 효과적으로 반영할 수 있을 뿐만 아니라 선행연구⁽⁶⁾와의 비교에도 편리한 상경계면 온도구배의 형태로 정리하였다.

정성적으로 액막내의 대류가 강화되면, 순수전도에 대응하는 선형 온도분포는 오목하게 즉 상경계면 온도구배는 감소하고 가열면 온도구배는 증가하며 평균온도는 감소하는 형태로 비선형화한다. 따라서 식 (A1)의 \dot{q}_w 는 $k\Delta T/\delta_s$ 이상이며 T_b 는 $\Delta T/2 + T_m$ 이하이다. 그 결과 식 (A1)은

$$k\Delta T/\delta_s \leq \dot{q}_i + \rho_s c V_s \Delta T/2 \quad (\text{A3})$$

로 변환될 수 있다. 무차원 상경계면 온도구배의 정의에 의해 $\dot{q}_i = (k\Delta T/\delta_s)\phi$ 이고 정상상태에서 $\dot{q}_i = \rho_s V_s h_{sf}$ 이므로, 식 (A3)은 다음과 같이 ϕ 의 형태로 정리된다.

$$\phi \geq 1/(1 + \text{Ste}/2) \quad (\text{A4})$$

대류효과를 대표하는 Ste에 대하여 식 (A4)의 우변은 실제의 상경계면 온도구배보다 작거나 같으며, Ste의 증가 즉 비선형성의 심화에 따라 그 차이도 증가한다. 이것은 식 (A4)에 의존할 때 대류가 무시될 수 있는 $\phi \approx 1$ 인 Ste의 범위는 실제보다

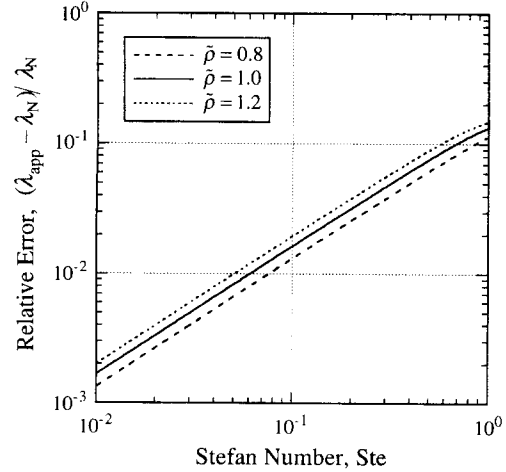


Fig. B1 Difference in the interface position between the approximate and exact solutions for the Stefan problem with respect to the Stefan number at different density ratios.

엄격하게 평가됨을 의미한다. 선행연구에서 엄밀하게 유도된 해석해⁽⁵⁾와 식 (A4)를 비교한 것이 Fig. A1로서, 양자의 정성적인 경향은 일치하며 전술한 사실이 분명히 나타난다. 식 (A4)는 단순한 방법에 의한 근사적 해석결과지만 공학적으로 유용함이 확인된다. 또한 Fig. A1에서 $\phi \approx 1$ 인 범위는 $\text{Ste} = 0.1$ 부근부터 ϕ 가 급격히 감소함을 고려할 때 대략 $\text{Ste} < 0.1$ 이 합리적임을 알 수 있다.

부록 B 근사적 과도 온도분포에 대한 타당성 검토

경계 이동의 영향을 무시하고 구한 과도 온도분포 식 (12)의 타당성은 극한의 경우를 통하여 편리하게 검토될 수 있다. 접촉용해 시스템은, 접촉의 구동력인 중력(또는 외력)이 작용하지 않는 극한에서는, 고상의 하강이 없는($V=0$) 비접촉 Stefan문제로 귀결된다. 상경계면의 이동은 접촉용해시에는 역학적으로 제한되어 결국 0으로 접근함에 비하여 비접촉용해시에는 제한되지 않기 때문에, 경계 이동을 무시한 근사화의 효과는 Stefan문제에서 보다 현저하다. 이에 따라 Stefan문제에 대하여 근사해가 유효함을 보이는 방법으로 접근하였다.

비접촉 Stefan문제에 대한 엄밀해 즉 Neumann해⁽⁹⁾에서 무차원 상경계면의 위치는 $\tilde{\delta} = 2\lambda_N \tau^{1/2}$ 로 표현되며 계수 λ_N 은

$$\lambda_N e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda_N) = \bar{\rho} \operatorname{Ste} / \pi^{1/2} \quad (\text{B1})$$

의 해이다. 한편 근사적 과도 온도분포 식 (12)로부터 구한 무차원 온도구배 식 (14)를 식 (13)에 대입하면, $\tilde{V}=0$ 이므로

$$\frac{1}{2} \frac{d\tilde{\delta}^2}{dt} = \bar{\rho} \operatorname{Ste} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 \pi^2 \tilde{t} / \tilde{\delta}^2} \right] \quad (\text{B2})$$

로 변환된다. 상경계면의 위치를 $\tilde{\delta} = 2\lambda_{\text{app}} \tilde{t}^{1/2}$ 로 가정하면 식 (B2)의 해석해가 존재하며, 여기서 λ_{app} 는 다음 식의 해이다.

$$\lambda_{\text{app}}^2 = \bar{\rho} \operatorname{Ste} \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 \pi^2 / (4\lambda_{\text{app}}^2)} \right] \quad (\text{B3})$$

따라서 근사화의 유효범위는 계수 λ_N 과 λ_{app} 의 비교로부터 평가될 수 있다. 특성인자인 $\bar{\rho}$ 와 Ste의 변화에 따른 λ_{app} 의 상대오차를 도시한 Fig. B1

에서, 상대오차는 Ste에 거의 선형적으로 비례하지만 액막내의 대류효과가 무시될 수 있는 범위 ($\operatorname{Ste} < 0.1$)에 대해서는 2% 이내이다. 전술하였듯이 이 결과는 Stefan문제에 대한 것이므로 실제 접촉용해시의 오차는 이보다 현저하게 작을 것이다. 또한 접촉용해에서 액막두께는 용해시작과 함께 증가하지만 정상상태로 접근하면서 일정한 값에 도달하므로 경계 이동의 영향도 과도과정의 진행에 따라 급격히 사라진다. 이상에서 고찰한 내용을 종합할 때, $\operatorname{Ste} < 0.1$ 인 범위에서 대류배제와 근사적인 과도 온도분포가 접촉용해의 특성을 정량적으로 변화시키지는 않을 것으로 보이며, 본 연구의 접근방법도 합리적인 오차범위 내에서 타당하다고 판단된다.