

〈논 문〉

# POD를 이용한 1차원 천수 근사방정식의 유동 해석

서용권\* · 박준관\*\* · 김용균\*\* · 문종춘\*\*\*

(1997년 5월 26일 접수)

## POD Analysis of Fluid Flows Given by One-Dimensional Shallow Water Equations

Yong Kweon Suh, Joon Kwan Park, Yong Kyun Kim and Jong Chun Moon

**Key Words :** POD(Proper Orthogonal Decomposition ; 적합직교분해), Shallow-Water Equations(천수근사 방정식), Eigenvalues(고유치), Eigen-functions(고유함수), Snapshot Methods(스냅샷 방법).

### Abstract

In this paper, a precise description is given to the basic theory as well as the detailed algorithms for the numerical treatment of the method of POD(proper orthogonal decomposition). This method is then applied to analysing the numerical solutions of one-dimensional shallow-water equations to show how the method is affected by various parameters such as the sampling time, sampling numbers, and the spatial resolution for the autocorrelation function. A few curious features associated with this flow model found through the analysis are further explained and discussed.

### 1. 서 론

유체유동과 관련한 대부분의 공학적 문제는 난류이다. 그리고, 현재까지 난류에 관한 이론은 대부분 시간평균적이며 통계적이다. 난류에서 극히 근본적인 현상이면서 다른 많은 파생적 유동현상의 근원이라 할 수 있는 ‘난류에 의한 활발한 혼합과정’은 그러나 시시각각 변화하는 유동의 동적특성의 결과이다. 따라서 주어진 유동문제에 있어서 난류의 근본 기구를 밝히고 필요에 의해 난류를 효과적으로 제어하기 위해서는 이러한 근본적인 관점에서 유동현상을 규명하는 것이 가장 바람직스럽다. 특히, 소위 응집구조를 보이는 해양유동, 지상의

대기유동 등에서는 이러한 근본적인 접근이 필수적인 것으로 예상된다.

수치해석에 의한 유동해석방법에 있어서 가장 원초적인 방법이라 할 수 있는 소위 DNS(direct numerical simulation)의 방법이 현재 인기있게 시도되고 있는 것은 바로 이러한 이유에서이다. DNS의 방법이 가장 바람직스럽다는 것을 알면서도 종래에는 막대한 계산량과 속도상의 문제로 채용할 수 없었다. 현재 이 방법이 많이 시도되고 있는 것은 계산기 성능의 향상에 힘입은 바 크며, 앞으로는 계산기의 발달과 더불어 더욱 많이 적용될 전망을 보이고 있다.

한편, 이와같이 DNS의 방법으로 유동장을 구할 수 있고, 또한 실험에 의해 시시각각 변하는 유동 정보를 얻을 수 있다고 하여도, 그 정보를 이해하고 분석하는 문제는 별개이다. 이 경우 POD(Proper Orthogonal Decomposition)는 훌륭한 도

\*회원, 동아대학교 기계공학과

\*\*동아대학교 대학원

\*\*\*회원, 경동전문대학 건축설비과

구가 될 수 있다. 즉, 시간변화에 따라 얻어진 유동정보를 가장 효율 높은 직교함수를 사용하여 분해함으로써 주어진 유동장의 재현(적어도 통계적인 관점에서)이 가능할 뿐만 아니라 그 구조로부터 주어진 유동의 동적특성을 파악할 수 있는 것이다. 나아가, 이러한 방법은 비정상 유동에 따른 혼합효과를 파악하는 데에도 효과적인 것으로 예상된다.

보통, 유동은 레이놀즈 수가 증가함에 따라 주기적 유동에서 비주기적 및 난류로 천이하는 것으로 알려져 있다. 시간적으로 주기적인 유동장은 한 주기 동안만 데이터를 확보하면 모든 통계적 처리나 혼합해석(이것들을 이하에서는 ‘부차적 해석’이라 칭함)이 가능하다. 그러나, 유동이 비주기적으로 되면 문제는 확연히 달라진다. 즉, 부차적 해석을 위해서는 많은 시간에 걸친 데이터를 확보하거나, 유동장의 해석과 병행하여 수치해석해야 한다. 그러나, 전자의 방법으로는 데이터의 저장 및 처리의 어려움이 따르고, 후자의 방법에서는 그만큼 긴 계산시간이 요구된다. 이 때, POD에 의한 고유함수는 가장 적은 갯수의 함수로 유동장을 가장 잘 표현할 수 있으므로, 다른 어떠한 직교함수(예: Fourier)보다 효율성이 높다. 즉, 저장해야 할 정보가 최소화될 수 있는 것이다. 부차적 해석이 필요하다면, 이 고유함수들의 계수(시간의 함수)에 관한 상미분 방정식을 초기치 문제로 하여 적분하면 되므로 문제는 훨씬 간편해 지고 계산 시간도 많이 단축된다.

POD의 방법이 갖고 있는 또다른 강점으로 예상되는 것은, 어떠한 주기적 유동이 파라미터의 증가에 따라 어느 값에서 비주기적으로 변하는지 파악하는 데 효과적으로 이용될 수 있으리라 본다. 이것은, 고전적 안정성 해석이 정상 유동에서 비정상 유동으로의 천이를 다루는 것에 비해, 비정상적 유동이 다른 비정상적 유동으로의 천이를 다루는 확실한 방법이 아직까지 없다는 점을 감안할 때, 극히 중요한 점으로 생각된다. 물론, 이것은 실적용에 의해 확인되어야 할 것이다.

POD를 난류에 적용하는 아이디어는 Lumley<sup>(1)</sup>에서 비롯되었다. POD는 실험적으로 또는 수치해석적으로 구한 유동 데이터를 사용하여 유동의 공간적 응집 구조(coherent structure)를 가장 효과적으로 추출하는 방법이다. 최초에는 주로 실험적으로 구한 유동 데이터를 사용하였으나, 약 10여년 전부터는 DNS와 같은 수치해석 방법으로 구한 데

이터를 사용하기 시작하였다. POD의 방법을 유체 유동장의 응집 구조(coherent structure)의 추출에 이용할 수 있다는 주장이 Lumley에 의해서 제기된 이후 POD의 방법은 난류 또는 혼돈적 유동으로의 천이 과정을 해석하는 데 있어서, 또한 난류 유동의 응집 구조를 이해하는데 있어서 사용되어 왔다. Aubry 등<sup>(2)</sup>은 평판 상의 난류 경계층에 존재하는 응집 구조의 동적 특성을 저차원 동적 시스템(low-dimensional dynamical system)으로 해석하여, 난류 경계층에서 통상적으로 관찰되는 간헐(intermittency)현상과 분출 현상(bursting event)을 재현할 수 있음을 보여주었다. 그 후 Sirovich는 소위 스냅샷 방법(method of snap-shots)으로 불리우는 방법을 고안하여 2, 3차원 유동에서는 실제적으로 이 방법 외에는 계산기의 용량문제로 계산이 불가능함을 주장하였다.<sup>(3-5)</sup> 이 그룹의 주목할 만한 성과를 보면, 제트유동에서의 천이구조에 관한 연구,<sup>(6)</sup> 유한한 공간 내의 난류 자연대류 문제에 관 연구,<sup>(7,8)</sup> 평행 평판 사이의 채널(channel) 유동에 있어서 난류 경계층 유동의 응집 구조와 혼돈에 관한 연구,<sup>(9)</sup> 그리고 평판 후류의 자유 전단층(free shear layer) 유동의 응집구조와 동적 특성에 관한 연구<sup>(10)</sup> 등이 있다. Rempfer & Fasel<sup>(11)</sup>은 평판 상의 난류 경계층 유동에 대해 POD를 적용하여 분출 현상 등을 자세히 재현시켰다. POD의 유체에의 응용에 관한 보다 광범위한 소개를 Berkooz, Holmes & Lumley<sup>(12)</sup>가 다룬 바 있다.

한편 국내에서는, 박, 성과 정<sup>(13)</sup>이 Burgers 난류 모델에 대해 POD를 적용하여 기존의 Fourier 전개법과 비교하여 그 수렴도에서 훨씬 빠름을 보여 주었다. Park & Sirovich<sup>(14)</sup>는 난류 자연대류 문제에서의 저차원 모델링에 관한 연구를 소개하였고 김과 성<sup>(15)</sup>은 높은 레이놀즈 수의 2차원 유동을 이산와류 방법으로 수치해석하고 그 결과를 POD 처리함으로써 유동의 분석에 POD의 방법이 요긴하게 사용될 수 있음을 보였다.

그러나 POD의 중요성과 몇가지 성과에도 불구하고 POD해석을 시작하고자 하는 연구자들의 입장에서 몇가지 어려움이 있다. 우선, POD의 기본적 이론부터 체계적이고 세밀하게 설명한 문헌을 찾기 어렵다. 또한 계산알고리즘에 있어서도 구체적인 제시가 없어 전 연구자들의 시행착오를 그대로 답습해야만 하는 불합리점이 내재되어 있다. 본 연구는 이와 같이 POD를 시작하고자 하는 연구자

들에게 관련 이론을 체계적이고 세밀하게 설명함과 동시에 계산알고리즘을 구체적으로 제시함으로써 관련연구의 활성화에 기여하고자 한다. 또한 POD를 1차원 천수근사 방정식의 유동해에 구체적으로 적용함으로써 그 이해도를 높임과 동시에 본 유동 모델의 해석을 통해 발견한 몇가지 특이한 현상을 소개하고자 한다.

## 2. Proper Orthogonal Decomposition

### 2.1 기초이론

시간  $t$ 와 공간  $\mathbf{x}$ 의 벡터함수  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 가 있을 때, 시간통계적으로 이 함수를 가장 잘 표현할 수 있는 공간함수  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ 를 찾는 문제, 즉

$$\frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rangle^2}{\|\mathbf{U}(\mathbf{x})\|^2}$$

이 최대가 되도록 하는 함수  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ 를 찾는 문제는 다음과 같은 Fredholm 적분 방정식을 푸는 문제와 동일하다. (예를 들면, Riesz & Nagy<sup>(16)</sup>)

$$\int R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{U}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서,  $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 은 아래와 같은 자기상관 함수 (autocorrelation function)이다.

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \rangle \quad (2)$$

그리고  $\langle \cdot \rangle$ 는 앙상블 평균을 뜻하며, 본 연구에서는 시간에 대한 평균을 의미한다. 또한 내적 ( $\mathbf{u}, \mathbf{U}$ )은 다음과 같이 정의되었다.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{U}) = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{U} d\mathbf{x} \quad (3)$$

덧붙여,  $\|\mathbf{U}\|$ 는  $(\mathbf{U}, \mathbf{U})^{1/2}$ 이다. 한편 식 (2)의 우측에서 두 함수의 곱은 다이애딕 곱(dyadic product)을 의미한다. 구체적으로 나타내기 위해  $\mathbf{u}$ 를  $\mathbf{u} = [u, v]^T$ 라 한다면 식 (2)는

$$R = \begin{bmatrix} \langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}', t) \rangle & \langle u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}', t) \rangle \\ \langle v(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}', t) \rangle & \langle v(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}', t) \rangle \end{bmatrix} \quad (4)$$

의  $2 \times 2$  행렬이 된다. 식 (1)은 일반적으로 제1종 Fredholm 적분방정식으로 불리우지며,  $R$ 은 커널(kernel),  $\lambda$ 는 고유치,  $\mathbf{U}$ 는 고유함수이다.  $R$ 이 대칭함수이므로 고유치는 모두 양이다.

Hilbert-Schmidt이론에 의하면, 식 (1)의 해는

무수히 많다. (예 ; Courant & Hilbert<sup>(17)</sup>) 이것은, 주어진 벡터 함수  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 를 시간평균적인 의미에서 가장 잘 나타내는 고유함수와 이에 대응하는 고유치의 집합이 존재함을 의미한다. 이들 고유함수들을 우선  $(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 1$ 으로 정규화(normalization)시켰다고 하고 고유치가 큰 순서대로  $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots$ 라 하며 이에 대응하는 고유치를  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$ 이라 하자. 그러면, 이들 고유함수의 몇가지 주요한 성질을 설명하면 다음과 같다. 첫째, 이들 고유함수는 서로 직교이다. 즉,

$$(\mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{U}^{(l)}) = \delta_{kl} \quad (5)$$

이다. 다음, 이 고유함수들의 집합은 주어진 벡터 함수  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 를 아래와 같이 전개할 수 있다는 의미에서 완전하다(complete) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c^{(k)}(t) \mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

여기서, 시간함수  $c^{(k)}(t)$ 는 다음 식에 의해 구해진다.

$$c^{(k)}(t) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{U}^{(k)}) \quad (7)$$

전개계수 함수들은 시간적으로 비상관적이다 :

$$\langle c^{(k)} c^{(l)} \rangle = \delta_{kl} \lambda^{(k)} \quad (8)$$

다음, 벡터장  $\mathbf{u}$ 의 운동에너지의 시간평균은 고유함수들의 합을 2로 나눈 것과 같다 :

$$\langle \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \lambda^{(k)} \quad (9)$$

마지막으로, 이렇게 정의된 고유함수의 집합은 주어진 벡터장을 나타내는 데 있어서 모든 고유함수(예를들면 푸리에 함수, Tchebyshev 함수 등)들 중 가장 적합하다. 이것을 달리 표현하면, 이 방법은 주어진 벡터장을 표현하는 데 있어서 가장 적은 갯수의 고유함수들을 필요로 한다. 이러한 의미에서, 식 (1)로 정의된 고유함수의 집합을 사용해서 주어진 벡터장을 식 (6)과 같이 분해하는 방법을 적합적교분해(Proper Orthogonal Decomposition ; POD)라 부른다.

### 2.2 수치해석을 위한 알고리즘

주어진 문제는 식 (1)을 푸는 고유치 문제이다. 이에는 식 (1)을 직접 푸는 직접법과 Sirovich가 제안한 바 있는 스냅샷 방법이 있다. 여기서는, 2차원 문제에 있어서 변수가 2개인 경우에 대해 실

명하기로 한다. (다른 개수의 변수 그리고/또는 3차 원으로의 확장은 곧바로 가능하다.)

2.2.1 직접법

직사각형 내의 공간을 대상으로 한다고 가정하고, 그것을 균일 격자계로 분할한 뒤 식 (1)을 차분화한다면 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \cdots & [a_{1M}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \cdots & [a_{2M}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [a_{M1}] & [a_{M2}] & \cdots & [a_{MM}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_M \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_M \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,  $[a_{ij}]$ 와  $U_i$ 는 각각

$$[a_{ij}] = \Delta x \Delta y \begin{bmatrix} \langle u_i u_j \rangle & \langle u_i v_j \rangle \\ \langle v_i u_j \rangle & \langle v_i v_j \rangle \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$U_i = [U_i, V_i]^T \quad (12)$$

이다.  $\Delta x$ 와  $\Delta y$ 는  $x$  및  $y$ 방향의 격자간격이며,  $M$ 은 격자점의 총 개수이다. 그리고 하첨자  $i$ 와  $j$ 는 격자점의 index( $u, v, U, V$ 는 모두 1차원 배열)이다. 만약  $x$ -방향으로  $IM_x$ 개,  $y$ -방향으로  $IM_y$ 개의 격자점이 존재한다면  $M = IM_x \times IM_y$ 이다. 또한 만약 1차원 공간을 대상으로 한다면 식 (11)의  $\Delta x \Delta y$ 는  $\Delta x$ 로 바뀌어야 한다.

이제 문제는 식 (10)과 같이  $2M \times 2M$ 의 크기를 가진 행렬의 고유치 및 고유벡터를 구하는 것으로 귀착된다.

2.2.2 스냅샷 방법 (Methods of Snapshot)

Sirovich<sup>(3-5)</sup>는 식 (10)을 직접 푸는 방법은 1차원 문제를 제외하고는 사실상 어렵다고 판단하고 스냅샷이라는 새로운 방법을 제시하였다. 이 방법의 기본개념은 우선 고유함수  $U(x)$ 가 원래의 벡터함수  $u^{(n)}(x)$ 의 선형적 결합으로 나타낼 수 있다는 데서부터 시작된다:

$$U(x) = \sum_{n=1}^N q_n u^{(n)}(x) \quad (13)$$

여기서,  $u^{(n)}(x)$ 는  $u(x, t_n)$ 을 의미하며  $t_n$ 은 샘플(sample) 채취 시점을 나타낸다. 그리고  $N$ 은 샘플의 개수이다. 이것을 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Delta x \Delta y \sum_{j=1}^M \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M u_i^{(n)} u_j^{(n)} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M u_i^{(n)} v_j^{(n)} \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M v_i^{(n)} u_j^{(n)} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M v_i^{(n)} v_j^{(n)} \end{bmatrix} \sum_{i=1}^N q_i u_i^{(n)} = \lambda \sum_{n=1}^N q_n u^{(n)} \quad (14)$$

여기서,  $i=1, 2, \dots, M$ 이다. 위식에서 좌변의 벡터를 성분으로 나눈 뒤 나머지 항들과 결합하고 항의 순서를 바꾸면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M u_j^{(n)} u_j^{(i)} \Delta x \Delta y \right) q_i u_i^{(n)} = \sum_{n=1}^N \lambda q_n u_i^{(n)} \quad (15)$$

이 식에서 좌변의 벡터곱은 내적을 의미한다(즉, 식 (2)와 같은 다이애딕 곱(dyadic product)이 아님). 식 (15)의 제  $i$ 번째 항이 같아야 한다는 원리로부터 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^N C_{ni} q_i = \lambda q_n \quad (16)$$

여기서,  $n=1, 2, \dots, N$ 이며,  $C_{ni}$ 는 다음과 같다.

$$C_{ni} = \frac{\Delta x \Delta y}{N} \sum_{j=1}^M u_j^{(n)} u_j^{(i)} = \frac{1}{N} (u^{(n)}, u^{(i)}) \quad (17)$$

식 (16)은 이제  $N \times N$ 행렬에 대한 고유치 문제로 볼 수 있다. 그리고 이 행렬의 요소는 식 (17)에서 보는 바와 같이 시간적인 상관함수로 이루어진다.

이 방법을 앞의 직접법과 비교한다면, 직접법에서는 행렬의 크기가  $2M \times 2M$ 인데 비해 이 방법에서는  $N \times N$ 이다.  $M$ 이 데이터의 공간적인 개수,  $N$ 이 시간적인 개수인 점을 감안한다면, 3차원 문제의 경우와 같이 데이터의 공간적인 개수가 시간적인 개수보다 충분히 클 때에는 이 방법이 유리하다고 말할 수 있다. 경우에 따라서는  $M$ 이 매우 커서 직접법으로는 계산기의 기억용량 문제로 해결할 수 없을 때도 있을 것이다. 이 때 스냅샷 방법은 계산을 가능하게 한다는 의미에서 그 중요성을 인식할 수 있다. 그러나, 스냅샷 방법에 사용되는 행렬  $C$ 는 식 (17)에서 보는 바와 같이, 유동장이 필요한 시간만큼 계산된 뒤에야 만들어지기 때문에, 유동장의 계산과정에서  $2M \times N$ 개의 데이터를 기록한 뒤 이 데이터를  $C$ 의 계산시에 잃어들어서 하나의 변수에 저장해야 한다. 따라서 이 경우에 만약  $N$ 이  $M$ 과 같은 정도의 크기를 가진다면 스냅샷 방법이 지나는 이점은 사라진다. 이러한 점에서 앞으로  $M$ 과  $N$ 의 크기를 구체적인 유동문제에서

확인해 보는 일이 중요하다 하겠다.

$$A_2 z_2 = \lambda z_2 \quad (19a)$$

$$A_2 = P_1^T A_1 P_1 ; z_2 = P_1^T z_1 \quad (19b)$$

### 2.3 고유치 문제의 수치해석 방법

식 (10)에 의한 직접법이나 식 (16)에 의한 스냅샷 방법은 다같이 행렬의 고유치 문제이다. 이러한 문제를 푸는 기법은 현재 잘 알려져 있다. 그러나, POD의 연구분야는 두가지 중요한 특징을 가지고 있기 때문에 이 특징에 맞는 적합한 기법을 선택하는 것이 중요하다. 그 특징은, 첫째 우리에게 필요한 것이 모든 고유치나 고유함수(직접법에서는  $2M$ 개, 스냅샷 방법에서는  $N$ 개)가 아니고 가장 지배적인 모드 몇개라는 사실이다(그 갯수는 샘플의 성질에 따라 다르다). 그리고 둘째 특징은 문제에 따라서는 행렬의 요소 중 대각에서 멀리 떨어진 요소들은 그 값이 매우 작아서 무시할 수 있다는 점이다. 이는 주어진 벡터가 공간적으로 주기적인 경우를 제외하고는, 벡터의 자기상관함수는, 즉 식 (2)는, 일반적으로 상관거리  $|x-x'|$ 가 증가함에 따라 0에 가까와 진다는 점으로부터 이해할 수 있다.

주어진 고유치문제 즉 식 (10) 또는 (16)은 행렬  $A$ 와 벡터  $z$ 를 사용하여

$$Az = \lambda z \quad (18)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 우선 주어진 행렬에 대해 직교변환(orthogonal transformation)을 필요한 횟수만큼 수행하여 행렬을 3중 대각화(tridiagonalization)한다. 그 실제적인 방법에는 Jacobi 반복법, Housholder법 등이 있으나, 본 연구에서는 Rutishauer법을 적용하였다(이러한 방법들에 대해서는 예를들어 Jennings<sup>(18)</sup>의 문헌을 참조할 수 있다). Rutishauer의 방법은 행렬의 요소중에서 가장 멀리 떨어진 요소들을 차례대로 하나씩 소거해 나가는 방법으로서 특히 대칭 밴드 행렬에 효과적이다. 또한 이 방법은 Housholder법과 달리 요소들을 하나씩 제거해 나감으로써 대각에서 멀리 떨어진 0에 가까운 요소들에 대해서는 계산을 생략할 수 있는 이점이 있다. 행렬을 3중대각화하는 과정에서는 물론 직교변환의 정보를 축적(아래 식 (20b)의  $B$ 행렬)하여 이 다음 과정에서 고유벡터를 구할 때 사용할 수 있도록 해야 한다.

원래의 행렬을  $A_1$ 이라 하고 벡터를  $z_1$ 이라 한다면 하나의 직교변환 과정을 수행한 뒤의 행렬  $A_2$ 와 벡터  $z_2$  및 그 관계식은 다음과 같다.

여기서  $P_1$ 이 직교변환 행렬이다. 이 과정을 반복적으로 수행했을 때 최종적으로 3중 대각행렬  $\hat{A}$ 가 얻어졌다던

$$\hat{A} \hat{z} = \lambda \hat{z} \quad (20a)$$

$$z = B \hat{z} ; B = P_1 P_2 P_3 \dots \quad (20b)$$

와 같이 쓸 수 있다. 즉, 고유치는 변함없으며 고유벡터는 식 (20b)와 같이 변환되었다.

다음, 3중 대각행렬로부터 고유치를 구하는 과정에서는 이분법<sup>(18)</sup>을 사용하였다. 이 방법은 필요한 만큼의 지배적인 고유치를 구할 수 있게 하는 좋은 방법으로 생각된다. 마지막으로, 각 고유치에 해당하는 고유벡터는 인버스 파워어법(inverse power method)<sup>(18)</sup>를 적용하여 구하였다. 이를 위해 우선 식 (20a)를 다음과 같이 변형하였다.

$$\hat{z}' = (\hat{A} - \mu I)^{-1} \hat{z} \quad (21a)$$

$$\hat{z} = (\lambda - \mu) \hat{z}' \quad (21b)$$

$\mu$ 를  $\lambda$ 에 매우 가까운 값으로 선택한다면 식 (21b)에서 보는 바와 같이  $\hat{z}'$ 은  $\hat{z}$ 보다 매우 큰 값을 가지게 된다. 인버스 파워어법이란 우선 식 (21a)의 우변의 벡터를 임의로 가정한 뒤 좌변의 벡터를 계산하고 이것을 정규화(normalization)시킨 뒤 다시 우변에 대입하는 반복법이다. 실제에서는 이분법으로 구한 고유치를  $\mu$ 로 선택하였다. 고유치의 작은 에러가 있기 때문에 이렇게 하여도 식 (21a)에서의 역행렬은 무한대가 되지 않는다. 역행렬을 구할 때는 피벗(pivot)을 적용한 Gauss 소거법을 사용하였다. 이렇게 구한 고유벡터는 식 (20b)를 사용하여 원래의 벡터공간으로 변환시킴으로써 최종 고유벡터를 얻었다.

본 연구에서는 프로그램의 개발과정에서 간단한 행렬에 대해서는 그 답을 Mathematica로부터 확인함으로써 프로그램에 대한 신뢰도를 구축할 수 있었다.

## 3. 1차원 천수근사 유동문제에의 적용

### 3.1 수식화

본 연구에서 개발한 POD 프로그램의 적용을 위해 1차원 천수근사 유동문제를 고려하였다. 깊이  $H$ 만큼 액체를 담은 길이  $L$ 의 직사각형 탱크를 길

이방향으로 요동운동시킬 때 발생하는 탱크내 액체의 1차원 유동은 다음과 같은 무차원 천수근사 방정식으로 기술할 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \sin \omega t \quad (22)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1-h+\eta)u] = \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (23)$$

여기서 무차원 유속  $u(x, t)$ 는  $\sqrt{gH}$ , 무차원 시간  $t$ 는  $L/\sqrt{gH}$ , 무차원 좌표  $x$ 는  $L$ , 그리고 요동운동 없을 때의 자유표면을 기준으로 측정된 액체의 무차원 높이  $\eta$ 는  $H$ 에 의해 각각 무차원화시킨 결과이다. 이에 따라 이 문제는 윗 식에서 보는 바와 같이 레이놀즈수  $Re (=UL/\nu)$ , 무차원 요동가속도  $A$ , 무차원 요동각속도  $\omega$ , 자유표면의 감쇄를 위한 무차원 계수  $\gamma$ 와 같은 4개의 무차원 파라미터를 갖는다. 여기서  $\gamma$ 는 표면장력과 같은 효과를 고려한 것이라고 말할 수도 있으나, 본 연구에서는 단순히 수치해석의 안정성을 목적으로 추가된 것이다. 또한 식 (23)에서  $h(x)$ 는 탱크 바닥의 무차원 높이함수이나 본 연구에서는  $h=0$  즉 평탄한 바닥만을 고려하기로 하며  $h \neq 0$ 에 대해서는 추후 연구하기로 한다.

식 (22)와 (23)의 수치해석을 위하여  $0 \leq x \leq 1$ 의 공간을  $IM-1$ 개로 분할하고  $x$ 에 관한 미분을 모두 중심차분을 사용하여 차분화하였다. 그리고, 시간에 대한 적분은 간단한 오일러 방법을 사용하였다. 시간스텝  $\Delta t$ 는  $IM$ 과 다른 유동 파라미터에 따라 적절히 선택하였다.

이 문제에서 POD해석을 위한 유동장 벡터는  $\mathbf{u} = [u, \eta]^T$ 이며, 고유벡터는  $\mathbf{U} = [U, Y]^T$ 로 나타내도록 한다. 그리고 POD 해석은 주로 직접법을 사용하여 수행하였다. 스냅샷 방법도 같이 수행해 보았으나 1차원 문제에서는 별 도움이 되지 못했고 결과는 동일함을 확인하였다.

### 3.2 수치해석 결과 및 검토

본 연구에서는 POD의 적용에 있어서 POD해석 자체와 관련한 여러가지 관련 인자들의 영향을 파악하고 적절한 인자의 값을 결정해 보는 것이 주된 목표이다. 따라서, 유동문제와 관련한 무차원 파라미터는 다음과 같이 고정시켰다;  $Re=2000$ ,  $A=0.2$ ,  $\gamma=0.0013$ . 무차원 각속도  $\omega$ 도 대부분  $\omega=5$ 의 값으로 고정시켰다.

POD의 결과를 보기 이전에 먼저 유동장의 결과를 보도록 한다. Fig. 1은 세가지  $\omega$ 에 대한 유동장 해석결과로서 그림은  $x=1/4$ 에서의  $\eta$ 값을 시계열(time series)로 보인 것이다. 진폭은  $\omega$ 가 증가할수록 대체로 작아지나 불규칙성은 증가한다고 볼 수 있다. Fig. 2는  $\omega=5$ 에서의  $t_s=49T$ 부터 시작되는 한 주기동안의  $\eta$  및  $u$ 의 분포변화를 보인 것이다(여기서,  $T$ 는 무차원 주기로서  $T=2\pi/\omega$ 이다). 대체로,  $\eta$ 의 분포는  $x=1/2$ 에서 마디(node)를 갖고 있고  $u$ 는 볼록한 모양을 보인다. 특이한 것은, 약한 파동전면(wave front)이 최초에  $x=1$  근처에서 이미 형성되어 왼쪽으로 전파되고 한 주기 뒤에는  $x=0$  부근에 도달한다. 본 유동모델에서 공진점이  $\omega=\pi$ 임을 감안한다면 이 파동전면은 본 유동 시스템의 내재적 모드(intrinsic mode)임을 알 수 있다.

이제 POD의 결과를 보도록 하자. 우선, 유동장의 계산시에 사용된 그리드 수  $IM$ 의 변화에 따른 고유치의 값을 구해 보았다. Table 1은 세가지  $IM$ 에 따른 고유치의 값을 모드 12까지 보여준 것이다. 이 경우에는 모드 3까지가 전체 고유치의 합(즉 벡터장의 전체 운동에너지; 식 (9) 참조)의 99% 이상을 차지한다. 이 표에 의하면  $IM=601$ 을 기준으로 했을 때 모드 5까지의 고유치중 최대의 오차는  $IM=401$ 의 경우는 모드 5에서 0.35%,  $IM=201$ 의 경우는 모드 4에서 1.55%이다. 따라서 본 파라미터 조건에서는  $IM=401$ 이 적절함을 알 수 있다.

POD처리에서 자기상관함수의 계산시에 이용할 수 있는 데이터의 수(여기서는  $2M$ )는 물론 유동장의 수치해석시에 사용된 격자수(여기서는  $IM$ )에 의해 결정된다. 그러나 경우에 따라서는  $2M < IM$ 으로 할 필요성이 대두된다. 예를들면, 2차원 유동장의 계산시에 각 좌표방향으로  $IM$ 개의 격자수를 고려했다면  $M=IM^2$ 이고, 자기상관함수를 저장하기 위해서는  $2M^2$  즉  $2 \times IM^4$ 개의 변수단위 메모리를 필요로 한다. 이는 유동장을 오일러 방법으로 계산할 때 필요한  $2IM^2$ 개와 비교하면 엄청나다. 따라서 유동장은 컴퓨터가 허용하는 범위 내에서 가능한한 격자수를 많이 잡아 계산하고, 이에 대한 POD처리에서는 가능하면 이보다 적은 수의 데이터를 대상으로 하는 것이 어쩔 수 없는 선택으로 생각될 수 있다. 문제는 그렇게 하여 계산된 결과가 얼마만한 오차를 가지느냐 하는 점이다. 본 연

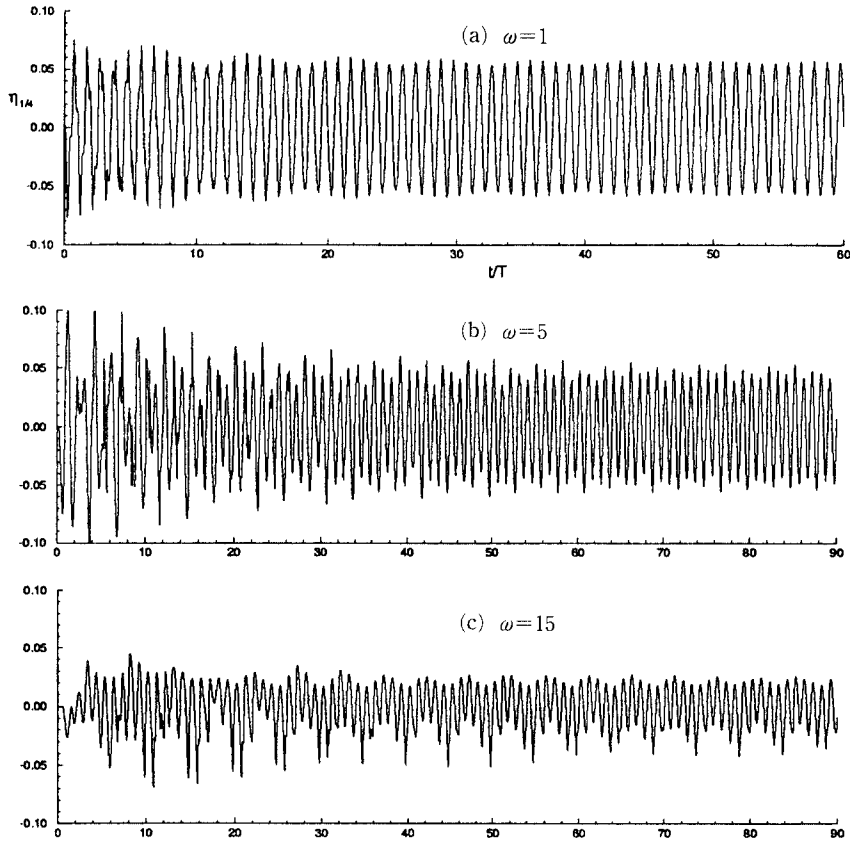


Fig. 1 Time series of  $\eta_{1/4}$  ( $\eta$  at  $x=1/4$ ) for three values of  $\omega$ . Refer to the text for the other parameter values.

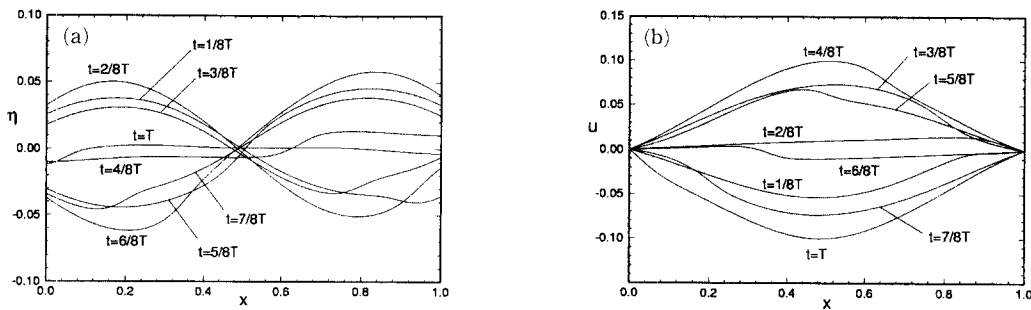


Fig. 2 Evolution of  $u$  and  $\eta$  distributions for one period after  $t_s=49T$  for  $\omega=5$ .

구에서는  $IM$ 을 401로 고정시키고  $M$ 을 201, 51, 21과 같이 바꾸어 가면서 결과의 차이를 확인해 보았다. 우선, 모드 5까지의 고유치는  $M=201$ 의 결과를 기준으로 했을 때  $M=51$ 의 경우에 최대 6.9%의 오차,  $M=21$ 의 경우에 최대 21.6%의 오차를 보였다. 그러나 고유벡터는 Fig. 3에서 보는 것처럼  $M=201$ 과  $M=21$ 에서 별 차이를 보이지

않고 있다. 특히 속도 고유벡터  $U$ 에서는 육안으로 식별이 불가능할 정도이다.  $M$ 을 작게 하여도 고유함수가 크게 변하지 않는 사실은 중요한 의미를 지닌다. 그것은, 유동의 지배방정식을 저차원의 고유함수 모드만으로 수치해석할 때는 고유치가 직접 계산에 참여하지 않기 때문이다.

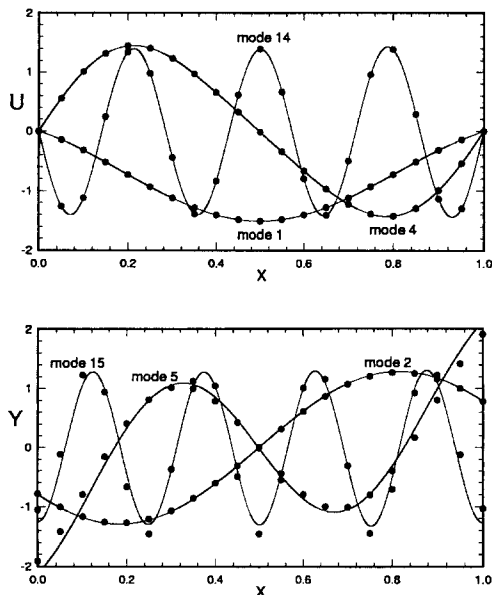
다음으로, POD용 데이터의 채취 시점  $t_s$ 의 효과

**Table 1** Eigenvalues of the autocorrelation function obtained from the one-dimensional wave equation with 1000 temporal samples (refer to the text for the flow parameters). Samples are taken from  $t/T=49$  at every 53 time-steps. The total number of time-steps for one period is 1200.

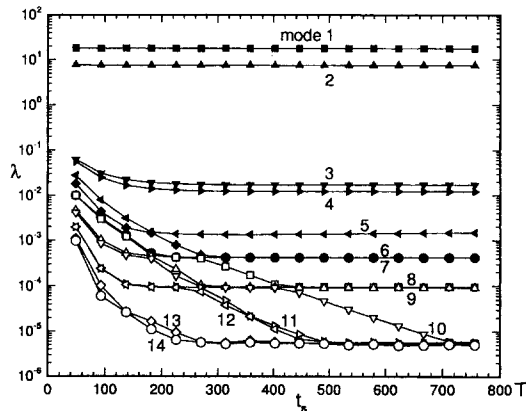
Mode No	10000λ		
	IM=201	IM=401	IM=601
1	0.18093E+02	0.18099E+02	0.18101E+02
2	0.76805E+01	0.76632E+01	0.76566E+01
3	0.62412E-01	0.62418E-01	0.62322E-01
4	0.54507E-01	0.55218E-01	0.55363E-01
5	0.27742E-01	0.27653E-01	0.27556E-01
6	0.17412E-01	0.17940E-01	0.18051E-01
7	0.96710E-02	0.99916E-02	0.10063E-01
8	0.95715E-02	0.98592E-02	0.99120E-02
9	0.44486E-02	0.46227E-02	0.46559E-02
10	0.39040E-02	0.41211E-02	0.41709E-02
11	0.18383E-02	0.19798E-02	0.20108E-02
12	0.17850E-02	0.19431E-02	0.19795E-02

를 조사해 보았다. Fig. 4는 그 결과로서, 낮은 모우드의 고유치가 일찍 정착하는 반면 높은 모우드의 고유치는 상당한 시간이 경과한 뒤에 일정한 값을 보인다. 높은 모우드의 고유함수가 일반적으로 공간적으로 파수(wave number)가 크며 파수가 큰 모우드는 감쇄가 빨리 이루어지는 점을 감안한다면 이는 특이한 현상이라 할 수 있다. 또한 Fig. 1(a)의 시계열 분포를 보면 유동장이  $t=30T$  이후는 대체로 시간 통계적으로 정상상태(steady state)인 것으로 파악할 수 있으나, Fig. 4는 모우드 번호 2까지의 성분만 그러하며 더 높은 모우드의 고유함수 성분은 시간적으로 더 후에야 정상적인 상태에 돌입하는 것을 알 수 있다. 이것은 시계열 데이터만으로는 유동의 완전한 정상상태 여부를 파악할 수 없음을 의미한다.

또한 이 그림에서 더욱 특이한 것은 모우드의 서열바뀜이다. 예를들면,  $t_s=225.7T$  때에 모우드 번호 9와 10의 고유치가 다음  $t_s$ 까지는 감소하다가



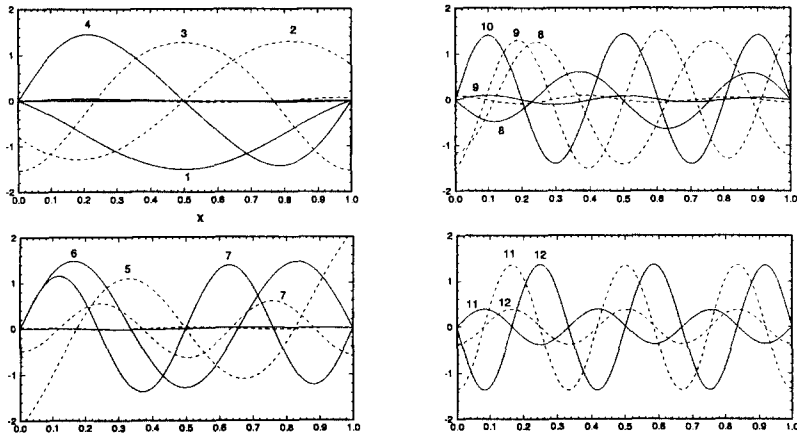
**Fig. 3** Three sets of eigenfunctions  $U$  and  $Y$  for  $\omega=5$ . Symbols denote the results given by  $M=21$  and the solid curves by  $M=201$ .



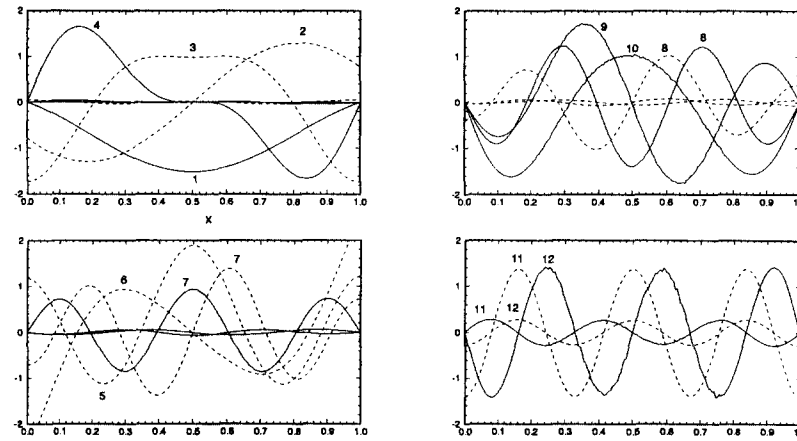
**Fig. 4** Convergence of eigenvalues with  $t_s$ .

그 다음부터는 갑자기 일정해 진다. 동시에, 모우드 번호 11과 12의 고유치는 반대로 일정하게 유지되다가 갑자기 감소한다. 모우드 번호는 고유치의 값이 큰 순서를 나타낼 뿐 특정 고유함수를 나타내지는 않기 때문에, 이러한 고유치 값의 증감양상에 있어서 갑작스런 변화는 모우드별 고유함수의 중요성이 바뀌는 것을 의미한다. 이것을 확인하기 위해서 Fig. 5에  $t_s=49T, 225.7T, 358.2T$ 에서의 고유함수를 모우드 번호 12까지 나타내었다. 예를들

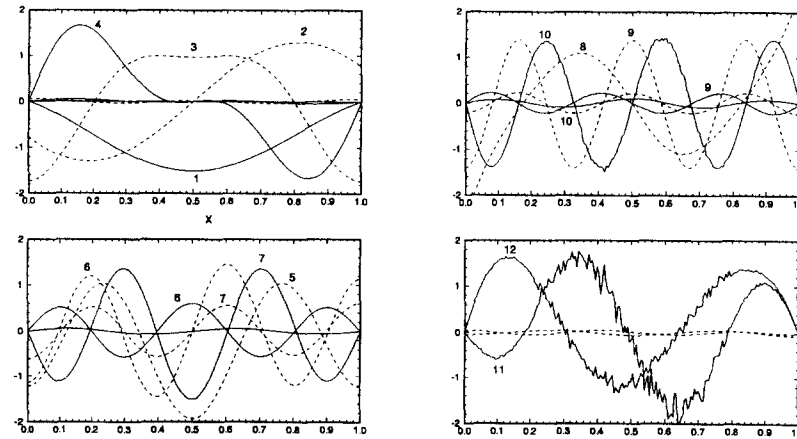




(a)  $t_s = 49T$



(b)  $t_s = 225.7T$



(c)  $t_s = 358.2T$

Fig. 5 Eigenfunctions  $U$  (solid) and  $Y$  (dashed) at three values of  $t_s$ .

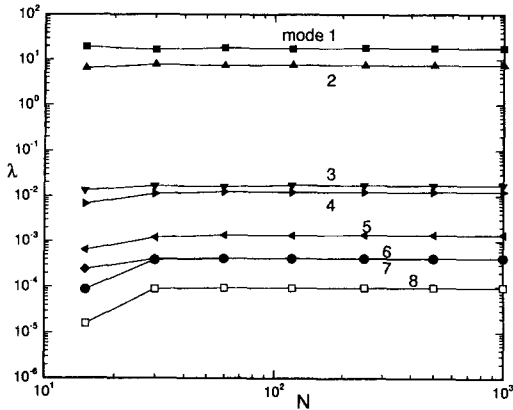


Fig. 6 Dependence of eigenvalues  $\lambda$  on the number of samples  $N$  at  $t_s=499T$ .

면,  $t_s=49T$ 에서 고유함수  $Y^{[5]}$ (Fig. 5(a))는 이 다음  $t_s$ 에서  $Y^{[6]}$ 으로 나타나고(Fig. 5(b)),  $U^{[6]}$ 는  $U^{[10]}$ 으로 나타난다. 또한,  $t_s=225.7T$ 에서  $Y^{[6]}$ ,  $Y^{[7]}$ ,  $U^{[8]}$ (Fig. 5(b))은 그 다음  $t_s$ 에서  $Y^{[8]}$ ,  $Y^{[6]}$ ,  $U^{[7]}$ (Fig. 5(c))로 각각 그 서열이 달라진다. 이러한 특이한 현상이 왜 발생하는지 그리고 이것이 실제 유동과 어떻게 구체적으로 연결되어 설명할 수 있을지에 대한 문제는 추후의 연구과제로 남겨둔다.

POD처리용 데이터는 시간적으로  $N$ 개의 시점에서 채취된다. 일정한 시간간격에서 데이터 채취가 이루어지되 가능하면 같은 위상에서의 데이터를 피하도록 하기 위해서 데이터 채취를 위한 시간스텝 간격은 소수(素數)가 되도록 하였다.  $\omega=5$ 의 경우 유동계산을 위한 한 주기동안의 시간 스텝 수는 1200이며 데이터 채취를 위한 시간 스텝 간격은 53으로 하였다. 이렇게 하면  $N=1000$ 개의 데이터를 채취하는 데는 채취 시작 시점  $t_s$ 부터 약 45 주기를 필요로 한다. 만약 유동이 시간 통계적으로 정상상태에 도달했다면 시간적인 채취수  $N$ 이 어느 정도 이상에서는 고유치와 고유함수가 변하지 않게 될 것이다. Fig. 6은  $t_s=499$ 에서  $N$ 의 변화에 따른 각 모드들의 고유치 값의 변화를 보인 것이다. 그림을 보면 대체로  $N=60$  정도부터 고유치의 값이 일정함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 POD의 기본적 이론을 체계적으

로 정리하고 그 수치해법을 위한 알고리즘을 상세히 설명함으로써 POD해석을 시작하고자 하는 연구자들에게 직접 도움이 되도록 하였다.

본 해석 알고리즘을 사용하여 1차원 천수 근사방정식의 유동 데이터에 적용하여 본 결과, 특정한 파라미터 조건에서 몇가지 특이한 현상을 발견하였으며 그것을 정리하면 다음과 같다.

(1) POD해석용 자기상관 함수를 계산하기 위해 유동계산시의 격자수보다 공간적으로 10배 더 작은 갯수의 데이터를 사용해도 고유함수는 큰 차이를 보이지 않는다.

(2) 데이터 채취 시작 시점을 달리 해 본 결과, 파수(wave number)가 일반적으로 적은 낮은 모우드의 고유함수는 일찍 일정해지고, 반대로 높은 모우드의 고유함수는 시간적으로 더 지연되어 일정해진다.

(3) 특히 높은 모우드의 고유함수들은 시간이 경과함에 따라 그 중요성이 서로 바뀌어진다.

#### 후 기

본 연구는 한국과학재단의 '95 특정연구과제(번호 95-0200-06-01-3) 지원에 의해 수행되었으며 이에 관계자 여러분에게 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Lumley, J. L., 1967 "The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows," In *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*(ed. A. M. Yaglom & V. I. Tatarski), Moscow: Nauka, pp. 166~176.
- (2) Aubry, N., Holmes, P., Lumley, J. L. and Stone, E., 1988, "The Dynamics of Coherent Structures in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer," *J. Fluid Mech.* Vol. 192, pp. 115~173.
- (3) Sirovich, L., 1987, "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. Part 1: Coherent Structures," *Q. Appl. Maths.*, Vol. 45/3, pp. 561~572.
- (4) Sirovich, L., 1987, "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. Part 2: Symmetries and Transformations," *Q. Appl. Maths.*

- Vol. 45/3, pp. 573~582.
- (5) Sirovich, L., 1987, "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures, Part 1: Dynamics and Scaling," *Q. Appl. Maths*, Vol. 45/3, pp. 583~590.
- (6) Sirovich, L., Kirby, M. and Winter, M., 1990, "An Eigenfunction Approach to Large Scale Transitional Structures in Jet Flow," *Phys. Fluids A*, Vol. 2 (2), pp. 127~136.
- (7) Sirovich, L. and Park, H., 1990, "Turbulent Thermal Convection in a Finite Domain : Part I. Theory," *Phys. Fluids A*, Vol. 2(9), pp. 1649~1658.
- (8) Park, H. and Sirovich, L., 1990, "Turbulent Thermal Convection in a Finite Domain : Part II. Numerical Results," *Phys. Fluids A*, Vol. 2(9), pp. 1659~1668.
- (9) Zhou, X. and Sirovich, L., 1992, "Coherence and Chaos in a Model of Turbulent Boundary Layer," *Phys. Fluids A*, Vol. 4(12), pp. 2855~2874.
- (10) Rajaei, M., Karlsson, S. K. F. and Sirovich, L., 1994, "Low-dimensional Description of Free-Shear-Flow Coherent Structures and Their Dynamical Behaviour," *J. Fluid Mech.* Vol. 258, pp. 1~29.
- (11) Rempfer, D. and Fasel, H. F., 1994, "Evolution of Three-Dimensional Coherent Structures in a Flat-Plate Boundary Layer," *J. Fluid Mech.* Vol. 260, pp. 351~375.
- (12) Berkooz, G., Holmes, P. and Lumley, J. L., 1993, "The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows," *Annu Fluid Mech.* Vol. 25, pp. 539~575.
- (13) 박신배, 성형진, 정명균, 1990, "Burgers의 난류유동장을 표현하는 K-L 전개와 푸리에 전개의 특성에 관한 연구," 대한기계학회 논문집, 제 14권, 제4호, pp. 953~959.
- (14) Park, H. and Sirovich, L., 1994, "Low-Dimensional Modeling of Turbulent Thermal Convection," *Proc. TRA Workshop-1994* (ed. by M. J. Lee, S. Kauh and H. J. Sung), pp. 17~31.
- (15) 김유익, 성형진, 1995, "국소교란이 가해지는 박리기포의 대형 구조," 대한기계학회 논문집, 제19권, 제4호, pp. 1134~1147.
- (16) Riesz, F. and Nagy, B., 1955, *Functional Analysis*. New York: Ungar.
- (17) Courant, R. and Hilbert, D., 1953, *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I. Interscience Publishers, Inc., New York.
- (18) Jennings, A., 1977, *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons.