

(논 문)

부분상태 궤환제어를 이용한 비선형 천정크레인의 진자각제어

이 종 규* · 이 상 룡**

(1996년 6월 25일 접수)

Anti-swing of the Nonlinear Overhead Crane Using Partial State Feedback Control

Jong Kyu Lee and Sang Ryong Lee

Key Words : Overhead Crane(천정크레인), Swing Motion(진자운동) Operating State(정상작동 상태), Partial State Feedback Control(부분상태 궤환제어), Gain Matrix(이득행렬)

Abstract

The purpose of this study is to design an anti-sway motion for industrial overhead cranes which transport objects on a horizontal plane by adjusting movements of a trolley motor and a girder motor. The movement of a hoist motor has not been considered at this time since its role was assumed to move objects only vertically, therefore, not to affect the swing motion of objects. The dynamic behavior of the swing motion shows nonlinear characteristics, which makes the design of anti-sway motion controller difficult. First of all, the nonlinear state equation for the motion of industrial overhead cranes has been derived. Then they have been linearized about normal operating states determined by the dynamic characteristics of motor motion-acceleration, constant speed, and deceleration, during transportation. The partial state feedback control algorithm based on this linearized state equation has been developed on order to suppress the swing motion. The simulation results have demonstrated satisfactory performance of the proposed controller.

1. 서 론

중공업, 자재창고, 철강산업, 항만 등 고하중 제품의 운송작업에 많이 사용되는 천정크레인은 거더(girder)모터, 트롤리(trolley)모터, 호이스트(hoist)모터 등 3개의 구동 모터를 갖추고 있다. Fig. 1은 천정크레인의 구조 및 일반적 화물운송 방식을 보여주고 있다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 호이스터모터는 화물의 상하운동을 조절하며, 트롤리와 거더모터는 화물의 이송운동을 조정하는 역할을 수행한다. 일반적으로 화물운송작업시에는 호이

스트모터를 조작하여 적재된 화물을 일정한 높이로 고정된 채 거더와 트롤리모터를 동시에 조작하여 평면운동으로 화물을 원하는 지점까지 운송한 뒤 다시 호이스트모터를 조작하여 화물을 하역하는 방법을 사용한다.

호이스트모터만을 사용하여 화물을 조작할 경우에는 화물의 진자운동이 유발되지 않으나 트롤리와 거더모터를 동시에 사용할 시에는 모터의 가감속운동, 호이스트와이어의 유연성, 외부교란, 운전자의 조작미숙 등의 요인으로 화물의 진자운동을 유발시켜 주변 설비와의 충돌, 안전사고 유발, 화물운송작업의 지체 등의 문제점들이 발생된다.

크레인의 화물 진자운동 발생을 억제하기 위한 연구는 주로 단축운동(트롤리운동 또는 호이스트

*회원, 경북대학교 대학원 기계공학부

**회원, 경북대학교 기계공학부

운동)을 하는 크레인의 진자운동억제와 위치제어 알고리즘 개발에 치중되어 왔다. 이 경우에는 크레인 운동을 선형적으로 모델링할 수 있으므로 우수한 특성을 가지는 제어기를 개발한 연구결과가 많이 발표되었다.^(1~3) 그러나, 단축운동을 하는 크레인은 산업적 활용도가 제한되어 있으므로 이러한 연구결과는 실용성이 확보되지 못하고 있다.

실제 산업현장에서 사용되는 운전방식과 유사하게 트롤리와 거더모터를 동시에 작동시켜 운송화물이 평면상에서 운동하는 방식을 채택한 천정크레인의 진자각제어에 관한 연구결과가 몇몇 연구자들에 의해 발표되었다.^(4,5) 그러나, 이 경우 크레인의 운동 거동을 선형적으로 해석하여 진자각제어를 시도하였기 때문에 비선형 거동을 보이는 실제 천정크레인에 연구결과를 적용하기에는 무리가 있다.

본 연구에서는 삼차원운동을 수행하는 천정크레인에 대한 비선형 운동방정식을 유도하였다. 그리고, 유도된 비선형 운동방정식을 크레인의 정상작동상태를 기준으로 선형화한 뒤 부분상태게환 방식을

적용하여 비선형 진자운동 제어기를 설계하는 방식을 채택하였다. 비선형 진자운동 제어기의 성능을 검증하기 위해 개발된 제어기를 비선형 모델에 적용하여 운송화물의 진자운동이 변화하는 형태를 시뮬레이션하였다.

2. 비선형 천정크레인의 진자각제어

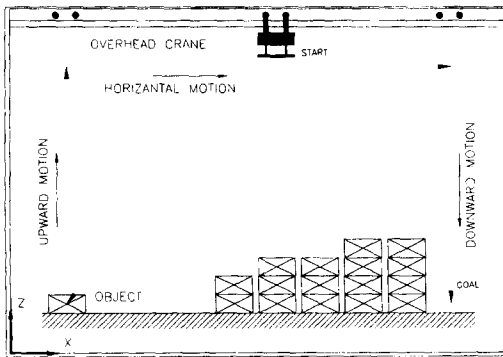
2.1 크레인의 운동방정식

천정크레인(이하 크레인이라고 한다.)은 트롤리, 거더와 호이스트모터를 사용하여 화물을 출발점에서 목표점까지 운송한다. 크레인이 화물을 운송하는 도중에, 흔들리는 화물은 크레인에서 이탈하여 주변 설비와 충돌을 하거나, 운송작업시간을 지연시켜 생산성을 떨어뜨린다. 그래서, 화물의 흔들림을 억제시키는 알고리즘을 개발하기 위해, 크레인의 삼차원운동과 크레인의 운동으로 발생된 운송화물의 진자운동에 대한 크레인의 운동방정식을 유도한다.

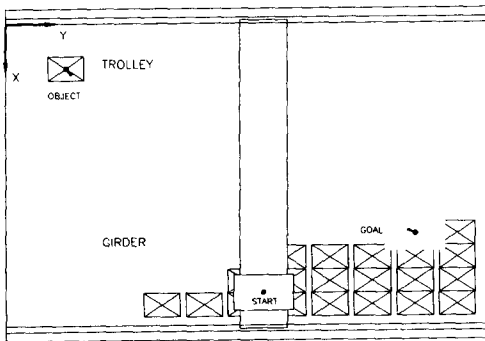
크레인 시스템은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 트롤리와 거더의 병진운동으로 화물을 XY-평면으로 운송하고, 호이스트작동으로 호이스트와이어 끝에 달린 화물을 와이어의 길이방향으로 운송하는 삼차원운동을 한다. 따라서 크레인의 위치 \vec{R}_P 는 XYZ-축으로 구성된 고정좌표계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{R}_P = X\vec{i} + Y\vec{j} \tag{1}$$

여기서, $X = r_1\theta_1$, $Y = r_2\theta_2$ 이다. r_1 과 r_2 는 각각 트롤리와 거더모터 드럼의 등가반경, θ_1 과 θ_2 는 각각 트롤리와 거더모터 드럼의 회전각을 나타낸다.



(a) Front view



(b) Plane view

Fig. 1 General transportation path for the industrial overhead cranes

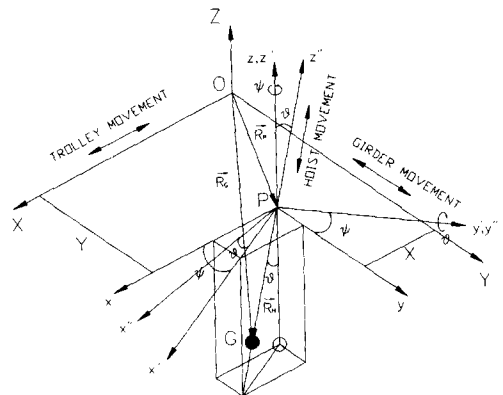


Fig. 2 Overhead crane system using coordinates

와이어의 길이방향에 대칭이고, 강체인 화물은 크레인의 삼차원운동때문에 Fig. 2에서 보는 바와 같이 진자운동을 한다. 이 진자운동은 이동좌표계를 사용하여 표현할 수 있고, 이동좌표계의 좌표축들은 화물에 고정되어 화물과 함께 움직이고, 다음과 같이 설명된다.

① xyz-축은 화물의 진자운동을 표현하는 기준 좌표계로써 화물에 고정되었다.

② x'y'z'-축은 xyz-축이 z-축을 중심으로 반시계방향으로 ψ 만큼 회전한 뒤 발생한 축으로써 z'-축은 z-축과 일치하고, xy-평면은 x'y'-평면으로 변환되므로, 화물의 진자각 ψ 는 x-축에서 x'-축까지 측정된 각이다.

③ x''y''z''-축은 x'y'z'-축이 y'-축을 중심으로 시계방향으로 θ 만큼 회전한 뒤 발생한 축으로써 y''-축은 y'-축과 일치하고, x'z'-평면은 x''z''-평면으로 변환되므로, 화물의 진자각 θ 는 z-축에서 z''-축까지 측정된 각이다. 따라서, 이동좌표계의 좌표축들의 변환된 화물의 위치 \vec{R}_H 는 구좌표계를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{R}_H = l \sin \theta \cos \psi \vec{i} + l \sin \theta \sin \psi \vec{j} - l \cos \theta \vec{k} \quad (2)$$

여기서, $l = l_0 - r_3 \theta_3$ 이다. l 은 호이스트의 작동으로 발생한 와이어의 변화된 길이로서 점 P에서 점 G까지의 길이를 나타내며, 와이어의 질량과 탄성변형은 무시한다. l_0 는 와이어의 처음 길이이고, r_3 는 호이스트모터 드럼의 증가반경, θ_3 는 호이스트모터 드럼의 회전각을 나타낸다.

크레인의 삼차원운동과 화물의 진자운동으로 발생한 화물의 위치 \vec{R}_C 는 식 (1)과 (2)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{R}_C = (X + l \sin \theta \cos \psi) \vec{I} + (Y + l \sin \theta \sin \psi) \vec{J} - l \cos \theta \vec{K} \quad (3)$$

여기서, 점 G는 화물의 질량중심을 나타낸다.

크레인의 운동방정식은 운동에너지(kinetic energy) T 와 포텐셜에너지(potential energy) V 의 차로 정의되는 Lagrange 함수를 이용하여 유도할 수 있다. 크레인운동으로 발생하는 마찰력 또는 모터에서 발생하는 감쇠력이 무시되면, 크레인이 화물을 운송할 때 발생하는 전 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{2}{m} \vec{R}_C \cdot \vec{R}_C + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_C + \frac{m_1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$$

$$+ \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{X}}{r_1}\right)^2 + \frac{m_2}{2} \dot{Y}^2 + \frac{I_2}{2} \left(\frac{\dot{Y}}{r_2}\right)^2 + \frac{I_3}{2} \left(\frac{\dot{I}}{r_3}\right)^2 \quad (4)$$

여기서, 우변의 첫째항과 둘째항은 화물의 운동에너지, 셋째항과 네째항은 트롤리의 운동에너지, 다섯째항과 여섯째항은 거더의 운동에너지, 일곱째항은 호이스트의 운동에너지를 나타낸다. m , m_1 과 m_2 는 각각 화물, 트롤리와 거더의 질량, I_1 , I_2 와 I_3 는 각각 트롤리, 거더와 호이스트모터의 등가 질량관성모멘트를 나타낸다. $\vec{\omega}$ 와 \vec{H}_C 는 이동좌표계의 x''y''z''-축에서 나타내면 각각 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$\vec{\omega} = \omega_{x''} \vec{i}'' + \omega_{y''} \vec{j}'' + \omega_{z''} \vec{k}'' = -\dot{\psi} \sin \theta \vec{i}'' - \dot{\theta} \vec{j}'' - \dot{\psi} \cos \theta \vec{k}'' \quad (5)$$

$$\vec{H}_C = I_{x''} \omega_{x''} \vec{i}'' + I_{y''} \omega_{y''} \vec{j}'' + I_{z''} \omega_{z''} \vec{k}'' \quad (6)$$

여기서, 식 (5)는 이동좌표계의 좌표축이 화물에 고정되어 화물과 함께 움직이는 축으로 하였을 때, 화물의 각속도를 나타내고, 식 (6)은 좌표축의 방향이 관성곱이 0인 관성주축과 일치할 때, 화물의 각운동량을 나타낸다. $I_{x''}$, $I_{y''}$ 와 $I_{z''}$ 는 x''y''z''-축에 대한 화물의 관성모멘트로서, 각각 I_x , I_y 와 I_z 로 나타낸다. 따라서 크레인의 전 운동에너지는 식 (4)~(6)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T = \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{I}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + m \dot{X} (\dot{I} \sin \theta \cos \psi + l \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi) + m \dot{Y} (\dot{I} \sin \theta \sin \psi + l \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi) + \frac{m_1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m_2}{2} \dot{Y}^2 + \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{X}}{r_1}\right)^2 + \frac{I_2}{2} \left(\frac{\dot{Y}}{r_2}\right)^2 + \frac{I_3}{2} \left(\frac{\dot{I}}{r_3}\right)^2 + \frac{I_a}{2} \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \frac{I_t}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \quad (7)$$

또한 크레인의 전 포텐셜에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} b \phi^2 - mgl \cos \theta \quad (8)$$

여기서, 우변의 첫째항은 와이어의 포텐셜에너지, 둘째항은 화물의 중력에너지를 나타낸다. b 는 와이어의 비틀림상수, ϕ 는 z''-축을 중심으로 반시계방향으로 회전하는 와이어의 비틀림각, g 는 중력가속도를 나타낸다. Lagrange 함수 L 은 식 (7)과 (8)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{I}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + m \dot{X} (\dot{I} \sin \theta \cos \psi + l \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi)$$

$$\begin{aligned}
& + m\dot{Y}(\dot{l}\sin\theta\sin\phi + \dot{l}\theta\cos\theta\sin\phi + \dot{l}\psi\sin\theta\cos\phi) \\
& + \frac{m_1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{Y}^2 + \frac{I_1}{2}\left(\frac{\dot{X}}{r_1}\right)^2 + \frac{I_2}{2}\left(\frac{\dot{Y}}{r_2}\right)^2 \\
& + \frac{I_3}{2}\left(\frac{\dot{l}}{r_3}\right)^2 + \frac{I_a}{2}\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \frac{I_c}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) \\
& - \frac{p}{2}\dot{\phi}^2 + mgl\cos\theta \tag{9}
\end{aligned}$$

그리고, 와이어의 비틀림운동은 화물의 비틀림을 유발하므로, 다음과 같은 구속방정식이 정의된다.

$$\dot{\phi} - \dot{\phi}\cos\theta = 0 \tag{10}$$

여기서, 비틀림속도 $\dot{\phi}$ 는 z'' -축에 대해 발생하므로, 식 (10)으로부터 화물의 비틀림을 막을 수 있다.

구속방정식이 있는 크레인의 운동방정식은 다음과 같은 Lagrange 승수(multiplier) λ_j 를 이용한 Lagrange 방정식에서 구할 수 있다.⁽⁷⁾

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{11}$$

여기서, q_i 는 일반좌표계, Q_i 는 모터에 걸리는 회전력, 그리고 a_{ji} 는 구속방정식을 나타낸다. 크레인의 운동방정식은 식 (9)~(11)로부터 일반좌표계 X, Y, l, θ 와 ψ 에 대하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& d_1\ddot{\theta}\cos\theta\cos\phi - d_1\ddot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \frac{\dot{X}}{l} + d_1\frac{\dot{l}}{l}\sin\theta\cos\phi \\
& + \frac{2d_1\dot{l}}{l}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi) \\
& - 2d_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi - d_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\cos\phi = u_1 \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_2\ddot{\theta}\cos\theta\sin\phi + d_2\ddot{\psi}\sin\theta\cos\phi + \frac{\dot{Y}}{l} + d_2\frac{\dot{l}}{l}\sin\theta\sin\phi \\
& + \frac{2d_2\dot{l}}{l}(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi) \\
& + 2d_2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - d_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\sin\phi = u_2 \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d_3}{l}(\dot{X}\cos\phi + \dot{Y}\sin\phi)\sin\theta + \frac{\dot{l}}{l} - d_3(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) \\
& - d_3g_1\cos\theta = u_3 \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_t\ddot{\theta} + \frac{\dot{X}}{l}\cos\theta\cos\phi + \frac{\dot{Y}}{l}\cos\theta\sin\phi + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta} \\
& - (m_t - m_a)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + g_1\sin\theta = 0 \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t\sin^2\theta + m_a\cos^2\theta)\ddot{\psi} - \frac{\sin\theta}{l}(\dot{X}\sin\phi - \dot{Y}\cos\phi) \\
& + 2(m_t - m_a)\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\psi}\sin^2\theta + m_p\dot{\phi}\cos\theta \\
& = 0 \tag{16}
\end{aligned}$$

여기서, $J_1 = (m + m_1)r_1^2 + I_1$, $J_2 = (m + m_1 + m_2)r_2^2 + I_2$, $J_3 = mr_3^2 + I_3$, $u_1 = T_1r_1/(J_1)$, $u_2 = T_2r_2/(J_2)$, $u_3 = T_3r_3/(J_3)$, $d_1 = mr_1^2/J_1$, $d_2 = mr_2^2/J_2$, $d_3 = mr_3^2/J_3$, $g_1 = g/l$, $m_t = 1 + I_c/(ml^2)$, $m_a = I_a/(ml^2)$, $m_p = p/(ml^2)$ 이고, T_1, T_2 와 T_3 는 각각 트롤리, 거더와 호이스트모터의 회전력이다. 식 (10)과 (12)~(16)으로부터 크레인의 운동방정식은 비선형 방정식이 된다.

본 연구에서는 트롤리와 거더의 평면운동만을 고려하므로, 와이어의 길이는 일정하다. 즉, $\dot{l} = 0$ 이 된다. 또한 호이스트운동은 고려하지 않으므로 $d_3 = u_3 = 0$ 이 된다. 따라서 크레인의 비선형 운동방정식은 다음과 같이 수정된다.

$$\begin{aligned}
& d_1\ddot{\theta}\cos\theta\cos\phi - d_1\ddot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \frac{\dot{X}}{l} - 2d_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi \\
& - d_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\cos\phi = u_1 \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_2\ddot{\theta}\cos\theta\sin\phi + d_2\ddot{\psi}\sin\theta\cos\phi + \frac{\dot{Y}}{l} + 2d_2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi \\
& - d_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\sin\phi = u_2 \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_t\ddot{\theta} + \frac{\dot{X}}{l}\cos\theta\cos\phi + \frac{\dot{Y}}{l}\cos\theta\sin\phi - (m_t - m_a)\dot{\phi}^2 \\
& \sin\theta\cos\theta + g_1\sin\theta = 0 \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t\sin^2\theta + m_a\cos^2\theta)\ddot{\psi} - \frac{\dot{X}}{l}\sin\theta\sin\phi + \frac{\dot{Y}}{l}\sin\theta\cos\phi \\
& + 2(m_t - m_a)\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta + m_p\dot{\phi}\cos\theta = 0 \tag{20}
\end{aligned}$$

크레인 시스템의 동적거동의 상태를 결정하는 상태변수들을 이용하면, 크레인의 운동방정식은 식 (10), (17)~(20)으로부터 다음과 같은 비선형 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}, \vec{u}) \tag{21}$$

여기서, $\vec{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8 \ y_9]^T$ 는 상태변수 $y_1 = \theta$, $y_2 = \dot{\theta}$, $y_3 = \phi$, $y_4 = \dot{\phi}$, $y_5 = X$, $y_6 = \dot{X}$, $y_7 = Y$, $y_8 = \dot{Y}$, $y_9 = \phi$ 로 구성된 상태벡터, $\vec{u} = [u_1 \ u_2]^T$ 는 제어벡터, $\vec{f}(\vec{y}, \vec{u}) = [y_2 \ (M^{-1}F)^T [y_4 \ (M^{-1}F)^T y_6 \ (M^{-1}F)^T y_8 \ (M^{-1}F)^T y_9] y_4 \cos y_1]^T$ 이다. 또한 첨자 T와 -1은 각각 전치행렬과 역행렬, $(M^{-1}F)^T$ 는 $(M^{-1}F)^T$ 의 i -번째 행을 나타내고, M 과 F 는 다음과 같이 나타낸다.

$$M = [M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} u_1 + 2d_1 y_2 y_4 \cos y_1 \sin y_3 + d_1 (y_2^2 + y_4^2) \sin y_1 \cos y_3 \\ u_2 - 2d_2 y_2 y_4 \cos y_1 \cos y_3 + d_2 (y_2^2 + y_4^2) \sin y_1 \sin y_3 \\ (m_t - m_a) y_2^2 \sin y_1 \cos y_1 - g_t \sin y_1 \\ 2(m_a - m_t) y_2 y_4 \sin y_1 \cos y_1 - m_p y_3 \cos y_1 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$M_1 = [d_1 \cos y_1 \cos y_3 - d_1 \sin y_1 \sin y_3 \ 1/l \ 0]$$

$$M_2 = [d_2 \cos y_1 \sin y_3 \ d_2 \sin y_1 \cos y_3 \ 0 \ 1/l]$$

$$M_3 = [m_t \ 0 \ \cos y_1 \cos y_3/l \ \cos y_1 \sin y_3/l]$$

$$M_4 = [0 \ m_{ta} - \sin y_1 \sin y_3/l \ \sin y_1 \cos y_3/l]$$

$$m_{ta} = m_t \sin^2 y_1 + m_a \cos^2 y_1$$

2.2 크레인의 선형 모델

단축운동을 하는 크레인의 운동방정식은 진자각 θ 가 작다고 가정하여 $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ 로 두고 선형 모델을 유도하는 방법이 있지만, (1-3) 본 연구에서 유도된 크레인의 비선형 운동방정식은 진자각 θ 가 아주 작다고 하더라도 진자각 ψ 가 초월함수로 나타나기 때문에 비선형항이 사라지지 않으므로 단축운동과 같은 방법으로 유도되는 선형 모델은 없다. 그래서 크레인의 운동은 비선형 방정식을 해석하여야 한다. 비선형 시스템의 운동해석은 비선형 시스템의 동적거동을 원활히 하는 정상작동 상태에 대한 선형화함으로써 얻은 선형 모델, 선형 시스템의 해석기법과 결과를 적용할 수 있는 비선형 상태 제환제어를 이용하여 얻은 선형 모델, 실제 시스템 설계에서 피할 수 없는 비선형을 다루는데 이용되는 기술함수(describing function)을 도입, 그리고 시스템을 해석하고, 제어기형태를 설계하는데 이용되는 Lyapunov 안정성 이론 등을 사용하여 할 수 있다. (6) 본 연구에서는 대부분 비선형 시스템의 운동해석에 적용되는 정상작동 상태에 대한 선형 모델을 이용하여 비선형 모델의 운동을 해석한다.

크레인은 트롤리와 거더의 운동으로 화물을 운송하므로, 크레인의 운동은 Fig.3에서 보는 바와 같이 정상작동 상태를 보여주는 트롤리와 거더구동모터의 특성을 고려하여 일정한 가속운동, 등속운동과 일정한 감속운동으로 나누어 해석할 수 있다. 따라서 비선형 크레인 시스템은 일정한 가속운동과 등속운동으로 나누어서 정상작동 상태에 대한 선형 모델을 유도할 수 있다.

크레인이 트롤리와 거더모터의 정상작동상태인 일정한 가속으로 운동할 때, 화물의 진자각들도

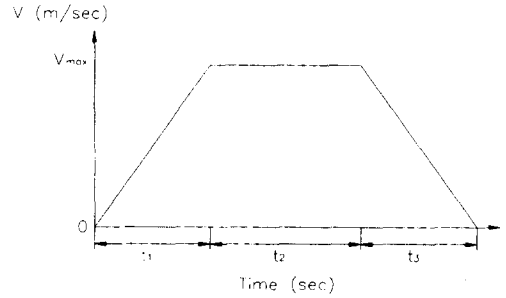


Fig. 3 Operating states of motors of the trolley and the girder

일정하게 유지되는 정상작동 상태가 된다면, 각속도와 각가속도는 $\dot{\theta}_n = \ddot{\theta}_n = 0$, $\dot{\psi}_n = \ddot{\psi}_n = 0$ 와 $\dot{\phi}_n = 0$ 이 된다. 그래서 크레인 시스템의 정상작동 상태방정식은 비선형 상태방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_{1n} = \frac{\dot{X}_n}{l}, \quad u_{2n} = \frac{\dot{Y}_n}{l} \tag{22}$$

$$\dot{X}_n \cos y_{3n} + \dot{Y}_n \sin y_{3n} + g_t \tan y_{1n} = 0 \tag{23}$$

$$(\dot{X}_n \sin y_{3n} - \dot{Y}_n \cos y_{3n}) \tan y_{1n} - m_p y_{3n} = 0 \tag{24}$$

$$y_{3n} = y_{3n} \cos y_{1n} \tag{25}$$

여기서, 첨자 n 은 상태변수가 정상작동 상태에 있는 것을 나타내고, $y_{1n} \neq \pi/2$ 이다. 식 (22)~(25)는 크레인 시스템의 회전력과 진자각들의 정상작동상태가 트롤리와 거더모터의 정상작동 상태로부터 구할 수 있는 것을 보여준다.

정상작동 상태방정식에서 비틀림상수 p 가 작아서 $m_p = p/ml^2 \ll 1$ 이 되어 m_p 를 무시할 수 있으므로, 식 (23)과 (24)로부터 다음과 같은 진자각들의 정상작동 상태를 구할 수 있다.

$$\tan y_{1n} = \pm \frac{a_t}{g}, \quad a_t = \sqrt{\dot{X}_n^2 + \dot{Y}_n^2} \tag{26}$$

$$y_{3n} = \tan^{-1}(\dot{Y}_n/\dot{X}_n) \tag{27}$$

정상작동 상태에 대한 크레인의 선형 모델은 섭동함수(perturbed function) $\delta \vec{y}$ 와 $\delta \vec{u}$ 를 이용한 다음 식으로부터 유도할 수 있다. (8)

$$\frac{d\delta \vec{y}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}|_n \delta \vec{y} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}|_n \delta \vec{u} \tag{28}$$

여기서, $\delta \vec{y} = \vec{y} - \vec{y}_n$, $\delta \vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_n$ 이다.

비선형 상태방정식과 정상작동 상태방정식을 이용한 크레인의 선형 상태방정식은 식 (28)에서 유도할 수 있다. 실제로 트롤리의 가속도는 중력가속

도보다 작으므로, 즉 $a_t \ll g$ 이므로 화물운송에 큰 영향을 미치는 진자각 y_{1n} 이 작아서 $\sin y_{1n} \approx \tan y_{1n} \approx y_{1n}$ 과 $\cos y_{1n} \approx 1$ 이 되어서, 식 (10)으로부터 와이어의 비틀림각속도 $\dot{\phi}$ 와 화물의 진자각속도 $\dot{\psi}$ 의 섭동함수는 같다. 즉, $\delta\dot{\phi} = \delta\dot{\psi}$ 이다. 이것을 식 (28)에서 유도된 선형 상태방정식에 적용하면, 크레인의 선형 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\delta\bar{y}}{dt} = N_a\delta\bar{y} + N_b\delta\bar{u} \quad (29)$$

여기서,

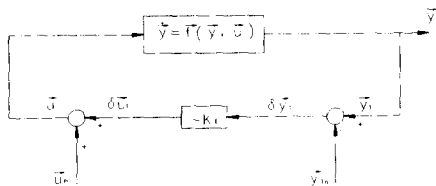
$$N_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{11} & 0 & n_{12} + n_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n_{21} & 0 & n_{22} + n_{29} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ n_{31} & 0 & n_{32} + n_{39} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_{41} & 0 & n_{42} + n_{49} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n_{51} & n_{52} \\ 0 & 0 \\ n_{61} & n_{62} \\ 0 & 0 \\ n_{71} & n_{72} \\ 0 & 0 \\ n_{81} & n_{82} \end{bmatrix}$$

행렬 N_a 와 N_b 의 원소들은 부록을 참조한다.

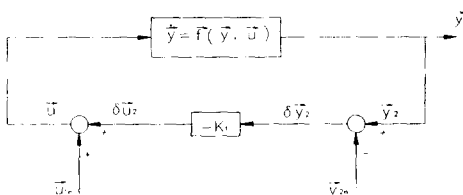
또한 진자각들의 정상작동 상태는 식 (25)와 (26)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y_{3n} = y_{3n}, \quad y_{1n} = \pm \frac{a_t}{g} \quad (30)$$

크레인이 트롤리와 거더모터의 정상작동 상태인



(a) Motion with acceleration and deceleration



(b) Motion with constant velocity

Fig. 4 Block-diagram of overhead crane using partial state feedback control

등속으로 운동하면, $\ddot{X}_n = \ddot{Y}_n = 0$ 이므로, 크레인 시스템의 정상작동 상태방정식은 식 (22)~(25)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_{1n} = u_{2n} = 0 \quad (31)$$

$$y_{1n} = y_{3n} = y_{9n} = 0 \quad (32)$$

식 (31)과 (32)는 크레인이 화물의 진자운동으로 발생한 회전력으로 화물을 운송하는 것을 보여준다. 크레인의 선형 상태방정식은 식 (29)와 (32)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\delta\bar{y}}{dt} = N_a^0\delta\bar{y} + N_b^0\delta\bar{u} \quad (33)$$

여기서,

$$N_a^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_t / (d_1 - m_t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_p / m_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ l g_t d_1 / (m_t - d_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_b^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 / (d_1 - m_t) & 0 & 0 & 0 & l m_t / (m_t - d_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}^T$$

2.3 부분상태 케환제어기를 이용한 진자각제어

정상작동 상태를 알 수 있는 비선형 크레인 시스템은 Fig. 4에서 보는 바와 같이 케환 이득상수 K 를 사용하여 섭동함수 $\delta\bar{y}$ 의 값들을 0으로 수렴시키므로서 제어할 수 있고, 이득상수는 정상작동 상태에 대한 선형 모델의 상태변수들을 임의의 초기값에서 0으로 수렴시키는 상수이다. 크레인의 선형 모델에서 화물의 진자운동과 크레인의 운동에 관한 상태변수들을 제어하는 전 상태 케환제어기를 사용하였을 때, 화물의 진자각과 크레인 위치의 과도응답은 케환 이득상수의 증가로 회전력이 증가하여 만족할 수 없었다.

본 연구에서는 화물의 진자운동이 운송작업지연에 큰 영향을 미치므로, 화물의 진자운동에 관한 상태변수들을 제어하는 부분상태 케환제어기를 사용하였다. 또한 선형 모델은 트롤리와 거더모터의 회전력으로 작동되는 다중입력인 시스템이므로, 부분상태 케환제어로 얻은 이득상수는 이득행렬의 원소위치를 바꾸어서 조정할 수 있으므로, 원

하는 과도응답을 얻는 것은 쉽지가 않지만, 다중입력을 단일입력으로 바꿀 수 있다면 이득행렬은 이득벡터로 변하므로, 과도응답은 쉽게 조정된다. 따라서 다중입력인 선형상태 케환제어 시스템이 다음 조건을 만족하면 단일입력인 선형상태 케환제어 시스템으로 바꿀 수 있다.⁽⁹⁾

① 시스템은 모든 상태변수들이 제어될 수 있는 완전 가제어 시스템, 즉 $n \times n$ 행렬 A 와 $n \times r$ 행렬 B 에 대한 가제어성(controllability) 행렬 $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ 의 계수(rank)가 A 의 계수와 같은 시스템이고, A 의 계수가 n 인 시스템이다.

② 시스템의 특성행렬 A 는 영이 아닌 서로 다른 고유치(eigenvalue)를 가진다.

조건 ①과 ②를 만족하는 다중입력 시스템은 단일입력 시스템으로 수정되므로, 차원이 $r \times n$ 인 케환이득행렬 K 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \bar{q} \cdot \bar{k} \quad (34)$$

여기서, 차원이 $r \times 1$ 인 \bar{q} 는 과도응답의 크기를 조정하는 임의의 상수벡터로서 다중입력 크기의 비를 나타내고, 차원이 $1 \times n$ 인 \bar{k} 는 케환이득벡터이다. 그래서 \bar{k} 의 원소위치가 고정될 때, 시스템의 과도응답은 \bar{q} 의 원소들의 크기비로서 조정된다.

가감속운동하는 크레인의 선형 모델은 식 (29)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = A_1 \bar{x}_1 + B_1 \bar{v} \quad (35)$$

$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = A_3 \bar{x}_1 + A_4 \bar{x}_2 + B_2 \bar{v} \quad (36)$$

$$\text{여기서, } \bar{v} = \overrightarrow{\delta u}, \quad \bar{x}_1 = [\delta y_1 \ \delta y_2 \ \delta y_3 \ \delta y_4]^T$$

$$\bar{x}_2 = [\delta y_5 \ \delta y_6 \ \delta y_7 \ \delta y_8]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_{11} & 0 & n_{12} + n_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_{21} & 0 & n_{22} + n_{29} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{31} & 0 & n_{32} + n_{39} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{41} & 0 & n_{42} + n_{49} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n_{51} & n_{52} \\ 0 & 0 \\ n_{61} & n_{62} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n_{71} & n_{72} \\ 0 & 0 \\ n_{81} & n_{82} \end{bmatrix}$$

식 (35)는 화물의 진자운동에 관한 상태변수들만으로 만들어진 다중입력 시스템이고, 가제어성 행렬 $C_i = [B_i \ A_i \cdot B_i \ A_i^2 \cdot B_i \ A_i^3 \cdot B_i]$ 로 정의되는 다중입력 시스템이 조건 ①과 ②를 만족하므로 단일

입력 시스템으로 만들 수 있는 것을 보여준다. 식 (36)은 크레인운동이 트롤리와 거더운동뿐만 아니라 화물의 진자운동의 영향을 받으므로 모터의 회전력으로 원하는 크레인의 동적거동을 얻을 수 없는 것을 보여준다. 따라서 크레인의 선형 모델은 다음과 같이 부분상태 케환제어기를 사용한 단일입력 시스템으로 만들 수 있다.

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = A_1 \bar{x}_1 + \bar{b} \bar{w}$$

$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = A_3 \bar{x}_1 + A_4 \bar{x}_2 + B_2 \bar{v}$$

$$\bar{w} = -\bar{k}_1 \bar{x}_1 \quad (37)$$

여기서, $\bar{b} = B_1 \bar{q}_1$, $\bar{v} = -K_1 \bar{x}_1 = -\bar{q}_1 \bar{k}_1 \bar{x}_1$ 이고, \bar{w} 는 단일입력이 된다. 이득벡터 \bar{k}_1 는 Bass-Gura 식을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$\bar{k}_1 = (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}') (\Delta^{-1})^T C_1^{-1} \quad (38)$$

여기서, $\bar{\alpha} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ 는 원하는 고유치 $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4]$ 를 특성 다항식 $\alpha(s) = s^4 + a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s + a_4$ 로 바꾸어서 얻은 다항식의 계수이고, $\bar{\alpha}' = [a'_1 \ a'_2 \ a'_3 \ a'_4]$ 는 시스템의 행렬 A_1 을 특성 다항식 $a(s) = s^4 + a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s + a_4$ 로 바꾸어서 얻은 다항식의 계수이고, Δ 는 첫번째 열 $[1 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ 로 이루어진 lower triangular Toeplitz 행렬이다.

등속운동하는 크레인의 선형 모델은 식 (33)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = A_1^0 \bar{x}_1 + B_1^0 \bar{v} \quad (39)$$

$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = A_3^0 \bar{x}_1 + A_4^0 \bar{x}_2 + B_2 \bar{v} \quad (40)$$

여기서,

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_l / (d_1 - m_t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -m_p / m_a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ l g d_1 / (m_t - d_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4^0 = A_4$$

$$B_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 / (d_1 - m_t) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l m_t / (m_t - d_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}$$

식 (39)에서 가제어성 행렬 $C^0=[B^0 \ A_1^0 \ B_1^0 \ A_1^{02} \cdot B_1 \ A_1^{03} \cdot B_1]$ 로 정의되는 다중입력 시스템은 조건 ①과 ②를 만족하지 않으므로 단일입력 시스템으로 만들 수 없다. 그러나 Fig. 2에서 보는 바와 같이 진자각 θ 가 0에 수렴하도록 제어되면 진자각 ψ 도 0에 수렴하므로, ψ 가 화물의 흔들림에 큰 영향을 주지 않게 되고, θ 는 트롤리모터의 회전력으로 제어할 수 있으므로, 다중입력 시스템은 식 (39)와 (40)으로부터 다음과 같은 단일입력 시스템으로 만들 수 있다.

$$\frac{d\vec{x}_{t1}}{dt} = A_{t1}\vec{x}_{t1} + \vec{b}_t\vec{v}_t \tag{41}$$

$$\frac{d\vec{x}_{t2}}{dt} = A_{t3}\vec{x}_{t1} + A_{t4}\vec{x}_{t2} + B_t\vec{v} \tag{42}$$

여기서, $\vec{v}_t = \delta u_1$, $\vec{x}_{t1} = [\delta y_1 \ \delta y_2]^T$
 $\vec{x}_{t2} = [\delta y_3 \ \delta y_4 \ \delta y_5 \ \delta y_6 \ \delta y_7 \ \delta y_8]^T$

$$A_{t1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g_t/(m_t - d_1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{t3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & l g_t d_1 / (m_t - d_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A_{t4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_p/m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(d_1 - m_t) \end{bmatrix}$$

$$B_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & l m_t / (m_t - d_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

부분상태 케환제어기를 사용한 크레인의 선형 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\vec{x}_{t1}}{dt} = A_{t1}\vec{x}_{t1} + \vec{b}_t\vec{v}_t \tag{43}$$

$$\frac{d\vec{x}_{t2}}{dt} = A_{t3}\vec{x}_{t1} + A_{t4}\vec{x}_{t2} + B_t\vec{v} \tag{44}$$

$$\vec{v}_t = -\vec{k}_t\vec{x}_{t1} \tag{45}$$

이득벡터 \vec{k}_t 는 \vec{k}_t 를 구하는 방법과 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{k}_t = (\vec{a}_t - \vec{\alpha}_t) (\Delta_t^{-1})^T C_1^0 \tag{46}$$

여기서, $\vec{a}_t = [a_{t1} \ a_{t2}]$, $\vec{\alpha}_t = [a_{t1} \ a_{t2}]$, $C_1^0 = [\vec{b}_t \ A_{t1} \cdot \vec{b}_t]$ 과 Δ_t 는 첫번째 열 $[1 \ a_{t1}]^T$ 로 이루어진

lower triangular Toeplitz 행렬이다.

평면운동하는 크레인이 화물을 운송할 때, 크레인의 운동구간, 즉 가속, 등속, 감속운동구간에서 정상작동 상태가 바뀌게 된다. 그래서 선형 모델은 화물의 진자각이 운동구간마다 임의의 초기조건에서 0으로 수렴되는 부분상태 케환제어기를 설계하였으므로, 가속운동에서 등속운동 또는 등속운동에서 감속운동으로 바뀔 때 불연속점이 발생하게 되어, 크레인의 전 운동구간에서 화물의 진자각들이 효과적으로 제어되지 않을 수 있다. 그러나 비선형 모델은 Fig. 4에서 보는 바와 같이 정상작동 상태에서의 회전력 \vec{u}_n 과 선형 모델에서 설계된 부분상태 케환제어기의 이득상수에서 얻은 회전력 $\delta \vec{u}$ 을 합한 회전력 \vec{u} 를 사용하여 화물의 흔들림을 억제하므로, 크레인의 전 운동구간에서 불연속점이 발생하지 않도록 화물의 흔들림은 억제될 수 있다. 여기서, $\vec{y}_1 = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$, $\vec{y}_{1n} = [y_{1n} \ y_{2n} \ y_{3n} \ y_{4n}]^T$, $\vec{u}_n = [u_{1n} \ u_{2n}]^T$, $\vec{y}_2 = [y_1 \ y_2]^T$ 와 $\vec{y}_{2n} = [y_{1n} \ y_{2n}]^T$ 이다.

3. 시뮬레이션 결과

크레인이 트롤리와 거더의 운동으로 화물을 운송할 때, 컴퓨터 시뮬레이션에 이용된 정보들은 실제 작업장에 설치된 크레인 시스템의 정보로서, 트롤리질량 $m_1=1,150$ kg, 거더질량 $m_2=9,500$ kg, 화물질량 $m=8,000$ kg, 와이어길이 $l=2.5$ m, 비틀림상수 $p=0.1$ Nm/rad, 화물 형상을 나타낸 $m_t=1.2323$, $m_a=0.02478$, 트롤리와 거더의 최대속도가 $V_x=V_y=0.525$ m/sec, 가감속 운동시간이 $t_1=t_3=5$ 초, 등속운동시간이 $t_2=10$ 초 등으로 하였다.⁽⁴⁾ 크레인 시스템의 시뮬레이션에 사용한 수치해석은 스텝크기를 0.1초로 한 Runge-Kutta 방법이고, 크레인의 초기 위치는 $\vec{y}=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 로 하였다. 트롤리와 거더모터의 등가 질량관성모멘트 I_1 과 I_2 를 무시하였다.

Fig. 5는 개회로 비선형 크레인 시스템의 동적 거동을 보여주는 것으로, Fig. 3에서 보여준 트롤리와 거더 구동모터의 정상작동 상태에서 얻은 모터의 회전력이 사용되었다. Fig. 5(a)와 (b)는 화물의 진자각 θ 와 ψ 가 진자운동을 하고, ψ 의 주기가 θ 보다 길며, 구동모터의 정상작동 상태에서 화물운송작업에 큰 영향을 미치는 θ 의 편차가 작은

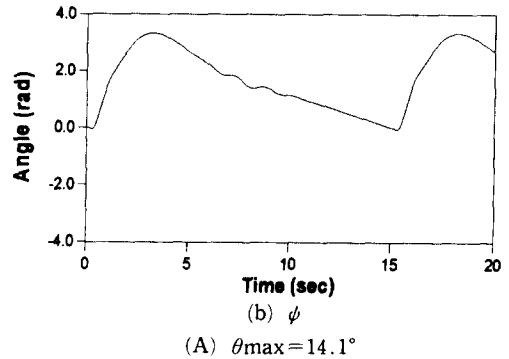
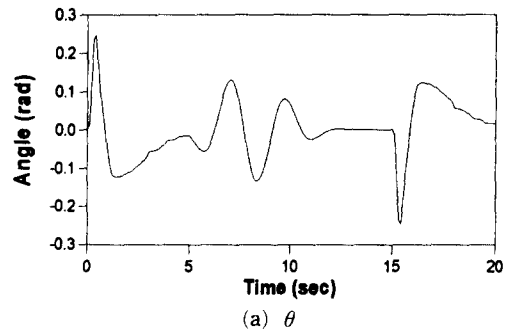
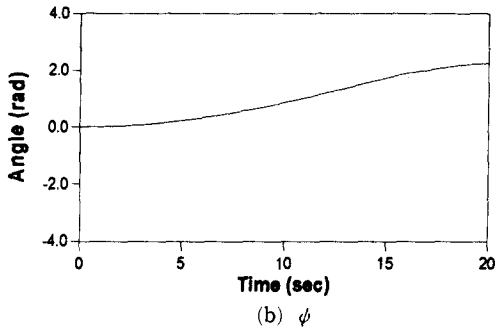
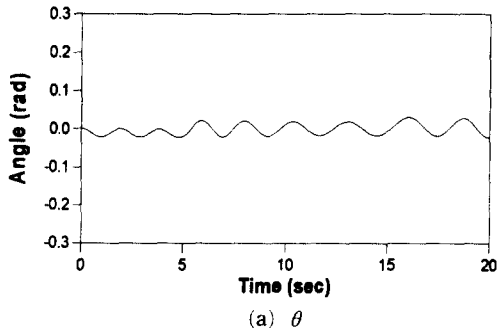


Fig. 5 Swing angles of overhead crane in the operating state

것을 보여준다. 그래서, Fig. 5의 결과가 비선형 크레인 시스템의 운동이 정상작동 상태에 대한 선형 모델을 이용하여 해석될 수 있는 기준이 되었다.

가감속운동하는 비선형 크레인 시스템에서 화물의 진자각 θ 와 ψ 의 과도응답은 선형 모델의 부분상태 궤환제어기에서 구한 고정된 이득행렬을 사용하면 크레인의 비선형 특성때문에 구동모터들의 회전력이 증가되어 만족할 수 없었다. 그러나 화물운송작업시간은 거의 θ 의 동적거동에 좌우되므로, θ 는 과도응답의 크기를 조정하는 상수벡터 \vec{q}_i 을 0.1초마다 조정하여 얻은 변하는 이득행렬 K_i 을 사용하는 방법을 적용하여 억제하였고, 이때 ψ 의 동적거동이 조사되었다. 이런 방법의 사용으로 나타난 결과가 Fig. 6에서 보여진다.

Fig. 6에서 보는 바와 같이 크레인의 가감속운동 구간에서, 화물의 진자각 θ 는 억제되지만, 진자각 ψ 는 억제되지 않는다. 그러나 Fig. 2에서 보는 바와 같이 크레인의 평면운동시 흔들리는 화물이 xy-평면에 투영되었을 때 화물의 자취는 점 P를 중심으로 하는 원주상이 되고, ψ 는 x-축에서 원주상

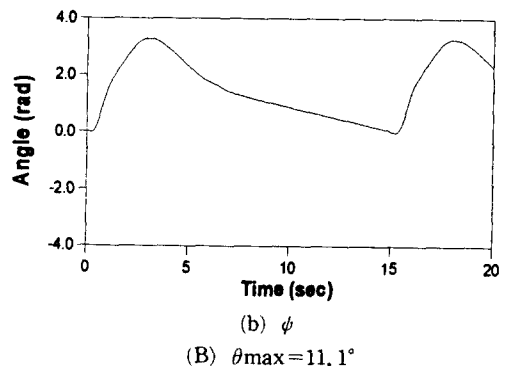
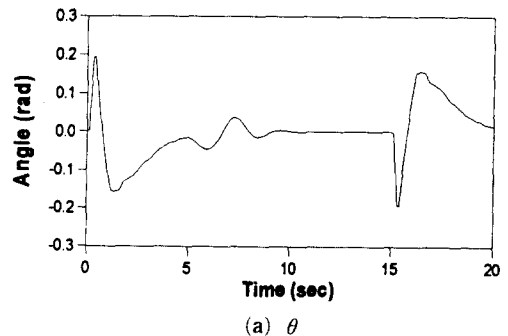
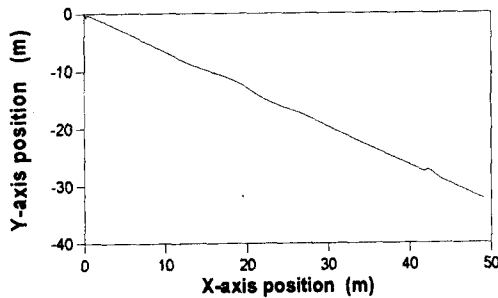


Fig. 6 Anti-swing of overhead crane using the partial state feedback control

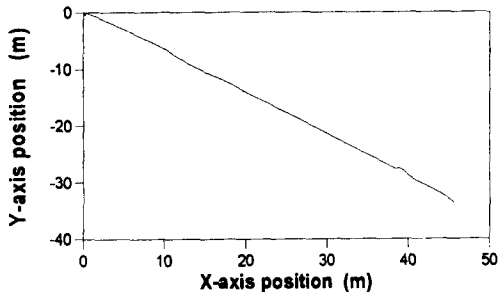
에 있는 화물까지의 사이각이고, θ 가 0° 로 수렴하면 투영원은 점점 작아진다. 그래서 ψ 가 제어되지 않더라도 θ 가 제어된다면, 화물의 진자운동으로 발생한 주변 설비와 충돌이나 화물운송작업의 지체 등의 문제점이 해결될 수 있다. 이때 선형 모델에서 사용한 원하는 고유치 $\eta = [-4 \ -4 \ -3 \ -3]$ 는 비선형 모델에서도 같이 사용하였다. 또한 ψ 를 제한하지 않고 θ 를 제한하는 크레인의 등속운동구간에서, θ 와 ψ 가 동시에 억제되었다. 이것은 선형 모델에 사용된 원하는 고유치를 비선형 모델에 사용한 것이 아니고, 원하는 고유치들의 위치를 조정하여 얻은 이득벡터 \vec{k}_i 를 사용하였기 때문이다. 이때 원하는 고유치는 (A)에서 $\eta = [-3.181 \ -3.181]$, (B)에서 $\eta = [-4.680 \ -4.680]$ 이다.

Fig. 6(A)와 (B)에서 보는 바와 같이 본 연구에서 제안한 부분상태 제한제어기를 사용하였을 때, 화물의 진자각 θ 와 ψ 는 정성적으로 비슷하게 억제되었고, θ 의 최대 오버슈트가 작아짐에 따라서 크레인의 등속운동구간에서 화물의 흔들림이 감소한다.

Fig. 7(a)와 (b)는 Fig. 6과 같이 화물의 진자운



(a) $\theta_{max} = 14.1^\circ$



(b) $\theta_{max} = 11.1^\circ$

Fig. 7 Position of overhead crane for maximum overshoot of swing angle θ

동을 억제하여 진자각 θ 의 최대 오버슈트가 각각 약 14.1° 와 약 11.1° 일 때 XY-평면상에서의 크레인의 위치를 보여주는 것으로 크레인이 원활히 움직이고, 트롤리와 거더의 운동이 반대방향으로 진행하는 것을 보여준다. 그리고 크레인의 최종위치와 속도는 Fig. 7(a)에서 약 $X=49\text{m}$, $Y=-32\text{m}$, $\dot{X}=-0.04\text{m/sec}$, $\dot{Y}=0.18\text{m/sec}$ 이고, Fig. 7(b)에서 약 $X=45\text{m}$, $Y=-33\text{m}$, $\dot{X}=-0.03\text{m/sec}$, $\dot{Y}=0.17\text{m/sec}$ 이므로, 크레인의 위치는 제어되지 않았다. 이것은 전 상태 제한제어기로는 화물의 진자각과 크레인의 위치의 만족할만한 과도응답을 얻을 수 없었고, 화물운송 작업지연에는 화물의 진자운동이 큰 영향을 미치므로 화물의 흔들림만을 제어하였기 때문이다. 앞으로 화물의 진자각과 크레인의 위치를 동시에 제어하는 제어기 설계에 대한 연구가 진행되어야 할 것이다.

4. 결 론

크레인 시스템은 크레인의 평면운동과 화물의 진자운동때문에 비선형 시스템이 된다. 이 시스템의 운동은 정상작동 상태를 기준으로 얻은 선형 모델을 사용하여 해석할 수 있다. 선형 모델에서 화물의 진자운동에 관한 상태변수들을 제어하는 부분상태 제한제어기를 설계하고, 이 제어기에서 얻은 제한이득상수를 이용하여, 비선형 시스템의 화물의 진자각을 거더와 트롤리모터의 회전력으로서 제한한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 비선형 크레인 시스템이 가속, 등속, 감속 운동을 연속적으로 하면서 화물을 운송할 때, 화물운송 작업에 가장 큰 영향을 미치는 화물의 진자각 θ 를 억제하여, 주변 설비와 충돌을 피하거나 화물운송 작업의 지체를 방지할 수 있었다.

(2) 화물의 진자각 θ 의 최대 오버슈트가 감소하면 크레인의 등속운동구간에서 화물의 흔들림이 감소한다.

참고문헌

- (1) 이동철, 신민생, 하주식, 김상봉, 1992, "디지털 설계법에 의한 크레인계의 제어" 대한기계학회 논문집, 제16권, 제1호, pp 41~52.
- (2) 윤지섭, 강이석, 1995, "천정크레인의 무진동/위치 제어기 개발에 관한 연구" 대한기계학회 논문

- 문집, 제19권, 제6호, pp 1391~1401.
- (3) 홍금식, 손성철, 1995, “속도선도 모델 및 오차 피드백을 이용한 크레인 제어” 대한기계학회 추계학술대회논문집 (I), pp 552~557.
- (4) Moustafa, K. A. and Ebeid, A. M., 1988, “Nonlinear Modeling and Control of Overhead Crane Load Sway” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, pp 266~271.
- (5) 이태영, 1994, “퍼지이론을 적용한 Overhead Crane의 Anti-swing 제어” 석사학위논문, 경북대학교, pp 1~57.
- (6) Meriam, J. L., and Kraige, L. G., 1993, *Engineering Mechanics*, 3rd ed., Vol. 2, Dynamics, John Wiley & Sons, Inc.
- (7) Greenwood, D. T., 1965, *Principles of Dynamics*, Prentice Hall.
- (8) Brogan, W. L., 1991, *Modern Control Theory*, 3rd ed., Prentice Hall.
- (9) Kailath, T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

부 록

$$R = m_t y_{1n}^2 + m_a$$

$$D = [R\{m_t - (d_1 \cos^2 y_{3n} + d_2 \sin^2 y_{3n})\} - m_t (d_1 \sin^2 y_{3n} + d_2 \cos^2 y_{3n}) y_{1n}^2 + d_1 d_2 y_{1n}^2] / l^2$$

$$d_{11} = (d_2 y_{1n}^2 - R) \cos y_{3n} / l^2$$

$$d_{12} = (d_1 y_{1n}^2 - R) \sin y_{3n} / l^2$$

$$d_{13} = \{R - (d_1 \sin^2 y_{3n} + d_2 \cos^2 y_{3n}) y_{1n}^2\} / l^2$$

$$d_{14} = (d_2 - d_1) y_{1n} \sin y_{3n} \cos y_{3n} / l^2$$

$$d_{21} = (m_t - d_2) y_{1n} \sin y_{3n} / l^2$$

$$d_{22} = (d_1 - m_t) y_{1n} \cos y_{3n} / l^2$$

$$d_{23} = d_{14}$$

$$d_{24} = \{m_t - (d_1 \cos^2 y_{3n} + d_2 \sin^2 y_{3n})\} / l^2$$

$$d_{31} = \{R (m_t - d_2 \sin^2 y_{3n}) - m_t d_2 y_{1n}^2 \cos^2 y_{3n}\} / l$$

$$d_{32} = d_1 (R - m_t y_{1n}^2) \sin y_{3n} \cos y_{3n} / l$$

$$d_{33} = d_1 (d_2 y_{1n}^2 - R) \cos y_{3n} / l$$

$$d_{34} = d_1 (m_t - d_2) y_{1n} \sin y_{3n} / l$$

$$d_{41} = d_2 (R - m_t y_{1n}^2) \sin y_{3n} \cos y_{3n} / l$$

$$d_{42} = \{R (m_t - d_1 \cos^2 y_{3n}) - m_t d_1 y_{1n}^2 \sin^2 y_{3n}\} / l$$

$$d_{43} = d_2 (d_1 y_{1n}^2 - R) \sin y_{3n} / l$$

$$d_{44} = d_2 (d_2 - m_t) y_{1n} \cos y_{3n} / l$$

$$n_{i1} = (d_{i4} m_p y_{3n} / y_{1n} - g_i d_{i3}) / D$$

$$n_{i2} = (d_{i4} m_p y_{3n} / y_{1n} - g_i d_{i3}) / D$$

$$n_{i9} = -m_p d_{i4} / D$$

$$n_{5j} = d_{1j} / D$$

$$n_{6j} = d_{2j} / D$$

$$n_{7j} = d_{3j} / D$$

$$n_{8j} = d_{4j} / D$$

여기서, $i=1, 2, 3, 4, j=1, 2$ 이다.