

<논 문>

이중시간전진법과 $k-\omega$ 난류모델을 이용한 익렬 내부 비정상 유동해석

최 참 호* · 유 정 열**

(1997년 5월 6일 접수)

Unsteady Cascade Flow Calculations of Using Dual Time Stepping and the $k-\omega$ Turbulence Model

Chang Ho Choi and Jung Yul Yoo

Key Words : Unsteady Transonic(비정상 천음속), Dual Time Stepping (이중시간전진법), $k-\omega$ Turbulence Model ($k-\omega$ 난류모델), Mixed Time Stepping (혼합시간전진법), Multigrid(다중격자)

Abstract

A numerical study on two-dimensional unsteady transonic cascade flow has been performed by adopting dual time stepping and the $k-\omega$ turbulence model. An explicit 4 stage Runge-Kutta scheme for the compressible Navier-Stokes equations and an implicit Gauss-Seidel iteration scheme for the $k-\omega$ turbulence model are proposed for fictitious time stepping. This mixed time stepping scheme ensures the stability of numerical computation and exhibits a good convergence property with less computation time. Typical steady-state convergence accelerating schemes such as local time stepping, residual smoothing and multigrid combined with dual time stepping shows good convergence properties. Numerical results are presented for unsteady laminar flow past a cylinder and turbulent shock buffeting problem for bicircular arc cascade flow is discussed.

1. 서 론

터보기계의 설계와 성능 예측을 위해서는 정익-동익간의 상호작용에 관한 연구가 필수적이다. 정익-동익 상호작용은 비정상유동이므로 비정상 Navier-Stokes 방정식을 풀어야 한다. 비정상 Navier-Stokes 방정식의 해는 시간전진법에 의하여 구하는데, 이에는 내재적방법(implicit method)과 외재적방법(explicit method)이 있다. 내재적방법은 외재적방법에 비하여 더 큰 시간간격을 허용

하며, 수렴성이 좋다. 그러나 Navier-Stokes 방정식은 비선형이고, 특히 충격파와 같은 불연속이 존재하는 경우에는 내재적으로 풀기에는 많은 계산용량을 요구하며 경계조건의 적용이나 프로그래밍상의 어려움이 있다. 이에 반하여 외재적방법은 수치해석의 안정성으로 인하여 시간간격에 제한을 받지만 이전단계에서 구하여진 해를 직접 사용함으로써 계산 알고리즘 구성, vectorization 및 경계조건의 처리가 용이하다. 정상 상태의 해를 구할 때, 외재적 방법에 따른 수렴가속 방법이 많이 개발되었고, 또한 매우 효율적인 것으로 여러 기존 논문^(1,2)에서 증명되었으므로 본 연구에서는 운동량방정식에 대하여는 보편적인 외재적방법인 4차 Runge-Kutta

*서울대학교 대학원 기계공학과

**회원, 서울대학교 기계공학과

방법을 적용한다.

한편 터빈익렬 유동에 미치는 충격파 및 경계층의 영향은 매우 크며, 충격파와 경계층의 상호작용, 충격파 하류에서의 유동박리 현상 및 이에 따른 후류 유동장 해석을 위해서 난류 계산이 수행되어야 한다. 그러나 난류 방정식은 원천항(source term)의 존재로 인하여, 이중시간전진법(dual time stepping)을 사용하더라도 가공시간(fictitious time)에 대하여 외재적방법으로 해를 구하기에는 시간간격의 제한이 크고 수렴성이 매우 나쁘므로 일반적으로 계산이 간단한 Baldwin-Lomax 대수 난류모델⁽³⁾이 주로 사용된다.⁽¹⁾ 그러나 이 난류모델은 복잡한 후류나 역압력구배가 있는 유동장을 잘 예측하지 못하는 단점이 있다.⁽⁴⁾ 그러므로 본 연구에서는 Wilcox,⁽⁵⁾ Liu와 Zheng⁽⁶⁾이 사용한 저 Reynolds수 난류모델의 일종인 $k-\omega$ 모델을 사용한다. 저 Reynolds수 $k-\varepsilon$ 난류모델은 벽 근처에서 감쇠함수(damping function)를 필요로 하는데 이런 감쇠함수의 존재로 인하여 해의 부정확성과 수렴성의 문제가 발생한다.^(7,8) 그러나 $k-\omega$ 모델은 다른 저 Reynolds수 난류모델과는 달리 벽 근처에서 감쇠함수를 필요로 하지 않으므로 수학적으로 간단하며, 수렴성이 우수하고 여러 가지 형상에서 $k-\varepsilon$ 모델보다 좋은 결과를 나타내는 것으로 보고되었다.^(5,9) 그리고 Menter⁽¹⁰⁾는 박리유동에서 매우 고무적인 결과를 보고하였다. 한편 이 모델 또한 외재적으로 해를 구하기에는 많은 제한이 있으므로, 원천항의 적절한 가정을 통하여 외재적방법과 같은 정도의 계산량을 요구하는 내재적방법을 적용하였다. 이러한 혼합된 외재적-내재적 시간전진법은 Turner와 Jennions⁽¹¹⁾도 시도하였는데, 그들은 비압축성유동의 계산에 주로 쓰이는 Patankar⁽¹²⁾의 비엇갈림 격자계를 이용한 내재적방법을 $k-\varepsilon$ 난류모델에 적용하였다.

그러나 비정상유동을 해석할 경우에는 이러한 수렴가속방법들을 직접 적용할 수 없으므로, 본 연구에서는 Arnone 등⁽¹³⁾이 소개한 가공시간(fictitious time)을 도입한 이중시간전진법을 적용하여 지배방정식을 외재적 수렴가속방법을 사용할 수 있는 형태로 바꾸어 해를 구한다. 그리고 실제 시간에 대하여 내재적인 시간전진법을 사용한다면 시간간격을 크게 할 수 있고, 가공시간에 대해서 외재적 수렴가속방법을 쓰게 되므로 많은 계산량을 필요로 하는 기존의 내재적인 시간전진법으로 해를 구해야

하는 어려움이 없게 된다. Liu와 Ji⁽¹⁴⁾는 이중시간전진법과 $k-\omega$ 난류모델을 사용하여, 진동하는 익렬주위의 유동에 대하여 연구하였다. 그들은 또한 비정상 박리유동에 대하여 연구가 필요하다고 주장하였다.

따라서 본 연구에서는 이중시간전진법을 적용하며, 가공시간에 대하여 운동량방정식에는 외재적인 4차 Runge-Kutta 시간 전진법을 사용하고 $k-\omega$ 모델 방정식에는 내재적인 시간전진법을 사용한다. 본 연구에서 제안된 비정상 수치해법은 실린더를 지나는 층류 압축성유동과 충격파와 경계층의 상호작용에 의하여 박리가 발생하는 난류 비정상 복원호형익렬(bicircular arc cascade)유동^(15~17)에 대하여 적용된다.

2. 지배 방정식 및 수치해석방법

2.1 지배방정식

압축성 2차원 Navier-Stokes 방정식과 $k-\omega$ 난류방정식은 일반 좌표계에서 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E_c}{\partial \xi} + \frac{\partial F_c}{\partial \eta} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + S \quad (1)$$

여기서 E_c , F_c 는 대류항을 나타내고 E_v , F_v 는 확산항을 나타낸다. 그리고 S 는 원천항을 나타낸다. 자세한 사항은 최창호와 유정열⁽²⁾을 참고하기 바란다.

2.2 지배방정식의 이산화

식 (1)의 형태로 일반좌표계에 나타난 지배방정식을 유한체적법으로 차분화하기 위하여 하나의 계산격자에 대하여 적분하고 Green의 정리를 적용한다. 그리고 격자의 중심에 유동변수가 저장되는 비엇갈림격자계(cell centered non-staggered grids)와 중심점법(midpoint rule)을 이용하여 이산화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = R \quad (2)$$

2.3 시간전진법

2.3.1 Navier-Stokes 방정식

외재적 시간전진법(time stepping scheme)인 4단

계 Runge-Kutta 방법을 사용하여 (2)의 형태로 표현된 이산화식을 정상상태에 이를 때까지 시간에 대한 적분을 수행한다.

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= Q^n \\ Q^{(1)} &= Q^{(0)} + \alpha_1 R(Q^{(0)}) \\ Q^{(2)} &= Q^{(0)} + \alpha_2 R(Q^{(1)}) \\ Q^{(3)} &= Q^{(0)} + \alpha_3 R(Q^{(2)}) \\ Q^{(4)} &= Q^{(0)} + \alpha_4 R(Q^{(3)}) \\ Q^{n+1} &= Q^{(4)} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\alpha_1=1/4$, $\alpha_2=1/3$, $\alpha_3=1/2$, $\alpha_4=1$ 이고, 잔류량 $R(Q)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$R(Q) = \Delta t [C(Q) - D(Q)]$$

여기서 $C(Q)$ 는 대류항을 $D(Q)$ 는 가점성항을 포함한 확산항을 나타낸다. 위의 적분은 시간에 대하여 2차의 정확도를 가진다. 공간 미분에 대하여는 중심차분법을 사용한다. 계산시간을 줄이기 위하여 점성항과 가점성항은 첫단계에 한번만 계산하고 대류항은 매 단계에서 계산한다.

2.3.2 $k-\omega$ 난류방정식

식 (1)의 형태로 표현된 난류식을 시간에 대하여 후방차분을 한 뒤 정리하면 다음과 같다.

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial(A - A_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(B - B_v)}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial Q} \right\} \right] \Delta Q = R^n \quad (4)$$

여기서 각 항은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q^{n+1} - Q^n, \\ R^n &= \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (E_v^n - E^n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (F_v^n - F^n) + S^n \right], \\ A &= \frac{\partial E_c}{\partial Q}, \quad B = \frac{\partial F_c}{\partial Q}, \quad A_v = \frac{\partial E_v}{\partial Q}, \quad B_v = \frac{\partial F_v}{\partial Q} \end{aligned}$$

식 (4)를 앞의 절에 소개된 방법을 사용하여 이산화한다. 대류항은 유동의 방향을 따라 전방차분 또는 후방차분하고 확산항은 중심차분한다. 원천항의 적절한 처리는 수치적 안정성에 대단히 중요한 영향을 미친다. 본 연구에서는 Wilcox⁽¹⁸⁾와 같이 원천항에서 k/ω 와 생성항 P 를 상수로 가정하여 시간에 대하여 선형화하므로 $\partial S/\partial Q$ 이 대각행렬(diagonal matrix)이 되어 결과적으로 k 식과 ω 식을 분리시킬 수 있다. 시간에 대하여 Gauss-

Seidel 반복계산을 하며 전진한다. 이전의 연구⁽²⁾에서는 근사인수분해(approximate factorization) 방법을 적용하였으나, 본 연구의 결과로는 Gauss-Seidel 반복계산법이 근사인수분해 방법과 수렴 회수에서 큰 차이가 없고, 각 반복계산에서 시간이 적게 소요되므로 이를 채택하였다. 그리고 $k-\omega$ 방정식은 평균유동 방정식과 분리시켜 계산한다. 즉, 각 시간단계에서 $k-\omega$ 방정식은 이전에 계산된 평균 유동값들에 의하여 계산된다. 한편, Navier-Stokes 방정식은 이전의 시간단계에서 계산된 와점성계수값과 난류 운동에너지값을 사용하여 풀다.

2.4 수렴 가속방법

본 연구에서는 (1) 국소시간간격, (2) residual smoothing, (3) 다중격자(multigrid)의 3가지 방법을 사용하여 수렴을 가속한다. 이 중 (1) 국소시간간격 방법만이 $k-\omega$ 난류방정식에 적용되었다.

2.4.1 국소시간간격

정상상태로의 수렴을 가속시키기 위하여 국소적으로 가변되는 시간간격을 이용하는데, 선형 안정성 이론에 의하여 각 격자점에 대한 최적 시간간격을 결정한다.⁽²⁾

Residual Smoothing

Runge-Kutta scheme에 대하여 적용하는데, 이런 내재적 residual smoothing으로 시간 전진법의 수치적 안정도를 높일 수 있다. 본 연구에서는 Jameson⁽¹⁹⁾이 개발한 방법을 채택한다. 2차원 유동에 대하여 다음과 같이 쓰여진다.

$$(1 - \beta_\epsilon \nabla_\epsilon \Delta_\epsilon) (1 - \beta_\eta \nabla_\eta \Delta_\eta) \bar{R} = R$$

여기서 \bar{R} 은 smoothing한 뒤의 잔류량이다. 그리고 β_ϵ , β_η 는 Martinelli⁽²⁰⁾를 따라서 주었다.

2.4.2 다중격자

당초에는 타원형 방정식의 해법으로 개발되었지만, Jameson⁽²¹⁾에 의해서 쌍곡선형 방정식에 적용되었다. 기본적인 방법은 순차적으로 성근 격자를 사용하여 조밀한 격자의 해를 빠르게 전파시키는 것이다. 결과적으로 빠르게 교란(disturbance)을 제거한다. 본 연구에서는 Brandt⁽²²⁾와 Jameson⁽²³⁾의 full approximation storage(FAS) 방법을 사용한다. 성근 격자는 격자 간격을 두배로 함으로써 구한다. 즉 조밀한 격자를 각각의 방향으로 한 줄 건너 제거함으로써 구한다. 그리고 해는 다음과 같

이 질량, 운동량, 에너지를 보존하는 방법을 사용하여 정의한다.

$$(J^{-1}Q^{(0)})_{2h} = \sum (J^{-1}Q)_h \quad (5)$$

여기서 하층자는 격자 간격을 나타낸다. 그리고 합은 $2h$ 격자를 구성하는 격자들에 적용된다. 성근 격자해에 조밀한 격자해의 영향을 주기 위해 가중항 P 를 첨가한다. Q_{2h} 가 식 (5)를 따라 구해진 다음에 가중항 P_{2h} 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_{2h} = \sum R_h(Q_h) - R_{2h}(Q_{2h}^{(0)}) \quad (6)$$

그리고 이 항은 다음과 같이 잔류항 R_{2h} 에 더해지며 시간전진법에 사용된다.

$$R_{2h}^* = R_{2h}(Q_{2h}) + P_{2h} \quad (7)$$

위의 (5)~(7)의 방법들은 순차적인 성근 격자계에 적용된다. 그리고 성근 격자에서 계산된 교정량 (correction)은 다시 조밀한 격자계로 선형내삽법을 사용하여 전달된다. V 형의 다중격자 방법이 사용된다. 조밀한 격자계에서 시작하여 순차적으로 성근 격자계로 진행되며 가장 성근 격자계에 도달했을 때 조밀한 격자계로 교정량을 전파한 후 해에 더해진다. h 격자에 한번의 Runge-Kutta 시간전진법이 사용되며, $2h$ 격자에는 두번, 나머지 격자에는 세번의 Runge-Kutta 시간전진법이 사용된다. 성근 격자계에서는 난류식은 계산되지 않으며, 조밀한 격자에서 구한 해를 식 (5)와 같은 방법을 사용하여 성근 격자에 사용한다. 각각의 격자에서 경계조건은 동일한 방법으로 적용되며, 계산시간을 줄이기 위하여 성근 격자에서 가점성 모델은 상수 계수를 사용하는 2차의 가점성 모델로 교체된다.

2.5 경계조건

본 연구에서는 경계면의 바깥에 가상격자 (artificial cell)를 둬으로써 경계에서의 계산을 내부점에서와 같은 방식으로 수행하였다. 2차원 익렬 계산에서는 입구, 벽, 주기면 및 출구에서의 4가지 경계조건이 적용된다. 유입면은 비점성 영역으로 생각할 수 있으므로 Euler 방정식에서와 같이 특성곡선방법을 이용한다. 그리고 입구에서 k 와 ω 값은 Menter^[24]를 따라 주었다. 아음속 유출면에서는 출구 정압이 주어지고 나머지 유동변수는 내부로부터 외삽하여 구한다. 블레이드 벽에서는 속도성분과 난류 에너지 k 에 대하여 점착조건을 사용하며, 압력은 이웃하는 격자로부터 외삽하고, 온도는 단열

조건을 준다. 비소산율 ω 는 벽에 가까워질수록 다음과 같은 점근조건을 만족시켜야 하는데, 본 연구에서는 벽에서 첫 번째 격자에 이 조건을 적용한다.

$$\omega \rightarrow 6\nu_w/\beta y^2 \text{ as } y \rightarrow 0$$

여기서 y 는 벽에서부터의 거리를 나타낸다. 주기 경계면에서는 모든 유동변수에 대하여 동일한 주기 점에 놓이는 각각의 유동변수 값을 같게 준다.

2.6 인공 소산

본 연구에서 Navier-Stokes 방정식에 적용된 이산화 방법은 모든 유동변수가 격자의 중심에 저장되는 비엇갈림격자계를 사용한, 중심차분법이다. 그러므로 점성 계산일지라도 경계층 외부에서는 점성항이 무시될 수 있으므로 압력의 odd-even decoupling이 생기게 되기 때문에 이를 감쇠하기 위하여 Martinelli^[20]에 의하여 고안된 인공 소산 (artificial dissipation) 항의 고유치 조절방법 (eigenvalue scaling)을 도입함으로써 4차 인공 소산항을 추가한다. 그리고 충격파를 선명하게 포착하기 위하여 2차의 인공 소산항을 첨가한다. 난류모델 방정식은 상류차분법을 사용하기 때문에 인공소산항을 첨가할 필요는 없다. 다음은 본 연구에 쓰인 인공소산항을 나타낸다.

$$\begin{aligned} D(Q) &= D_\varepsilon(Q) + D_\eta(Q) \\ D_\varepsilon(Q) &= \nabla_\varepsilon(S_{2\varepsilon}\Delta_\varepsilon Q) + \nabla_\varepsilon(S_{4\varepsilon}\Delta_\varepsilon\nabla_\varepsilon\Delta_\varepsilon Q) \\ D_\eta(Q) &= \nabla_\eta(S_{2\eta}\Delta_\eta Q) + \nabla_\eta(S_{4\eta}\Delta_\eta\nabla_\eta\Delta_\eta Q) \end{aligned}$$

경계층 내부에서는 유체의 점성이 충분히 커서 가점성의 추가는 해의 정확성에 영향을 미치지므로 적절한 scaling으로 가점성항의 영향을 줄인다.

2.7 지배방정식의 형태변화

2.7.1 Navier-Stokes 방정식

Euler 방정식에 대하여 Jameson^[23]이 소개하였듯이, 식 (1), (2)는 가공시간 τ 를 도입함으로써 다음과 같이 정상상태의 해를 구하는 방법을 적용할 수 있는 형태로 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial Q}{\partial t} - R(Q) = R^*(Q) \quad (8)$$

그러므로 새로운 잔류항 R^* 을 줄이기 위하여, 정상상태 계산에 쓰이는 모든 수렴가속방법을 가공시

간 τ 에 대해서 전진하면서 쓸 수 있게 된다. 실제 시간 t 에 대한 미분은 내재적인 2차의 정확도를 가지는 후방차분법을 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{3Q^{n+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} - R(Q^{n+1}) = R^*(Q^{n+1}) \quad (9)$$

여기서 n 은 실제 시간간격을 나타낸다. 실제시간이 진행되는 동안에, 가공시간 τ 에 대하여 국소시간간격, residual smoothing, 다중격자 등의 수렴가속방법이 쓰여 빠르게 잔류량 R^* 을 영으로 만든다. 그래서 식 (2)의 실제 시간에 대한 방정식을 만족시키도록 한다. 식 (9)는 시간에 대하여 내재적이므로 수치적 안정성이 가공시간 $\Delta\tau$ 의 크기에 대하여 큰 문제가 되지 않지만, $\Delta\tau$ 가 실제시간간격 Δt 보다 커지면 안정성에 문제가 있으므로 다음과 같이 $\Delta\tau$ 의 크기를 제한한다.

$$\Delta\tau = \min(\Delta\tau, \Delta t) \quad (10)$$

위의 식 (10)과 같이 시간간격을 제한하면, 수치적 안정성이 보장되므로 실제시간간격 Δt 는 수치적 정확도에 의해서 결정될 수 있다. 잔류량 R^* 이 수렴범위안에 들면 $\partial Q/\partial t$ 을 새로운 값으로 교체한 뒤 다시 τ 에 대한 시간전진법을 시작한다. 다음 시간에서 좋은 초기값을 제공하기 위해서 다음과 같은 식을 사용한다.

$$Q^* = Q^n + \frac{3Q^n - 4Q^{n-1} + Q^{n-2}}{2} \quad (11)$$

$k-\omega$ 난류모델식

식 (4)를 식 (8), (9)와 같이 잔류항에 $\partial Q/\partial t$ 을 추가하여 변형한다. 그러나 가공시간 τ 에 대하여 운동량방정식과 같이 외재적인 시간전진법을 사용하면 원천항의 영향으로 수치적으로 불안정해지므로, 내재적인 시간전진법을 사용한다. 그리하여 운동량방정식과 난류방정식을 순차적으로 풀어서 잔류량 R^* 가 영이 될 때까지 τ 에 대하여 전진한다. 그러나 식 (11)과 같은 초기화는 난류에너지가 벽 근처에서 음수가 나올 수 있으므로 사용하지는 않았다.

결과적으로 본 연구에 쓰인 수치방법은 기존의 외재적방법에 $\partial Q/\partial t$ 항을 새로이 추가한 뒤 같은 방법으로 시간에 대해 전진하므로 쉽고 빠르게 해를 구할 수 있다는 것이다.

3. 결과 및 검토

3.1 실린더 주위의 유동해석

실린더를 지나는 유동에 대한 계산을 수행하였다. Reynolds수가 200인 층류유동의 경우로 일정한 주기로 와류가 떨어져나가는 현상이 발생한다. 이때의 와류의 생성주기는 실험에 의해서 알려져 있는데, Strouhal 수의 형태로 0.164이다. 본 연구에서는 입구 마하수는 0.2로 주었는데, 이에 따른

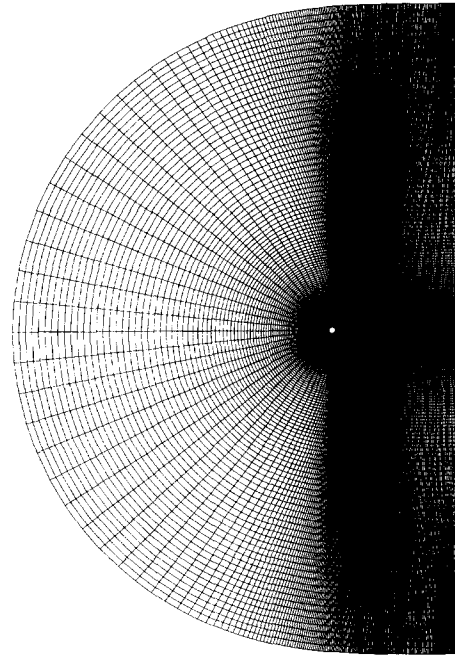


Fig. 1 A 321 × 121 C-type grid for a circular cylinder

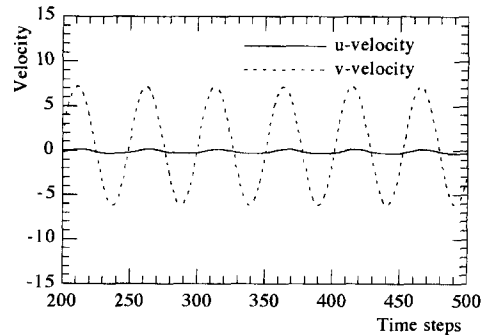


Fig. 2 Velocity variation at a point (in this case, the nearest grid point along the centerline) downstream of the cylinder at $M=0.2$ and $Re=200$

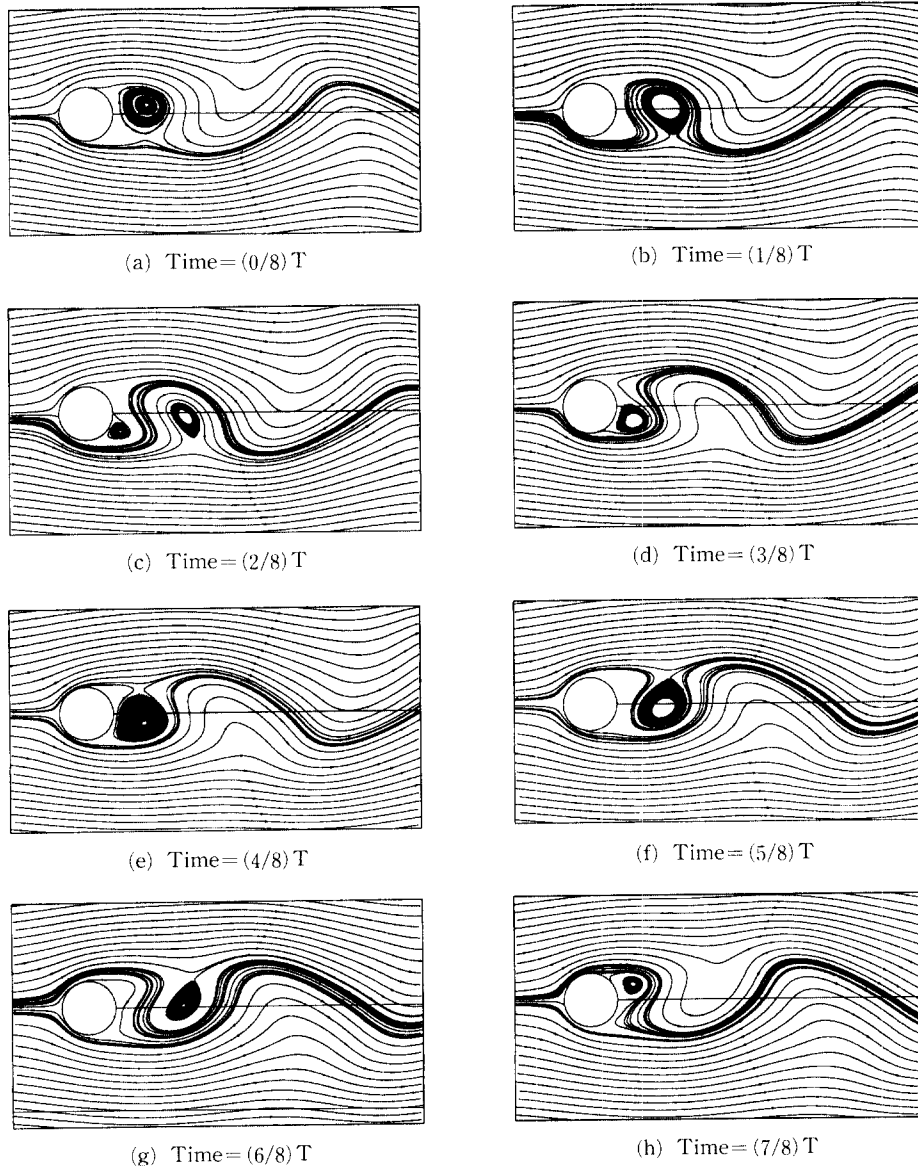


Fig. 3 Instantaneous streamlines around a circular cylinder for one period

Strouhal 수는 0.162로 실험치와 잘 일치한다. 출구에서 정확한 경계조건을 주기 위하여 대류경계조건(convective boundary condition)을 주었다. 계산시간간격은 한 주기에 시간전진이 약 50번이 되도록 하였다. Fig. 1에 계산에 쓰인 C-type의 321×121 격자를 나타내었다.

Fig. 2에 실린더 뒷면으로부터 중심선을 따라 첫 번째 격자의 속도를 표시하였는데, 주기성을 나타

냄을 알 수 있다. Fig. 3에 한 주기동안의 유선을 순차적으로 나타내었는데 주기적으로 보텍스가 생성되는 것을 알 수 있다. 경계층에서의 CFL수는 약 70이고 바깥에서의 CFL수는 약 0.9로 각 시간전진에서 수렴하는데, 6회정도의 다중격자 시간전진이 필요하였다. 수렴한계는 다중격자 시간전진에서 밀도의 상대변화량($\nabla\rho/\rho_\infty$)의 rms값이 10^{-6} 이하가 될 때로 하였다.

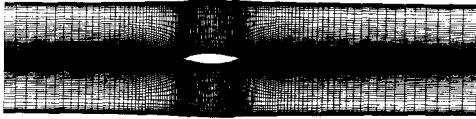


Fig. 4 Two 161 × 65 H-type grid blocks for the calculation of shock buffeting flow

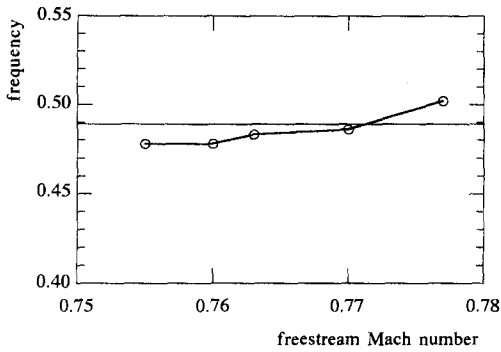
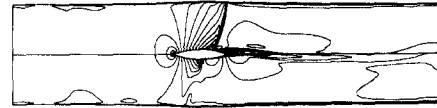


Fig. 5 Reduced frequencies for various freestream Mach numbers

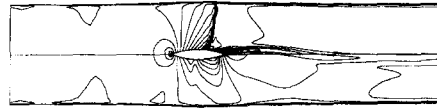
3.2 복원호형 유동

압축성 비정상 난류유동에 대한 실험적연구는 그 어려움으로 인하여 수행된 예가 많지 않다. 1976년부터 복원호형익렬을 대상으로 하여 충격파에 의한 경계층의 박리로 인한 비정상유동(shock buffeting)에 대한 실험적 연구⁽¹⁵⁻¹⁷⁾ 및 수치해석적 연구가 이루어졌다. 실험은 NASA Ames의 풍동에서 이루어졌다. 18% 두께의 복원호형익렬에 대한 실험이 이루어졌는데, 풍동의 윗벽과 아래벽은 벽간의 간섭과 원하지 않은 조건에서 초킹을 방지하기 위하여 풍동이 없을 경우의 유선을 따라서 설계되었다. 대략 자유유동의 마하수가 0.74에서 0.78사이에서 비정상유동을 보였으며, 이때 reduced frequency는 약 0.49로 보고되었다. 0.78이상의 자유유동 마하수에서는 유동은 정상상태가 되며, 익렬 끝 부근에서 충격파가 발생한다. 계산은 실험 조건과 같은 조건을 주기 위하여 Fig. 4에서 보는 것과 같이 위와 아래벽면을 McDevitt 등⁽¹⁵⁾을 따라서 주었으며, 점착조건을 주었다. 복원호형익렬의 위와 아래로 두 개의 격자계를 사용하였으며(multi-block method), 각각의 격자는 165×65를 주었다. 벽에서 첫 번째 격자의 거리는 $y^+ < 1$ 로 하기 위하여 코드길이의 약 4×10^{-6} 배를 주었다.

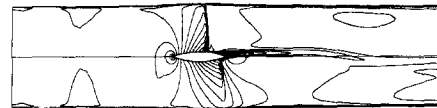
3단계의 다중격자계를 사용하였다. 한주기에 약



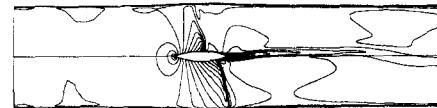
(a) Time = (0/7) T



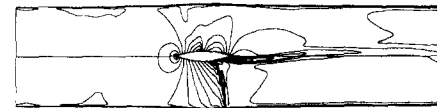
(b) Time = (1/7) T



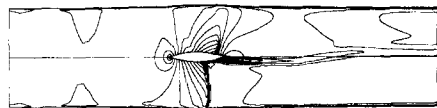
(c) Time = (2/7) T



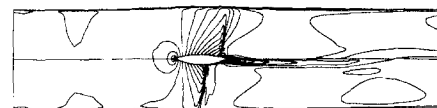
(d) Time = (3/7) T



(e) Time = (4/7) T



(f) Time = (5/7) T

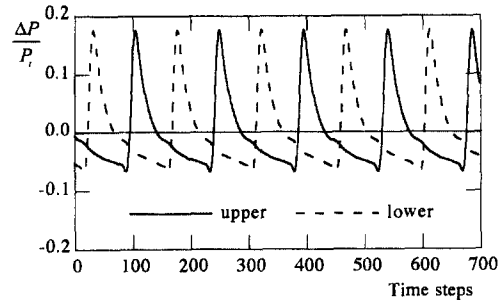


(g) Time = (6/7) T

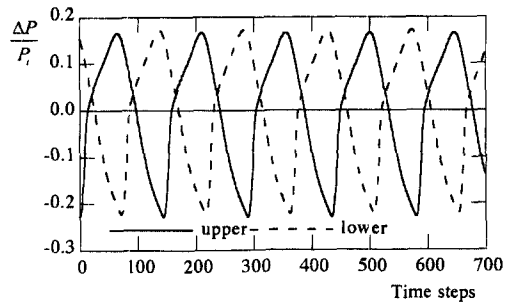
Fig. 6 Instantaneous Mach number contours for the shock buffeting case at $M=0.76$ and $Re=11 \times 10^6$

145번의 시간전진이 있게 하였을때, CFL수는 경계층에서 약 16000이 되었으며, 중심에서 약 2정도가 되었다. 충격파에 의하여 경계층의 박리가 일어났을 때, 벽근처에서 격자가 매우 작지만 속도가 커지기 때문에, 복원호형익렬의 꼬리부근에서 최고의 CFL수가 나온다. Arnone 등⁽¹³⁾의 연구결과 (그들은 최대의 CFL 수가 약 4000이라고 보고하였다) 보다 높은 CFL 수가 나오는 것은 저 Reynolds 수 난류모델의 일종인 $k-\omega$ 모델을 사용하기 때문에 벽근처에 격자를 밀집시켜야 하고, 박리가 꼬리부근에서 크게 일어나기 때문이다. Reynolds 수가 11×10^6 이고, 자유유동 마하수가 0.76일 경우 수렴하는데, 약 50번의 다중격자 시간전진이 필요하였으며, reduced frequency는 0.478로 실험치(0.49)와 잘 일치하였다. 이는 기존의 연구^(13,15~17)가 약 20%정도 낮게 예측한 것과 비교하여 정확한 결과를 나타낸다. 그리고 자유유동 마하수가 0.755에서 0.775까지의 reduced frequency를 Fig. 5에 나타내었는데 대체로 0.48-0.50으로 실험치와 잘 일치한다. 이는 $k-\omega$ 난류모델이 박리유동에 좋은 결과를 나타내기 때문이라고 생각한다. Fig. 6에는 $M=0.76$, $Re=11 \times 10^6$ 일 경우에 한 주기 동안의 등 마하선도의 변화를 도시하였는데, 충격파 뒤에서 Arnone 등⁽¹³⁾의 결과와는 달리 강한 박리가 일어남을 알 수 있고, 이로 인하여 비정상현상이 발생한다는 것을 알 수 있다. 즉 익렬 윗면에서 충격파가 생성되어 앞으로 움직이고 익렬의 약 65%의 위치에 다달았을 때 최고의 충격파 강도를 보이며, 이후 급격히 감소한다. 이때 익렬 밑면에서 다시 충격파가 생성되어 앞으로 움직인다. 박리도 같은 경향을 보인다. 충격파의 위치와 형태, 이로 인하여 발생하는 박리는 Seegmiller 등⁽¹⁶⁾과 Levy⁽¹⁷⁾의 실험결과 사진과 잘 일치한다.

Fig. 7에서는 $x/c=0.5$ 와 $x/c=0.775$ 에서 압력의 변화를 도시하였는데, Fig. 8의 Seegmiller 등⁽¹⁶⁾의 실험결과와 비교하여, 경향과 크기에서 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. $x/c=0.5$ 에서 보다 $x/c=0.775$ 에서 실험치와 더 차이가 나는데, 이것은 충격파에 의한 박리로 인하여 $x/c=0.775$ 에서 유동구조가 더 복잡하기 때문으로 추측된다. 참고로 Arnone 등⁽¹³⁾은 $x/c=0.5$ 에서 압력의 변화량을 25% 정도 낮게 예측하였으며, Seegmiller 등⁽¹⁶⁾의 계산결과는 대체로 크게 예측하였다. 이것은 박리를 예측하는데 적합하지 않은 대수난류모델을 사용



(a) $x/c=0.5$



(b) $x/c=0.775$

Fig. 7 Evolution of pressure at $M=0.760$ and $Re=11 \times 10^6$ (a) $x/c=0.5$, (b) $x/c=0.775$

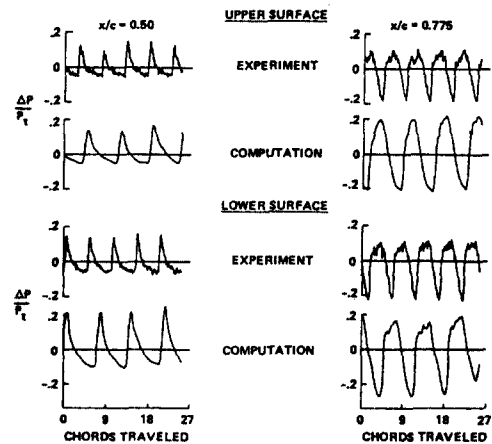


Fig. 8 Computed and Experimental evolution of pressure from Seegmiller et al.⁽¹⁶⁾ at $M=0.76$ and $Re=11 \times 10^6$

했기 때문이라고 생각된다. 그리고 같은 유동조건에서 벽근처에서 난류에너지의 변화를 Fig. 9에 도시하였는데, 역시 같은 주기를 나타내는 것을 알 수 있다. $M=0.751$ 와 $M=0.770$ 일 때의 압력변화를 Fig. 10에 나타내었다. 자유유동 마하수가 커질

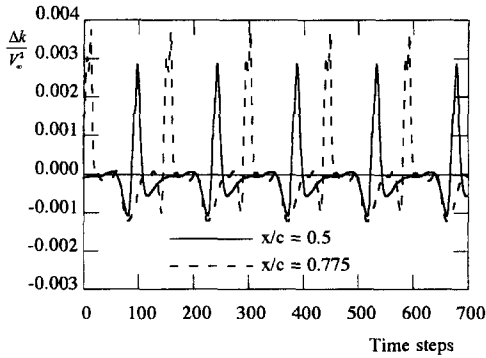
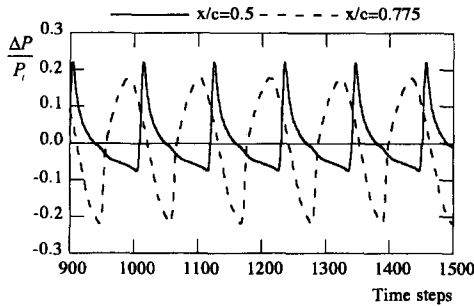
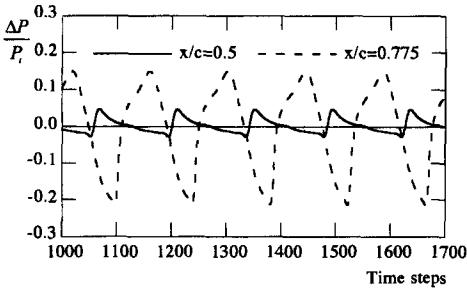


Fig. 9 Evolution of kinetic energy at $M=0.760$ and $Re=11 \times 10^6$



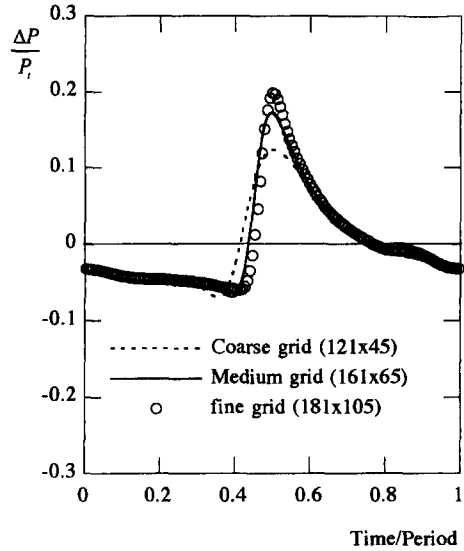
(a) $x/c=0.751$



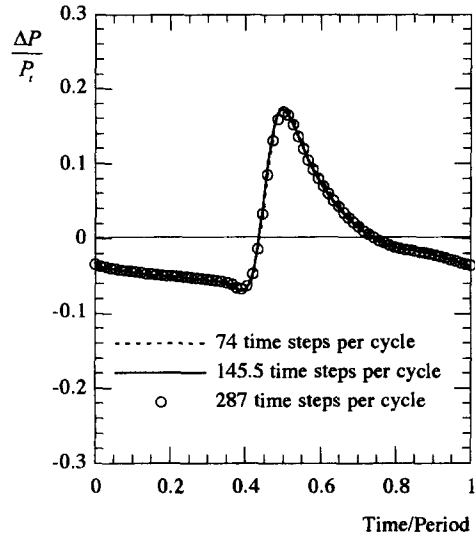
(b) $x/c=0.770$

Fig. 10 Evolution of pressure at $Re=11 \times 10^6$

수록 압력의 변동량이 적어짐을 알 수 있다. Fig. 11에 $x/c=0.5$ 에서 압력변동에 미치는 격자와 시간간격의 영향을 도시하였다. 격자가 조밀해질수록 충격파의 움직임에 따른 압력의 변동을 깨끗하게 포착하였으며, 시간간격이 작아짐에 따른 압력변동의 형태는 변화가 없었지만 reduced frequency는 실험치에 더욱 근접하였다. 즉 가장 시간간격이 작았을 때 reduced frequency는 0.484였다. Fig. 12에서는 자유유동 마하수가 커졌을 때 초킹상태가



(a) Effect of grid density



(b) Effect of time step size

Fig. 11 Evolution of pressure at $x/c=0.5$

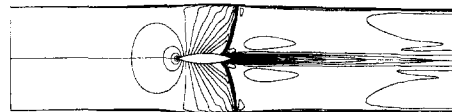


Fig. 12 Steady flow with shock induced separation at $M=0.786$

되어 정상상태로 되는데 이때의 등마하수선도를 나타내었다. 익렬꼬리부근에서 충격파에 의해 박리가

일어남을 볼 수 있고, 비정상상태에서의 박리보다 세기가 약함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 $k-\omega$ 난류모델을 채택하여 실린더 주위의 비정상 압축성 층류유동과 복원흐림익렬을 통하는 비정상 천음속 압축성유동에 대한 계산을 수행하였다. 수치해석 방법으로 가공시간 τ 를 지배방정식에 도입하여 기존의 코드⁽²⁾를 비정상문제에 적용할 수 있도록 하였다. 가공시간 τ 에 대하여 Navier-Stokes방정식은 4차 Runge-Kutta의 외재적 시간전진법을 적용하고, $k-\omega$ 방정식은 내재적 시간 전진법을 적용하여 각 방법의 장점을 결합하였는데, 적은 계산수와 빠른 수렴성 및 안정성을 보였으며, 정확한 해를 얻을 수 있었다. 또한 이에 따른 수렴가속 방법으로서 국소시간간격, residual smoothing, 다중격자 방법 등이 효과적으로 작용하였다. 또한 $k-\omega$ 난류 모델은 역압력구배로 인한 유동박리에 정확하고 수치적으로 안정한 결과를 제공한다라는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Arnone, A. and Swanson, R. C., 1993, "A Navier-Stokes Solver for Turbomachinery Applications," *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 115, pp. 305~313.
- (2) 최창호, 유정열, " $k-\omega$ 난류모델을 채택한 2차원 천음속 익렬유동의 수치해석," 한국항공우주학회지, 제 24권, 제 3호, 1996, pp. 37~46.
- (3) Baldwin, B. S. and Lomax, H., 1978, "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," *AIAA Paper 78-257*, Jan.
- (4) Lakshminarayana, B., 1991, "An Assessment of Computational Fluid Dynamic Techniques in the Analysis and Design of Turbomachinery- The 1990 Freeman Scholar Lecture," *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 113, pp. 315~352.
- (5) Wilcox, D. C., 1988, "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 11, pp. 1299~1310.
- (6) Liu, F. and Zheng, X., 1994, "Staggered Finite Volume Scheme for Solving Cascade Flow with a $k-\omega$ Turbulence Model," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, pp. 1589~1597.
- (7) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp. 1308~1319.
- (8) Speziale, C. G., Abid, R. and Anderson, E. C., 1992, "Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near-Wall Turbulence," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 2, pp. 324~331.
- (9) Wilcox, D. C., 1991, "A Half Century Historical Review of the $k-\omega$ Model," *AIAA Paper 91-0615*, Jan.
- (10) Menter, F. R., 1991, "Performance of Popular Turbulence Models for Attached and Separated Adverse Pressure Gradient Flows," *AIAA Paper 91-1784*, June.
- (11) Turner, M. G. and Jennions, I. K., 1993, "An Investigation of Turbulence Modelling in Transonic Fans Including a Novel Implementation of an Implicit $k-\epsilon$ Turbulence Model," *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 115, pp. 249~260.
- (12) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Co., New York.
- (13) Arnone, A., Liou, M. S. and Povinelli, L. A., 1995, "Integration of Navier-Stokes Equations Using Dual Time Stepping and a Multigrid Method," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 6, pp. 985~998.
- (14) Liu, F. and Ji, S., 1996, "Unsteady Flow Calculations with a Multigrid Navier-Stokes Method," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 10, pp. 2047~2053.
- (15) McDevitt, J. B., Levy, L. L. and Deiwert, G. S., 1976, "Transonic Flow about a Thick Circular-Arc Airfoil," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 5, pp. 606~613.
- (16) Seegmiller, H. L., Marvin, J. G. and Levy, L. L., 1978, "Steady and Unsteady Transonic Flow," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 12, 1262~1270.
- (17) Levy, L. L., 1978, "Experimental and

- Computational Steady and Unsteady Transonic Flows about a Thick Airfoil," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 6, pp. 564~572.
- (18) Wilcox, D. C., 1991, "Progress in Hypersonic Turbulence Modelling," *AIAA Paper* 91-1785.
- (19) Jameson, A., 1983, "The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 1052~1070.
- (20) Martinelli, L., 1987, "Calculations of Viscous Flows With a Multigrid Method," Ph. D. Dissertation, MAE Department, Princeton University.
- (21) Jameson, A., 1983, "Transonic Flow Calculations," *MAE Report* 1651, *Mechanical and Aerospace Engineering Dept.*, Princeton, NJ.
- (22) Brandt, A., 1979, "Multi-Level Adaptive Computations in Fluid Dynamics," *AIAA Paper* 79-1455.
- (23) Jameson, A., 1991, "Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings," *AIAA Paper* 91-1596.
- (24) Menter, F. R., 1992, "Influence of Freestream Values on $k-\omega$ Turbulence Model Predictions," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 6, pp. 1657~1659.