

< 논 문 >

압출용 스크류 모델에서의 혼돈적 교반

서용권* · 김용균** · 문증춘***

(1997년 5월 6일 접수)

A Numerical Study on a Chaotic Stirring in a Model for a Single Screw Extruder

Yong Kweon Suh, Yong Kyun Kim and Jong Chun Moon

Key Words : Chaotic Stirring(혼돈적 교반), Poincare Section(푸앵카레 단면), Lyapunov Exponent (리아프노프 지수), Single Screw Extruder(단일스크류형 압출기)

Abstract

Numerical study on the chaotic stirring of the screw extruder model proposed has been performed. The velocity field was used in obtaining the trajectories of passive particles for studying the stirring effect of the screw extruder. Two nonlinear dynamical tools, that are Poincare sections and Lyapunov exponents, were used in analysing the stirring effect. The Poincare sections and the Lyapunov exponents show that the stirring effect is most satisfactory, when n (the number of flights in a section) is 1, for the case a (aspect ratio ; flight height divided by the spacing between flights) being 0.1. It is also required to set $n=3$, or 5 at $a=0.2, 0.3$ for a uniform stirring.

기 호 설 명

a : 종횡비	u : 유동장의 x -방향 속도
n : 플라이트 수	v : 유동장의 y -방향 속도
S : 플라이트 폭	w : 유동장의 z -방향 속도
ϕ : 플라이트 줄기가 원주 방향과 이루는 각	p : 압력
D : 스크류축의 평균직경	ψ : 유동함수
L : 플라이트 제거후 남은 플라이트의 길이	ξ : z 의 좌표변환
l : 무차원 양(L/S)	d_i : i 주기 후 두 입자의 떨어진 거리
La : 스크류의 축방향 길이	t_i : i 주기 후의 경과 시간
Q : 바렐 표면에서 바렐의 스크류에 대한 상대 속도	λ_i : i 주기 후의 Lyapunov지수
W : Q 의 z -방향 성분	$\bar{\lambda}(m)$: m 주기 동안 λ 를 평균한 것
U : Q 의 x -방향 성분	
μ : 점성계수	

1. 서 론

종래의 혼합에 관한 연구는 복잡한 실제 유동을 대상으로 하였기 때문에, 그 연구방법은 대부분 실험적이고 통계적이었으며, 근본적이고 심층적인 해

*회원, 동아대학교 기계공학과

**동아대학교 대학원 기계공학과

***회원, 경동전문대 건축설비과

적은 불가능하였다. 그러나, 최근 전자계산기의 발달과 혼돈 동역학(chaotic dynamics)의 발전에 힘입어 교반해석에 관한 새로운 방법이 대두되었다. 이 방법은 기본적으로 2차원 비정상적(주기적) 유동과 정상적 또는 비정상적(주기적) 3차원 유동에 대하여 적용될 수 있으며, 난류와 같이 완전히 불규칙적인 유동에 대해서는 적용할 수 없다. 그 방법의 기본적 개념을 설명하면 다음과 같다. 우선, Navier-Stokes 방정식과 같은 유동의 지배방정식에 의해 얻어진 속도장(또는 실험에 의해 측정된 속도장이나 수학적 모델링에 의한 것도 무방함)을 갖고 수동적 유체입자(passive particle)의 운동방정식을 적분하여 궤적을 구한다. 그 다음, Poincare 단면 상에서 그 해를 분석함으로써 교반이 잘되는 지역(혼돈영역: chaotic region)과 그렇지 못한 지역(정규영역: regular region)을 구분한다. 그리고, 불안정 다양체(unstable manifold)를 구하여 관찰함으로써 교반의 과정에서 나타날 줄무늬 양상(striation pattern)을 예측함과 동시에 늘임-접힘(stretching-folding)의 효과를 분석하는 것이다. 마지막으로, Lyapunov 지수를 구하여 혼돈영역의 교반 효과를 정량화하는 것이다.

이러한 방법을 전반적 또는 부분적으로 사용하여 교반에 관해 연구한 모델들을 살펴보면, 두 개의 점 보텍스를 교대로 작동시키는 blinking-vortex 모델^(1,2), 2차원 lid driven-cavity 내의 요동운동 모델⁽³⁻⁵⁾ 편심원통 내부의 요동운동 모델⁽⁶⁻¹¹⁾ 그리고 가장 단순한 3차원 정상모델로 알려진 소위 ABC 유동모델⁽¹²⁾ 등이다. 그 외, 자연대류에서의 문제, 비틀림관에서의 문제, 간헐적 제트유동의 문제, 파동의 문제, 금속의 처리공정에서의 문제 등 많은 분야에 걸쳐, 단순한 모델을 설정하여 연구한 결과들이 최근 많이 보고되고 있다. 한편, 서와 문⁽¹³⁾ 그리고 분과 서⁽¹⁴⁾는 직사각형 용기 내의 교반에 관한 실험 및 수치해석을 통해, 비교적 높은 레이놀즈수의 유동에서도 혼돈적 교반의 해석방법들이 성공적으로 적용될 수 있음을 보였다. 혼돈적 교반에 관한 기본 원리와 최근의 연구사례들을 Ottino⁽¹⁵⁾ 와 서⁽¹⁶⁾가 다루었다.

이러한 혼돈적 교반의 개념이 실제 공학에 바로 적용되는 것은 매우 최근의 일이다. Jana, Tjahjadi and Ottino⁽¹⁷⁾는 스크류 압출기(screw extruder)에의 적용을 염두에 둔 기초연구를 수행하여 발표한 바 있다. 이 연구는 screw의 구조가

축방향으로 주기적으로 변하는 경우에 대해 하나의 간단한 모델을 설정하고 그 모델에 대한 유동 및 교반효과를 실험적으로 조사연구한 것이다.

본 연구에서는 이러한 관점에서 그들의 것과는 근본적으로 다른 모델 구조를 대상으로 하여 수치해석을 하고, 그 결과를 제시함으로써 압출용 스크류의 설계에 있어서의 기초자료 또는 참고자료로 삼고자 한다. 본 연구는 수치해석적이기 때문에 실험에 의해 확인할 수 없는 여러 가지 양과 양상들, 즉 Poincare 단면, 불안정 다양체, Lyapunov 지수 등을 구할 수 있어 최적화 등에 직접 적용할 수 있는 이점이 있다. 본 연구에서는 Poincare 단면에 의해 교반효과의 국소적 특성을 조사하였으며, Lyapunov 지수에 의해 교반효과의 정량적 특성을 검토하였다.

2. 엇갈림 스크류 축의 기하학적 설계

스크류 압출기용 스크류축(screw shaft)은 단일 스크류형(single screw type)과 이중 스크류형(double screw type) 등 여러 가지 종류가 있다. 이 중 단일 스크류형은 구조가 간단하며 제작이 편리하여 아직까지도 널리 채용되고 있다. 그러나 압출용 물질의 혼합측면에서는 불리하고 또한 압출기 바렐(extruder barrel)로부터의 열전달이 잘 안되는 등의 문제점을 안고 있다.

Fig. 1(a)는 현재 사용되고 있는 표준 단일-스크류의 개략도이다. Fig. 1(b)는 엇갈림형 $\frac{1}{2}$ -스크류 그리고 Fig. 1(c)는 엇갈림형 $\frac{3}{2}$ -스크류로서 본 연구를 통해 고안해 낸 것이다. 여기서, $\frac{1}{2}$ -스크류는 단일 스크류로부터 플라이트(flight)의 일부를 주기적으로 제거함으로써 형성되는 것으로, 또 $\frac{3}{2}$ -스크류는 3중 스크류(triple screw)의 플라이트 일부를 주기적으로 제거함으로써 형성되는 것으로 각각 간주할 수 있다. 여기서, 스크류의 명칭 $n/2$ 은 플라이트 제거전의 축 단면상에서 플라이트 수가 n 인 스크류를 의미한다. Fig. 1(c)에서 A, B, C는 플라이트를 제거하기 전의 3중 스크류에서 3개의 플라이트를 각각 나타낸다(Fig. 2(b)의 펼친 그림 참조). 이렇게 엇갈림 형태를 고려한 것은 양호한 혼합 및 열전달 특성을 기대할 수 있기 때문이다.

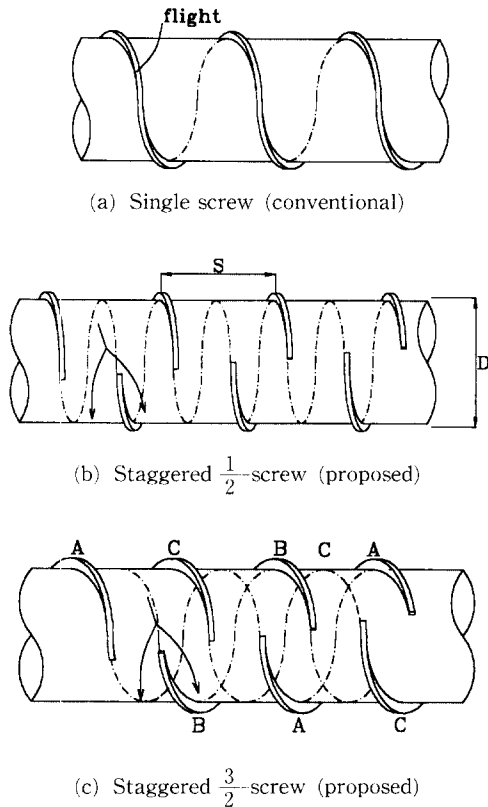


Fig. 1 Schematic of the conventional (a), and proposed screws (b) and (c)

표준형 단일 스크류의 경우 플라이트 폭 S (플라이트와 플라이트간의 축방향 간격으로서 Fig. 2(a)에서 표시)는 각 Φ (플라이트 줄기가 원주방향과 이루는 각으로서 Fig. 2(a)에서 표시)와 직경 D (여기서는 스크류축의 평균직경을 의미; Fig. 1(b)에서 표시)에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$S = \pi D \sin \Phi \quad (1a)$$

엇갈림형 $\frac{1}{2}$ -스크류의 경우에는 플라이트의 주기적 제거에 따라 이것의 두배가 된다:

$$S = 2\pi D \sin \Phi \quad (1b)$$

일반적으로 엇갈림형 $\frac{n}{2}$ -스크류의 경우에는

$$S = \frac{2}{n} \pi D \sin \Phi \quad (1c)$$

와 같다. 한편, 엇갈림형 스크류에서 제거후 남은

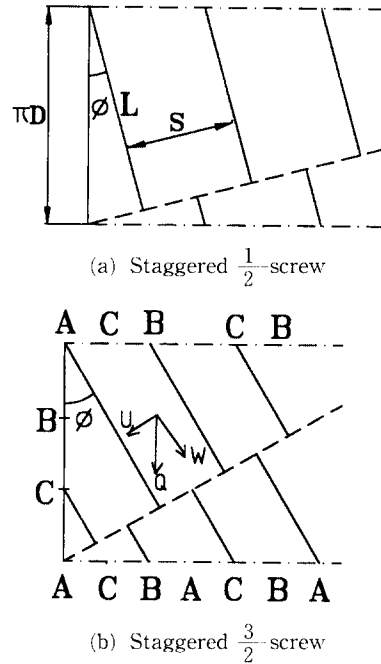


Fig. 2 Spreaded view of (a) the staggered $\frac{1}{2}$ -screw and (b) the staggered $\frac{3}{2}$ -screw.

플라이트의 한 개 길이 L (Fig. 2(a)에서 표시)은

$$L = \pi D \cos \Phi \quad (2)$$

이다. 따라서 이것을 폭 S 로 나눈 무차원 양 l 은

$$l = \frac{L}{S} = \frac{n}{2} \cot \Phi \quad (3)$$

가 된다. 스크류의 축방향길이 L_a 에 대하여, 플라이트를 제거하기 이전의 플라이트 길이를 구하면 $L_a / \sin \Phi$ 이다. 따라서 플라이트를 제거함에 따른 플라이트 엇갈림 회수 N_s 는

$$N_s = \frac{L_a / \sin \Phi}{L} = \frac{2L_a / D}{\pi \sin 2\Phi} \quad (4)$$

가 된다.

다른 한편, 스크류의 회전에 따른 바렐과 스크류간의 상대속도 Q 는 원주방향인데, 이것의 플라이트 길이 방향 성분을 W , 그에 수직인 방향의 성분을 U 라 하면 U 와 W 는 아래와 같은 관계를 가진다(Fig. 2(b)참조).

$$\frac{W}{U} = \cot \Phi \quad (5)$$

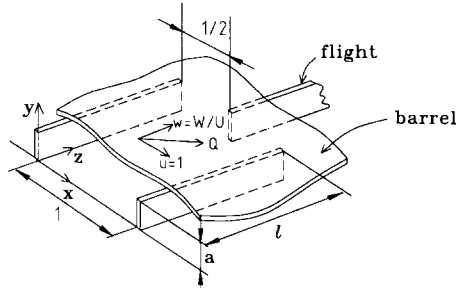


Fig. 3 Perspective view of the flow domain surrounded by the barrel (on $y=a$), flights and the screw shaft (on $y=0$)

3. 유동문제의 공식화 및 유동장 해석

바렐과 스크류축 사이의 물질은, 실제로는 비뉴턴유체이나, 본 연구에서는 기초연구의 목적상 점성계수 μ 가 매우 큰 Newton유체로 채워져 있다고 가정한다. 또한, 본 연구에서는 곡률효과를 무시하였다. 보통, 실제 스크류에서 플라이트 높이는 축의 직경보다 매우 작으므로 이 가정은 어느정도 타당하다. 특성길이, 속도 및 압력을 각각 S , U 및 $\mu U/S$ 로 취하여 무차원화하면 정상유동의 지배방정식은 다음과 같은 무차원 형태가 된다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \quad (7)$$

여기서 \mathbf{u} 는 무차원 속도벡터(u, v, w), p 는 무차원 압력, ∇ 는 좌표계(x, y, z)에서의 그래디언트 연산자이다. 좌표계(x, y, z)는 Fig. 3에서 나타낸 바와 같다.

속도 경계 조건은

$$\mathbf{u} = 0 \text{ at } x=0, 1 \text{ and } y=0 \quad (8a)$$

$$\mathbf{u} = (1, 0, W/U) \text{ at } y=a \quad (8b)$$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(\text{mod}(x+1/2), y, z+l) \quad (8c)$$

이다. 여기서 해석을 위한 관심영역은 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq l$ 이며, a 는 플라이트의 무차원 높이, $\text{mod}(x+1/2)$ 는 x 축 방향으로 $1/2$ 만큼 이동하였음을 의미한다. 그리고 플라이트와 바렐 사이의 틈새는 없는 것으로, 그리고 플라이트의 두께는 0인 것으로 가정한다. 조건 (8c)는 유동이 z 축 방향으로 주기적임을 의미한다.

위의 유동문제는 3차원적이거나 본 연구의 기초연구 목적상, 단순화를 위하여 근사적으로 2차원적인(즉 z 와 무관한) 것으로 간주한다. 그러면 지배방정식 (6) 및 (7)은

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{dp_2}{dz} \quad (10c)$$

으로 된다.

여기서 압력 p 는

$$p(x, y, z) = p_1(x, y) + p_2(z) \quad (11)$$

와 같이 분해하였으며, p_2 는 z -방향으로의 압력((x, y) 평면상에서 균일)변화를 나타낸다. 속도 성분 w 가 z 와 무관하기 위해서는 식 (10c)에서 보는 바와 같이 우변의 dp_2/dz 는 상수가 되어야 하고 따라서 p_2 는 z 방향으로 일정한 비율로 변화해야 한다.

위의 단순화 가정에 따라 유동문제는 u, v, p_1 의 세 종속변수를 위한 식 (9), (10a), (10b)의 시스템과 w 를 위한 식 (10c)로 분리(decouple)된다. 앞의 시스템에서 $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$ 로 정의되는 유동함수 ψ 를 도입하고 압력 p_1 을 소거하면 지배방정식은

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (12)$$

과 같이 되고, 경계조건은 아래와 같이 된다.

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ at } x=0, 1 \quad (13a)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ at } y=0 \quad (13b)$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \text{ at } y=a \quad (13c)$$

이것은 고전적인 lid-driven-cavity 유동문제와 같다. 본 연구에서는 서⁽⁵⁾가 사용한 방법으로 수치해석하여 ψ 를 구하였다. 이 방법은 지배방정식을 중심차분법으로 차분화하며 차분식은 완전히 음적인 방법으로 푸는 것이다. 그리고 벽면근처에서 조밀한 격자계를 얻기위하여 sinh 함수를 사용하였고, $(x, y) = (0, a)$ 및 $(1, a)$ 의 구석 근처의 각 4

개 격자점의 ϕ 는 아래와 같은 Taylor의 구석유동 해로 지정하였다. (H. K. Moffatt⁽¹⁹⁾)

$$\phi = rf(\theta) \quad (14a)$$

$$f(\theta) = \beta \sin \theta + (r \cos \theta + \delta \sin \theta) \quad (14b)$$

$$\beta = \frac{-\pi^2}{\pi^2 - 4}, \quad r = \frac{4}{\pi^2 - 4}, \quad \delta = \frac{2\pi}{\pi^2 - 4} \quad (14c)$$

이것은 $x=1, y=a$ 근처의 구석 지역에 적용되는 식이며, r 과 θ 는 각각 구석점으로부터의 거리 및 직선 $y=a$ 로부터 측정된 각으로서, $r = [(1-x)^2 + (a-y)^2]^{1/2}$, $\theta = \tan^{-1}(a-y)/(1-x)$ 이다. 한편, $x=0, y=a$ 근처의 구석지역의 해는 같은 방법으로 하여 쉽게 구할 수 있다. 한편, 식 (10c)를 위한 경계조건은

$$w=0 \text{ at } x=0, 1 \text{ and } y=0 \quad (15a)$$

$$w=W/U \text{ at } y=a \quad (15b)$$

이다. w 의 해는 Tadmor and Gogos⁽¹⁸⁾에 의해 제시되었으며 그것은 아래와 같다.

$$w = \frac{W}{U} \omega(x, y) \quad (16a)$$

$$\omega = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\sinh(k\pi y)}{k \sinh(k\pi a)} \sin k\pi x - \frac{dp_2}{dz} \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right) + \frac{8}{\pi^3} \right] \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\cosh(k\pi(x-1/2)/a)}{k^3 \cosh(k\pi/2a)} \sin \frac{k\pi y}{a} \quad (16b)$$

4. 유체입자의 궤적을 위한 수치해석 방법

혼합특성을 규명하기 위해서는 주어진 유동장으로 유체입자의 궤적을 구해야 한다. 초기위치(x_0, y_0, z_0)에서 출발한 입자의 궤적($x(t), y(t), z(t)$)는

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y) \quad (17a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y) \quad (17b)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y) \quad (17c)$$

의 적분으로 구할 수 있다. 여기서 t 는 S/U 로 무차원화된 시간이다. 식 (17c)에서 z 의 구간은 $0 \leq z \leq l$ 이며, w 는 식 (16a)에서 보는 바와 같이 파라미터 W/U 가 곱해진 형태로 표시되므로, 두 파라미터 l 과 W/U 의 상관관계 여부를 따져 볼 필요

가 있다. 식 (3)과 (5)에 의하면,

$$l = \frac{W}{U} n/2 \quad (18)$$

이다. n 은 홀수이므로 두 파라미터는 서로 독립적으로 변할 수 있으며, $l = W/2U, 3W/2U, 5W/2U$ 등과 같이 극히 제한된 경우로만 가능하다. 이제,

$$z = \frac{W}{U} \zeta \quad (19)$$

와 같이 정의된 변수 ζ 를 도입한다면 식 (17c)는

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega(x, y) \quad (20)$$

와 같이 되고, ζ 의 범위는 $0 \leq \zeta \leq n/2$ 이 된다.

한편, 독립변수를 t 로 하지 않고 ζ 로 한다면 식 (17a), (17b) 및 (20)은 아래와 같이 된다.

$$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{u(x, y)}{\omega(x, y)} \quad (21a)$$

$$\frac{dy}{d\zeta} = \frac{v(x, y)}{\omega(x, y)} \quad (21b)$$

$$\frac{dt}{d\zeta} = \frac{1}{\omega(x, y)} \quad (21c)$$

즉, 위 시스템에서 종속변수는 $x(\zeta), y(\zeta)$ 및 $t(\zeta)$ 가 된다.

본 연구에서는 입자의 궤적방정식 (17a), (17b) 및 (20) 또는 (21a), (21b) 및 (21c)를 4계의 Runge-Kutta법으로 수치해석하여 풀었다. 속도장은 유한차분법으로 얻은 각 격자점에서의 속도를 사용하여 선형보간의 원리로 구하였다. 그러나, 입자가 $y=a$ 상에 있는 구석 주위에 위치할 때는 다음 시간 스텝에서 입자는 정의된 (x, y) 의 영역을 벗어나 버리는 현상이 자주 발생한다. 같은 현상이 서⁽⁶⁾의 연구에서도 발생하였으며 그는 구석 근처에서 시간 간격 Δt 를 단계적으로 작게 함으로써 부분적으로 해결하였다. 그러나, 본 연구에서는 보다 근본적으로 이를 해결하는 방안을 강구하였다. $x=1, y=a$ 에 위치한 구석 주위에 대해 식 (17a) 및 (17b)를 적용할 때를 예를 들어 그 해결방안을 설명하고자 한다.

우선 구석점을 하나의 꼭지점으로 하는 작은 직사각형을 설정한다(Fig. 4 참조). 만약 입자가 이 지역 내로 들어 온다면 식 (14a), (14b) 및 (14c)

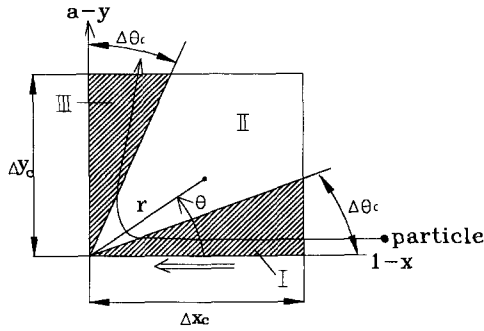


Fig. 4 A small rectangle near the corner point $(x, y) = (1, a)$ where a special consideration is given for integration of the particle's motion equation.

을 사용하여 구한 속도장으로 궤적을 구한다. 그러나, 그 중에서도 II지역에서는 미리 수치해석으로 구해 둔 해를 사용하여 보간법으로 구한다. $t=0$ 때 I 과 II사이의 경계선 $(r, \theta) = (r_0, \Delta\theta_c)$ 상에서 입자를 출발시켜 II지역을 벗어나 III지역으로 들어갈 때까지 수치해석으로 구한 결과를 $r_b(t), \theta_b(t)$ 와 같이 t 의 함수로 나타낸다면, $(r_i, \Delta\theta_c)$ 에서 출발한 입자의 궤적은 상사의 원리에 의해 $\rho r_b(t/\rho), \theta_b(t/\rho)$ 와 같이 된다. 여기서 $\rho = r_i/r_0$ 이다. 이와 같이 하면 II지역 내의 임의의 점에서 출발한 입자가 Δt 시간 내에 도달하는 II지역 내의 또 다른 점, 또는 II지역과 III지역 사이의 경계에 도달하는 시간과 r 좌표를 구할 수 있게 된다. 한편 I 지역에 입자가 위치할 때는 아래와 같은 점근적 해석해($\theta \rightarrow 0$ 에 대해 유효)를 사용하여 입자의 다음 위치를 구하도록 한다.

$$r = r_0 - t + 2D\psi \ln(\theta_0 t / \psi + 1) \tag{22}$$

여기서 (r_0, θ_0) 는 $t=0$ 때의 위치 좌표이다. θ 는 이렇게 하여 얻은 r 을 식 (14a)에 대입하여 계산한다. 한편 Δt 시간 뒤에 입자가 I 과 II사이의 경계를 벗어나면 경계에 도달할 때까지의 시간을 먼저 구하고, 나머지 시간 동안은 II지역 내의 계산 프로그램에 따라 계산을 수행하여 입자의 다음 위치를 구하도록 한다. 다음, III지역에서는

$$\frac{1}{3}(r^{3/2} - r_0^{3/2}) + \frac{x}{2}(r - r_0) + x^2(r^{1/2} - r_0^{1/2}) + x^3 \ln\left(\frac{r^{1/2} - x}{r_0^{1/2} - x}\right) = \frac{c}{(-c/\psi)^{1/2}} t \tag{23a}$$

$$x = \frac{D}{2(-c/\psi)^{1/2} c} \tag{23b}$$

의 해석해($\theta \rightarrow \pi/2$ 에 대해 유효)로 r 을 구하고, θ 는 역시 식 (14a)로부터 구한다. 다른 구석점 $x=0, y=a$ 주위의 지역에 대해서는 입자의 궤적이 반대로 III지역에서 II지역을 거쳐 I 지역으로 진행된다. 여기서도 위와 같은 방식으로 하여 입자의 위치를 추적한다.

그리고, 독립변수를 ζ 로 하는 식 (21a) 및 (21b)의 적분에서도 같은 원리로 하여 궤적을 구한다. 참고로 구석점 $x=1, y=a$ 근처의 I 지역에서는

$$r = r_0 - (\zeta - \zeta_0) + 2\left(D - \frac{1}{\pi}\right)\psi \ln\left[\frac{\theta_0}{\psi}(\zeta - \zeta_0) + 1\right] \tag{24}$$

의 점근해를 적용하였으며, II지역에서는

$$\frac{1}{D}(r - r_0) - \frac{(-\psi/c)^{1/2}}{2D^2}(r^{1/2} - r_0^{1/2}) + \frac{-\psi/c}{4D^2} \ln\left[\frac{Dr^{1/2} + (-\psi/c)^{1/2}}{Dr_0^{1/2} + (-\psi/c)^{1/2}}\right] = \zeta - \zeta_0 \tag{25}$$

의 점근식을 사용하였다.

5. 수치해석 결과 및 분석

혼돈적 교반의 국소거동을 확인하는 데는 Poincare 단면법이 효과적이다. 본 모델은 공간적으로 주기적인 성격을 보이므로 식 (21a)와 (21b)를 사용하여 Poincare 단면을 구하였다. Fig. 5는 a 를 0.1, 0.2, 0.3로 하고 n 을 1, 3, 5로 각각 변화시켰을 때의 Poincare 단면들이다. 그림에서 점들이 없는 지역은 규칙영역으로서 교반이 잘 되지 않는 지역이고 그 외의 지역은 혼돈영역으로서 교반이 잘 되는 지역이다. 그림에서 보면, a 와 무관하게 n 의 변화에 따라 교반효과의 차이가 나타나며, 이로부터 $n=3, 5$ 에서 지역적으로 교반이 끌고부 이루어진다고 볼 수 있다.

본 연구에서 Lyapunov 지수를 구한 방법을 설명하면 다음과 같다. 우선 초기위치 (x_i, y_i) 에서 출발한 A입자와 이로부터 x -방향으로 $d_0=10^{-6}$ 만큼 떨어진 위치에서 출발한 B입자가 i 주기후에 떨어진 거리를 d_i 이라 하고 그 사이의 경과 시간을 t_i 이라 하면

$$\lambda_i = \frac{1}{t_i} \ln \frac{d_i}{10^{-6}}$$

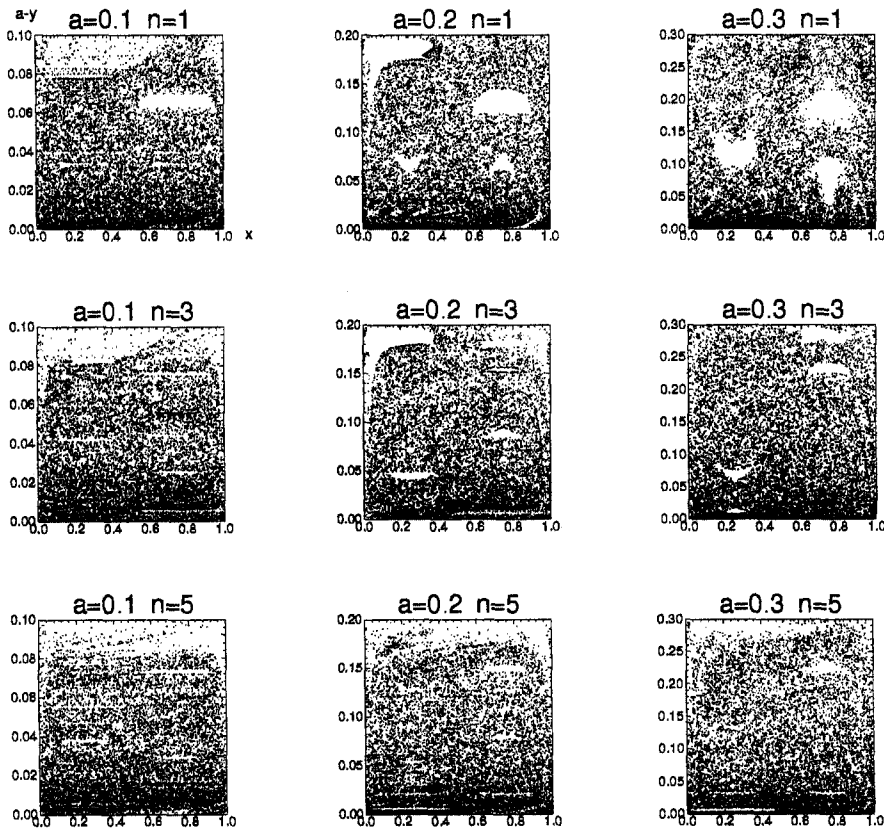


Fig. 5 Poincaré sections for combinations of $a=0.1, 0.2, 0.3$ and $n=1, 3, 5$

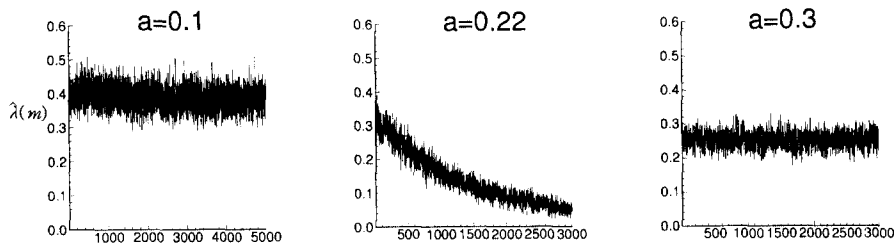


Fig. 6 History of Lyapunov exponent hat lambda for three values of a at $n=2$.

을 계산한다. 여기서 d_0 를 10^{-6} 으로 한 것은 경험상의 결과이며, $10^{-5}, 10^{-7}$ 등으로 하여도 결과의 차이는 거의 없다.

초기위치를 361회 (19×19) 달리하여 같은 방법으로 계산한 뒤 이들을 평균한 양 $\bar{\lambda}(1)$ 를 계산한다. 다음 1주기후의 A입자의 위치는 그대로 두고 B입자의 위치를 A로부터의 방향은 유지하면서 떨어진 거리가 10^{-6} 이 되도록 조정하면 뒤 그 다음 한 주기 동안에 이동한 지점을 구한다. 위와 같은 방법으로

하여 구한 평균값을 $\bar{\lambda}(2)$ 라 한다. 동일한 과정을 3000주기 동안 반복한 뒤 $\hat{\lambda}(m)$ 을 아래 식으로 구한다.

$$\hat{\lambda}(m) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}(k)$$

Fig. 6은 $n=2$ 에서 3가지 a 의 경우에 대해 구한 $\hat{\lambda}(m)$ 을 나타낸다. 본 연구에서 Lyapunov 지수 λ 는 이들 그림으로부터 $m \rightarrow 0$ 접근시 판독한 값으

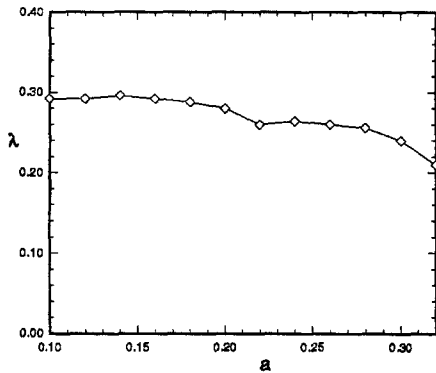


Fig. 7 Lyapunov exponent λ for various a at $n=1$

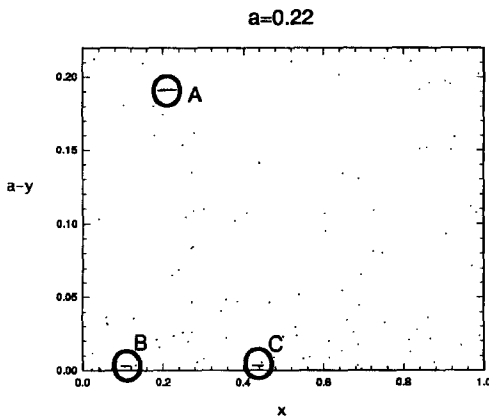


Fig. 8 Poincaré section for 361 particles after 3000 periods used in computation of the Lyapunov exponent at $a=0.22$ and $n=2$

로 하였다.

본 유동모델에 대해 a 를 0.1에서 0.32까지 변화시키면서 Lyapunov 지수를 구한 결과가 Fig. 7에 제시되어 있다. 이 그림에 따르면 a 가 작을수록 Lyapunov 지수가 커짐을 알 수 있다. 즉 $n=1$ 에서는 $a=0.1$ 인 경우에 교반이 가장 잘 이루어진다.

본 연구에서 $\hat{\lambda}(m)$ 은 a 가 0.18과 0.24 사이일 때 Fig. 6의 $a=0.22$ 인 경우의 예와 같이 일정하게 수렴하지 않고 하향곡선을 나타내었다. 이 현상에 대한 원인을 분석하기 위해 유동장내의 입자들이 주기를 거듭함에 따라 나타내는 위치를 조사하였다. 결과에 의하면 입자들은 주기를 거듭함에 따라 몇 개의 지점으로 모여든다.

Fig. 8은 3000주기 이후의 입자들의 분포이다. 361개 입자중 과반수의 입자가 A, B, C의 지역에

몰려 있음을 알 수 있다. 이 세 지점은 주기-3의 고정점(fixed point) 주위의 규칙영역에 해당한다. 사실, 혼돈지역과 규칙영역은 상호작용이 없는데도 이러한 결과를 보인 것은 어딘가 문제가 있음을 의미한다. 결국, $\hat{\lambda}$ 가 하향곡선을 그리는 것도 입자들이 이 규칙영역에 모여들기 때문이다. 입자들이 세 지역으로 모여드는 원인을 조사하기 위해 A 지역의 입자($x=0.22, y=0.1914$)에 대해 그 궤적을 추적하였다. 궤적을 추적한 결과 입자들이 모여드는 시점은 궤적이 별도의 궤적추적법을 적용한 상부의 두 구석지역(여기서는 구석 근처의 x -및 y -방향으로 0.01 만큼 떨어진 정사각형 지역)을 통과할 때이다. 이것은 이 지역에 대한 궤적추적법과 그 외 지역에 대한 추적법이 일관성을 지니지 못한 때문이라 판단된다. 해석적 해가 적용된 구석지역의 크기가 작을 수록 이러한 비일관적인 현상은 더욱 드물게 나타남을 알 수 있었다. 예를 들어, Δx_c 와 Δy_c (Fig. 4)를 0.04로 했을 때는 거의 모든 파라미터 조건에서 이 현상이 나타났으며, $\hat{\lambda}(m)$ 의 시간 변화에 따른 감소율도 매우 크다. 본 논문에서 제시한 결과는 $\Delta x_c = \Delta y_c = 0.01$ 인 경우로서, 앞에서 언급한 바와 같이 a 가 0.18~0.24인 경우에만 이것이 나타났으며, 그 감소율도 훨씬 작다. 이러한 배경에서, λ 는 $\hat{\lambda}(m)$ 분포로부터 $m \rightarrow 0$ 접근시(규칙영역으로 집중하기 전의 시점)의 판독값으로 정하였다. 이 값의 중요성은 또다른 각도에서 파악할 수 있다. 보통 압출용 스크류는 축의 전체 길이에 걸쳐 나사감김 횟수가 20~30회 정도이다. 즉, 엇갈림형 스크류의 전체 길이에 걸쳐 주기는 기껏 몇 십 정도이다. 따라서 Lyapunov 지수는 Fig. 6의 분포에서 $m \rightarrow 0$ 접근시의 값이 중요한 의미를 지닌다.

6. 결론

본 연구에서는 새로운 압출용 스크류축으로서 엇갈림형을 제안하였으며, 이에 대한 교반효과를 수치해석에 의해 분석해 보았다. 결론을 정리하면 다음과 같다.

(1) 교반효과는 중형비 a 가 작을 수록 증가하며, $n=1$ 에서 $0.1 \leq a \leq 0.32$ 까지 확인한 결과, $a=0.1$ 때 가장 양호한 교반효과를 보인다.

(2) 전체 영역의 골고른 혼합효과를 위해서는, $a=0.2, 0.3$ 의 경우에는, n 을 3이상으로(본 연구에

서는 $n=5$ 까지 확인) 할 것이 요구된다.

후 기

본 연구는 동아대학교 '96 교내학술연구조성비 지원에 의해 수행되었음.

참고문헌

- (1) Aref, H., 1984, "Stirring by Chaotic Advection," *J. Fluid Mech.*, Vol. 143, pp. 1-21.
- (2) Khakhar, D. V., Rising, H. and Ottino, J. M., 1986, "Analysis of Chaotic Mixing in Two Model Systems," *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, pp. 419~451.
- (3) Chien, W. L., Rising, H. and Ottino, J. M., 1986, "Laminar and Chaotic Mixing in Several Cavity Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, pp. 355~377.
- (4) Leong, C. W. and Ottino, J. M., 1989, "Experimental on Mixing due to Chaotic Advection in a Cavity," *J. Fluid Mech.*, Vol. 209, pp. 463~499.
- (5) 서용권, 1995, "요동운동에 의한 Driven-Cavity 유동의 혼돈적 교반," 대한기계학회 논문집 제19권, 제2호, pp. 537~547.
- (6) Aref, H. and Balachandar, S., 1986, "Chaotic Advection in a Stokes Flow," *Phys. Fluids*, Vol. 29, pp. 3515~3521.
- (7) Chaiken, J., Chevray, R., Tabor, M. and Tan, Q. M., 1986, "Experimental Study of Lagrangian Turbulence," *Proc. Roy. Soc. Lond.* A408, pp. 165~174.
- (8) Swanson, P. D. and Ottino, J. M., 1990, "A Comparative Computational and Experimental Study of Chaotic Mixing of Viscous Fluids," *J. Fluid Mech.*, Vol. 213, pp. 227~249.
- (9) Tjahjadi, M. and Ottino, J. M., 1991, "Stretching and Breakup of Droplets in Chaotic Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 232, pp. 191~219.
- (10) Muzzio, F. J., Swanson, P. D. and Ottino, J. M., 1991, "The Statistics of Stretching and Stirring in Chaotic Flows," *Phys. Fluids*, A3(5), pp. 822~834.
- (11) Ghosh, S., Chang, H. -C. and Sen, M., 1992, "Heat-Transfer Enhancement due to Slender Recirculation and Chaotic Transport between Counter-Rotating Eccentric Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 238, pp. 119~154.
- (12) Dombre, T., Frish, U., Green, J. M., Henon, M., Mehr, A. and Soward, A. M., 1986, "Chaotic Streamlines in the ABC Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 167, pp. 353~391.
- (13) 서용권, 문종춘, 1994, "얇은 직사각형 통내의 혼돈적 교반," 대한기계학회 논문집, 제18권 제2호, pp. 380~388.
- (14) 문종춘, 서용권, 1994, "직사각형 용기 내에서의 유동 및 교반 특성-중앙평판 길이의 영향," 대한기계학회논문집, 제18권 제10호, pp. 2698~2705.
- (15) Ottino, J. M., 1990, "Mixing, Chaotic Advection, and Turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 22, pp. 207~253.
- (16) 서용권, 1996, "혼돈이론에 입각한 교반 및 혼합 해석," 대한기계학회지, 제36권 제4호, pp. 338~350.
- (17) Jana, S. C., Tjahjadi, M. and Ottino, J. M., 1994, "Chaotic Mixing of Viscous Fluids by Periodic Changes in Geometry: Baffled Cavity Flow," *AICHE J.*, Vol. 40, pp. 1769~1781.
- (18) Tadmor, Z. and Gogos, C. G., 1979, "Principles of Polymer Processing," SPE.
- (19) H. K. Moffatt, 1964, "Viscous and Resistive Eddies near a Sharp Conner," *J. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 1~18.