

〈논 문〉

축-이중 원판계의 진동해석

전 상 복* · 이 종 원**

(1996년 4월 22일 접수)

Vibration Analysis of the Shaft-duplicate Disk System

Sang-Bok Chun and Chong-Won Lee

Key Words : Assumed Modes Method(가정모드법), Flexible Rotor(탄성회전체), Duplicate Flexible Disks(이중 탄성원판), Flexible Shaft(탄성축), Hard Disk Drive Spindle System(하드디스크 스피들 구동계), Coupled Vibration(연성진동)

Abstract

The effect of duplicate flexible disks on the vibrational modes of a flexible rotor system is investigated by using an analytical method based on the assumed modes method. The rotor model to be analyzed consists of duplicate disks on a flexible shaft. In modeling the system, centrifugal stiffening and disk flexibility effects are taken into account. To demonstrate the effectiveness of the method, a hard disk drive spindle system commonly used in personal computers and a simple flexible rotor system with two disks are selected as examples. In particular, the dynamic coupling between the vibrational modes of the shaft and the duplicate disks is investigated with the shaft rotational speed varied.

기 호 설 명

A_s : 단면적
 D : 굽힘강성
 E_D, E_S : 종탄성계수
 \mathcal{F} : 레이레이 소산함수(Rayleigh's dissipation function)
 h_D, h_{D_i} : 두께
 I_{Sy}, I_{Sy_i} : Y_1 축에 대한 단면관성모멘트(area moment of inertia)
 $J_{Dx}, J_{Dy}, J_{Dx_i}, J_{Dy_i}$: X_2 및 Y_2 축에 대한 질량관성모멘트(mass moments of inertia)
 L : 계의 라그랑지안(system Lagrangian)
 M_D, M_{D_i} : 질량
 (m, n) : 절직경 및 절원의 개수

Q_e, Q_n, Q_v, Q_w, q_r : 일반화 좌표로 구성된 벡터
 $R_1, R_2, (R_{1i}, R_{2i})$: 원판의 내부반경 및 외부반경
 (r, θ) : 원판을 위한 극좌표계
 S : 축의 길이
 T, T_D, T_{D_i}, T_S : 운동에너지
 U, U_D, U_{D_i}, U_S : 변형에너지
 u_D, u_{D_i} : X_2 축에 대한 원판의 변위
 v_0, w_0, v_i, w_i : Y_1 및 Z_1 축에 대한 원판이 위치한 곳에서의 축의 변위
 v_s, w_s : Y_1 및 Z_1 축에 대한 축의 변위
 Z_D, Z_S : 복소수형태로 표현한 일반화 좌표
 Φ_D, Φ_S : 허용함수로 구성된 벡터
 ∇^2 : 라플라시안(Laplacian)
 ν : 푸아송비
 ρ_D, ρ_S : 질량밀도
 $\sigma_r(\sigma_n), \sigma_\theta(\sigma_{\theta_i})$: 반경 및 원주방향의 응력
 Ω : 축의 회전각속도

*회원, 경인여자전문대학 환경공학과

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

하첨자

- ()_D : 원판
- ()_{D_i} : i번째 원판
- ()_S : 축
- ()_{l_i}, ()_{b_i} : i번째 원판 및 베어링에서의 값

1. 서 론

최근, 산업계에서 고성능 및 고효율의 회전기계 수요의 증대에 따라 회전기계를 구성하는 각 부품은 과거보다 더욱 혹독한 환경에서 사용될 수 있도록 엄격하게 설계되고 있다. 이러한 환경에서 각 요소, 즉 원판 또는 축 요소들을 과거와 같이 간단하게 일부 강체로 가정하여 해석하면, 실제 회전체의 동역학적 거동이 정확히 예측되지 않는 경우가 자주 발생하게 된다. 이때에는 각 요소의 탄성적 거동을 설계에 고려할 필요가 있으며, 특히, 다중 탄성원판으로 구성된 회전체의 진동은 각 요소간의 동역학적 연성(連性)효과때문에 매우 복잡한 동역학적 특성을 갖게 되므로 더욱 정교한 해석이 요구된다.

과거부터 탄성원판의 진동에 대해 여러 가지 자세한 연구가 이루어져 있다. Lamb⁽¹⁾ 그리고 Southwell⁽²⁾은 일정 단면을 갖는 얇은 원판에 대한 완전해를 구하였고, Wah⁽³⁾는 초기 인장력 또는 압축력에 따른 여러 가지 경계조건에 대한 원판의 동특성을 해석하였으며, Mote⁽⁴⁾는 Ritz 방법을 사용하여 균일 인장력이 회전하는 박원판(薄圓板)에 작용할 때 원판의 동적거동을 연구하여 인장력과 원판의 안정성 및 강성의 관계를 밝혔다. 그리고 Lee⁽⁵⁾는 회전원심력 하의 외주가 고정된 얇은 고리형원판의 안정성에 대해 연구했다. 앞에 기술한 대부분의 연구는 단순 형상의 원판을 대상으로 한 엄밀해를 구했으며, 복잡한 형상을 갖는 원판의 진동 해석에는 유한요소법이 일반적으로 사용되고 있다.⁽⁶⁻⁸⁾

근래에 와서 축-원판계의 진동 특성에 대한 많은 연구 결과가 보고되고 있다. 그러나 이들은 축과 원판의 연성작용을 고려하지 않고 원판을 강체로 가정하여 해석한 것이 대부분이다.⁽⁹⁾ 최근에 발표된 축과 원판의 연성진동모드의 중요성에 대한 연구로서는 다음과 같은 것이 있다. Shahab 및 Tomas⁽¹⁰⁾는 유한요소법과 계의 원주 방향에의 주기성의 개념을 이용하여 회전하지 않는 축-다중 원

판계의 거동에 있어서 축 및 원판의 탄성의 영향을 논하였으며, Wu 및 Flowers⁽¹¹⁾는 전달함수법을 이용한 방법을 제안하였는데, 여기서 전달함수 구성에 있어서 원판의 탄성효과를 추가적으로 고려하였다. Sakata⁽¹²⁾는 유한요소법을 이용하여 탄성 지지대, 탄성축 및 탄성원판으로 구성된 회전계의 진동 특성을 연구하였고, Wu 및 Flowers⁽¹³⁾는 회전동역학에 있어서 원판의 탄성효과를 실험적으로 조사하였으며, 전 및 이^(14,15)는 부분구조합성법 및 가정모드법을 사용하여 탄성 익-원판계가 탄성회전계의 진동특성에 미치는 영향을 연구하였다.

본 연구에서는 탄성 축-이중 원판계에 있어서 저차 고유진동수 및 진동모드를 구하기위해 Meirovitch가 제안한 가정모드법⁽¹⁶⁾을 이용한 해석적 방법을 제시한다. 본 방법은 유한요소법과 비교하여 작은 자유도를 가지면서 계산이 효율적이며 사용하기 쉽다는 장점을 보여 주고 있다. 본 방법의 적용의 예로서 일반 개인용 컴퓨터(PC)에 사용되는 두개의 원판으로 구성된 하드 디스크 구동(HDD) 스피들계 및 간단한 탄성 회전체를 해석하였으며, 여기서 축과 이중원판의 진동모드의 동역학적 연성효과와 중요성을 논의하였다.

2. 이론해석

Fig. 1에 보인 바와 같이 두개의 베어링으로 지지된 탄성 중공(中空)축, 그리고 두개의 탄성원판으로 구성된 해석 모델을 고려한다. 여기서 축은 일정치 않은 단면을 가진 보, 그리고 원판은 일정 두께를 가진 원형판으로 가정한다. 또한 해석 전반에 걸쳐 변형은 극히 작은 범위에 있는 것으로 가정하여 선형적 해석 이론이 적용되는 것으로 한다. 본 연구의 목적은 축-이중 원판계의 연성진동특성을 파악하기 위한 해석적 방법을 개발하는 것이다. 특히, 본 연구는 몇 개의 저차 굽힘모드를 해석하

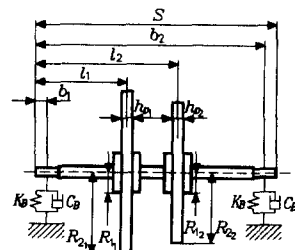


Fig. 1 Analysis model

는데 그 목적이 있기 때문에 비틀림 및 축방향의 진동모드는 다루지 않는다.

2.1 각 요소의 에너지 및 소산함수

전체계의 운동, 변형에너지 및 소산함수를 구하기 위해, 계를 여러 개의 부분구조들의 합으로 이루어진 것으로 간주하고, 여기에 각 부분구조의 강체 운동을 묘사하기 위해 각 부분구조에 고정된 국소좌표계(local reference frame)를 지정한다. 그러면 각 부분구조의 탄성변형은 지정된 국소 좌표계에 대한 상대운동으로 정의된다. Fig. 2 및 Table 1에, 이러한 국소좌표계 및 관련 단위벡터 그리고 각 좌표계에 대해 정의된 병진 및 회전변위를 설명하였다.

이제 Fig. 2(a)에 보인 바와 같이 원판에 고정된 국소 좌표계를 고려해 보자. $O-X_0Y_0Z_0$ 좌표계에 대한 $P-X_2Y_2Z_2$ 좌표계의 순간 절대 각속도벡터는

$$\omega_{20} = \left[\Omega \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\theta_\eta^2 + \theta_\epsilon^2) \right\} + \theta_\eta \dot{\theta}_\epsilon \right] i_2 + (\dot{\theta}_\epsilon - \Omega \theta_\eta) j_2 + (\dot{\theta}_\eta + \Omega \theta_\epsilon) k_2 \quad (1)$$

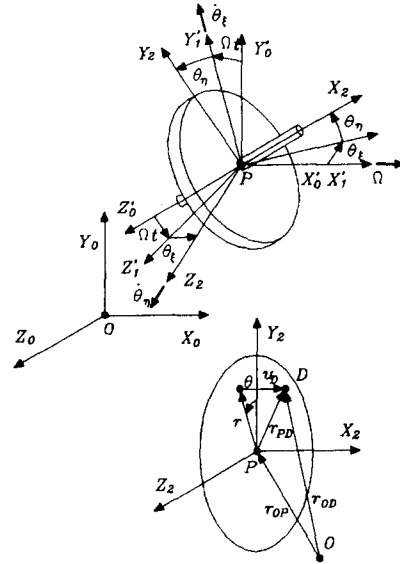
그리고 원판상의 임의의 점 D 의 위치벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} r_{OD} &= r_{OP} + r_{PD} \\ &= (\theta_\eta v_0 - \theta_\epsilon w_0 + u_D) i_2 + (v_0 + r \cos \theta) j_2 + (w_0 + r \sin \theta) k_2 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, v_0 및 w_0 는 원판이 있는 곳에서의 축의 변위, 그리고 (r, θ) 는 Y_2-Z_2 평면상에서 정의된 점 D 의 극좌표를 나타낸다. 따라서 점 D 의 절대속도는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{r}_{OD} \equiv [dr_{OD}/dt]_0 = [dr_{OD}/dt]_2 + w_{20} \times r_{OD} \quad (3a)$$

또는



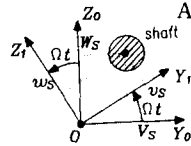
(a) i -th disk

* At the i -th disk location

$$v_s = v_i, \quad w_s = w_i$$

At the i -th bearing location

$$v_s = v_b, \quad w_s = w_b$$



(b) Shaft

Fig. 2 Coordinate systems

$$\begin{aligned} \dot{r}_{OD} &= \left\{ (\theta_\eta \dot{v}_0 - \theta_\epsilon \dot{w}_0 - \Omega \theta_\eta w_0 - \Omega \theta_\epsilon v_0 + \dot{u}_D \right. \\ &\quad \left. + r \sin \theta (\dot{\theta}_\epsilon - \Omega \theta_\eta) - r \cos \theta (\dot{\theta}_\eta + \Omega \theta_\epsilon) \right\} i_2 \\ &\quad + \left\{ (\dot{\theta}_\eta + \Omega \theta_\epsilon) u_D + \dot{v}_0 - \Omega w_0 \right. \\ &\quad \left. + r \sin \theta \left[\frac{\Omega}{2} (\theta_\eta^2 + \theta_\epsilon^2) - \theta_\eta \dot{\theta}_\epsilon - \Omega \right] \right\} j_2 \\ &\quad + \left\{ (\Omega \theta_\eta - \dot{\theta}_\epsilon) u_D + \dot{w}_0 + \Omega v_0 + r \cos \theta \right. \\ &\quad \left. \times \left(-\frac{\Omega}{2} (\theta_\eta^2 + \theta_\epsilon^2) + \theta_\eta \dot{\theta}_\epsilon + \Omega \right) \right\} k_2 \end{aligned} \quad (3b)$$

Table 1 Description of coordinate systems

Coordinate system	Base vectors	Description
$O-X_0Y_0Z_0$	i_0, j_0, k_0	Inertial system
$O-X_1Y_1Z_1$	i_1, j_1, k_1	Local reference frame rotating at the constant speed of Ω about X_0 axis
$P-X_2Y_2Z_2$	i_2, j_2, k_2	local reference frame fixed to the disk

여기서, $[dr_{OD}/dt]_2$ 는 $P-X_2 Y_2 Z_2$ 좌표계에 대한 점 D 의 속도를 나타내며, 이때 $\partial i_2/\partial t = \partial j_2/\partial t = \partial k_2/\partial t = 0$ 이다. 위의 수식에서 u_D 는 Fig. 2(a)에 보인 바와 같이 X_2 축 위의 점 D 의 변위이다. 따라서 원판의 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T_D &= \frac{1}{2} \rho_D \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} h_D \dot{r}_{OD}^T \dot{r}_{OD} r dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2} M_D \{ \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 + 2\Omega(\dot{w}_0 v_0 - \dot{v}_0 w_0) + \Omega^2(w_0^2 + v_0^2) \} \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_{Dy} \{ (\dot{\theta}_\epsilon - \Omega\theta_\eta)^2 + (\dot{\theta}_\eta + \Omega\theta_\epsilon)^2 \} \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_{Dx} \{ 2\Omega\theta_\eta \dot{\theta}_\epsilon - \Omega^2(\theta_\eta^2 + \theta_\epsilon^2) + \Omega^2 \} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho_D \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} h_D [\dot{u}_D^2 + 2r(\sin\theta(\dot{\theta}_\epsilon - \Omega\theta_\eta) \\
 &\quad - \cos\theta(\dot{\theta}_\eta + \Omega\theta_\epsilon)) \dot{u}_D \\
 &\quad - 2\Omega r \{ (\dot{\theta}_\eta + \Omega\theta_\epsilon) \sin\theta \\
 &\quad + (\dot{\theta}_\epsilon - \Omega\theta_\eta) \cos\theta \} u_D] r dr d\theta \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서, R_1 및 R_2 는 각각 내측 및 외측반경을 표시하며, h_D 는 두께, M_D 는 질량, J_{Dx} 및 J_{Dy} 는 각각 X_2 및 Y_2 축에 대한 질량관성모멘트, 그리고 ρ_D 는 질량밀도를 나타낸다. 식 (4)에서 밑줄친 항목들은 한 개의 절직경모드(nodal diameter mode)를 가진 경우를 제외하고는 영이 되는 것을 알 수 있는데, 이는 k 개의 절직경모드의 경우, 다음 관계식이 만족하기 때문이다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos k\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin k\theta d\theta \\
 &= 0 \\
 \int_0^{2\pi} \sin\theta \sin k\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos\theta \cos k\theta d\theta \\
 &= \begin{cases} 0 & (k \neq 1 \text{의 경우}) \\ \pi & (k = 1 \text{의 경우}) \end{cases} \quad (5)
 \end{aligned}$$

앞의 식은 오직 한개의 절직경모드를 가진 원판의 운동만이 축과 원판의 연성진동에 기여함을 의미한다. i 번째 원판의 운동에너지는 식 (4)에 $T_D, h_D, R_2, R_1, M_D, v_0, w_0, J_{Dy}, J_{Dx}, \theta_\epsilon, \theta_\eta$ 및 u_D 대신에 각각 $T_{Di}, h_{Di}, R_{2i}, R_{1i}, M_{Di}, v_i, w_i, J_{Dyi}, J_{Dxi}, \theta_{\epsilon i}, \theta_{\eta i}$ 및 u_{Di} 를 대입함으로써 구할 수 있다. 그러면 원판의 전체 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_D = \sum_{i=1}^2 T_{Di} \quad (6)$$

회전하는 원판의 변형에너지는 순수 굽힘 에너지와 원판의 평면상에 존재하는 원심력에 의한 굽힘 에

너지로 구성된다. 회전에 의해 발생하는 응력은 회전축에 대하여 대칭적으로 분포하고 원판의 두께와 무관하다고 가정하면, 전단응력은 영이 된다. 즉, $\tau_{r\theta} = 0$. 그러면 원판의 변형에너지 식은 다음과 같이 유도된다.⁽¹⁷⁾

$$\begin{aligned}
 U_D &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{D}{2} \left[(\nabla^2 u_D)^2 - 2(1-\nu) \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \frac{\partial^2 u_D}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_D}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_D}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_D}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] r dr d\theta \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{h_D}{2} \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial u_D}{\partial r} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_D}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (7)
 \end{aligned}$$

여기서, σ_r 및 σ_θ 는 각각 반경방향 및 원주방향 응력이고, ν 는 푸아송비, ∇^2 는 라플라시안(Laplacian), D 는 굽힘강성(flexural rigidity), 그리고 E_D 는 종탄성계수(Young's modulus)를 나타낸다. 여기서 에너지의 각 항목에 대한 상세한 내용은 부록 A에 나타내었다. i 번째 원판의 변형에너지는, $U_D, R_2, R_1, u_D, h_D, \sigma_r$ 및 σ_θ 대신에 각각 $U_{Di}, R_{2i}, R_{1i}, u_{Di}, h_{Di}, \sigma_{ri}$ 및 $\sigma_{\theta i}$ 를 사용함으로써, 식 (7)의 연장선 상에서 유도될 수 있다. 그러면 원판의 전체 변형에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U_D = \sum_{i=1}^2 U_{Di} \quad (8)$$

일반적으로 축의 운동에너지는 식 (4)의 연장으로부터 구할 수 있다. 축의 기하학적 변형을 Fig. 2(b)에 나타내었는데, 이 때 길이가 S 인 축요소의 운동에너지는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 T_s &= \frac{1}{2} \rho_s \int_0^S A_s \{ \dot{v}_s^2 + \dot{w}_s^2 + 2\Omega(\dot{w}_s v_s - \dot{v}_s w_s) \\
 &\quad + \Omega^2(v_s^2 + w_s^2) \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho_s \int_0^S I_{Sy} \{ \dot{\theta}_{s\epsilon}^2 + \dot{\theta}_{s\eta}^2 + 2\Omega(\dot{\theta}_{s\eta} \theta_{s\epsilon} + \dot{\theta}_{s\epsilon} \theta_{s\eta}) \\
 &\quad - \Omega^2(\theta_{s\epsilon}^2 + \theta_{s\eta}^2) \} ds + \rho_s \int_0^S I_{Sx} \Omega^2 ds \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서, ρ_s 는 질량밀도, A_s 는 단면적, v_s 및 w_s 는 각각 Y_1 및 Z_1 축에 대한 변위, 그리고 I_{Sy} 는 Y_1 축에 대한 축의 단면관성모멘트이다. 그리고 축의 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_s = \frac{E_s}{2} \int_0^S I_{Sy} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2} \right)^2 \right\} ds \quad (10)$$

여기서, E_s 는 축의 종탄성계수이다.

베어링의 강성 및 감쇠계수를 각각 $K_{yz}=K_{zy}=C_{yz}=C_{zy}=0$, $K_{yy}=K_{zz}=K_B$, 그리고 $C_{yy}=C_{zz}=C_B$ 라고 가정하면, 두개의 베어링의 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^2 K_B (v_b^2 + w_b^2) \quad (11)$$

그리고 소산함수는,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^2 C_B \{ (\dot{v}_b - \Omega w_b)^2 + (\dot{w}_b + \Omega v_b)^2 \} \quad (12)$$

로 표시되며, 여기서 v_b 및 w_b 는 b 번째 베어링이 있는 곳에서 Ω 의 속도로 회전하는 회전좌표계에서 정의된 축 변위이다.

2.2 가정모드법의 적용

모든 부분구조들의 운동은 허용함수(admissible function)들의 가중에 의한 중첩으로 근사화할 수 있다. 이 때, 비연성 및 비회전을 가정한 해석에서 구한 각 부분구조의 모드형상을 허용함수로 사용할 수 있다. 이러한 개념, 그리고 원판의 한개의 절적경모드만이 축의 굽힘진동모드와 연성을 일으킨다는 사실로부터, i 번째 원판의 한개의 절적경모드와 관계된 연성운동은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_{D_i} = \cos\theta \Phi_{D_i} Q_{\xi_i} + \sin\theta \Phi_{D_i} Q_{\eta_i} \quad (13)$$

여기서, Φ_{D_i} 는 i 번째 원판의 반경방향의 운동을 묘사하는 허용함수들로 구성되며 거리의 함수인 행벡터(row vector)이고, Q_{ξ_i} 및 Q_{η_i} 는 각 허용함수에 대응하는 일반화 좌표(generalized coordinate)로 구성되며, 시간함수인 열벡터(column vector)이다. 한편, 축의 운동은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_s &= \Phi_s Q_v \\ w_s &= \Phi_s Q_w \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, Φ_s 는 두 개의 서로 직각인 평면상에서 정의된 축의 운동을 묘사하는 허용함수들로 구성된 행벡터, 그리고 Q_v 와 Q_w 는 이에 대응하는 시간의 함수인 일반화 좌표들로 구성된 열벡터이다. 식 (13) 및 (14)로부터, Fig. 2(a)에 보인 $v_i, w_i, \theta_{\xi_i}, \theta_{\eta_i}$ 와 같은 변수들도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_i &= v_s|_{l_i} = \Phi_s|_{l_i} Q_v \\ \dot{v}_i &= \dot{\Phi}_s|_{l_i} Q_v \end{aligned}$$

$$w_i = w_s|_{l_i} = \Phi_s|_{l_i} Q_w$$

$$\dot{w}_i = \dot{\Phi}_s|_{l_i} Q_w$$

$$\theta_{\xi_i} = \theta_{s\xi}|_{l_i} = -w_s|_{l_i} = -\Phi_s|_{l_i} Q_w$$

$$\dot{\theta}_{\xi_i} = -\dot{\Phi}_s|_{l_i} Q_w$$

$$\theta_{s\xi} = -\Phi_s Q_w$$

$$\theta_{\eta_i} = \theta_{s\eta}|_{l_i} = v_s|_{l_i} = \Phi_s|_{l_i} Q_v$$

$$\dot{\theta}_{\eta_i} = \dot{\Phi}_s|_{l_i} Q_v$$

$$\theta_{s\eta} = \Phi_s Q_v \quad (15)$$

여기서, 아래첨자 l_i 는 i 번째 원판이 위치한 축 상에서 구한 값을 의미한다. 식 (13)~(15)를 식 (4) 및 식 (6)~(11)에 대입하면, 다음과 같이 이산화된 전체 에너지함수를 구할 수 있다.

$$T = T_s + T_D \quad (16)$$

그리고

$$U = U_s + U_D + U_B \quad (17)$$

여기서, 에너지의 각 항목에 대한 상세한 내용은 부록 B에 기술하였다.

2.3 운동방정식

앞 절에서 구한 전체의 운동 및 변형에너지와 소산함수에 다음과 같이 라그랑지 식을 적용하면, 축-이중 원판계의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_r} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r} = 0 \quad (18)$$

여기서, $\mathbf{q}_r (= Q_v, Q_w, Q_{\xi_1}, Q_{\eta_1}, Q_{\xi_2}, Q_{\eta_2})$, $L (= T - U)$ 및 \mathcal{F} 는 각각 일반화 독립좌표로 구성된 벡터, 계의 라그랑지안(system Lagrangian), 그리고 레이레이 소산함수(Rayleigh's dissipation function)를 나타낸다. 그러면 앞의 소산함수 식 (12) 그리고 에너지 식 (16) 및 (17)를 라그랑지 식 (18)에 대입하면 6개의 운동방정식을 얻을 수 있다. 그리고 다음의 복소수에 의한 표현방법을 도입한다.

$$Z_s = Q_v + jQ_w$$

$$Z_{D_1} = Q_{\xi_1} + jQ_{\eta_1}$$

$$Z_{D_2} = Q_{\xi_2} + jQ_{\eta_2} \quad (19)$$

여기서, 서로 직각방향에서 정의된 두 개의 일반화 좌표를 일반화 복소수 좌표의 실수 및 허수 부분으로 취했다. 복소수표기법을 사용함으로써 복잡한 연성운동방정식을 다음과 같이 간단한 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_s & & -M_{SD_2} \\ -M_{SD_1}^T & -M_{SD_1} & 0 \\ -M_{SD_2}^T & \frac{1}{2}(M_{D_1} + M_{D_1}^T) & \frac{1}{2}(M_{D_2} + M_{D_2}^T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_s \\ \ddot{Z}_{D_1} \\ \ddot{Z}_{D_2} \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} C_s + j\Omega(K_s^{(1)} + M_s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z}_s \\ \dot{Z}_{D_1} \\ \dot{Z}_{D_2} \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K_s^{(2)} + K_s^{(3)} - \Omega^2 K_s^{(1)} + j\Omega C_s & -\Omega^2 M_{SD_1} \\ -\Omega^2 M_{SD_1}^T & \frac{1}{2}(K_{D_1} + K_{D_1}^T) \\ -\Omega^2 M_{SD_2}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_s \\ Z_{D_1} \\ Z_{D_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서, 행렬의 각 요소는 부록 C에 자세히 나타내었다. 식 (20)과 관련된 계의 고유치는 여러 가지 방법으로 구할 수 있다. (18)

3. 수치해석의 예

제안한 방법을 예시하기 위해 두개의 회전체 모델을 해석하였다. 우선 첫번째 모델은 제안한 방법을 실제 상업적 제품에 적용하기 위한 두개의 원판을 가진 HDD 스피들 계이고, 두번째 모델은 한개의 절직경모드를 갖는 원판의 운동과 축의 탄성 굽힘운동과의 동역학적 연성을 검토하기 위한 두개의 원판을 가진 탄성 회전체 계이다. 수치해석에서는 계를 구성하는 각 요소의 국소 변형을 표현하기 위해 총 20개의 서로 다른 허용함수(축의 운동 : 10개, 원판의 운동 : 10개)를 사용하였다. 허용 함수로서, 축의 경우에는 강체모드 형상 및 양단 자유의 경계조건을 가진 비회전 균일 보의 모드형상을 이용하였고, 원판의 경우에는 내경 고정-외경 자유의 경계조건을 가진 비회전 균일 원판의 반경방향의 모드형상을 이용하였다.

3.1 수치해석 모델

첫번째 모델인 하드디스크 구동 시스템은 회전하는 얇은 원판상에 동심원의 환상트랙으로 정리한 자화점으로 데이터를 저장한다. Fig. 3에 보인 바와 같이 원판은 작은 볼베어링 위에서 회전하는 스

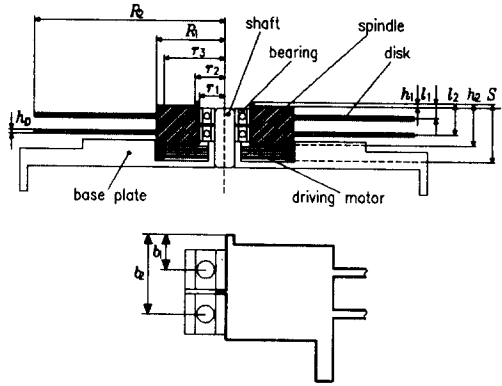


Fig. 3 Cross-sectional view of the model #1 (HDD spindle system)

핀들에 고정되어 있다. 피벗지지된 액츄에이터 팔을 사용해 트랙 위에 읽기-쓰기 헤드를 이동시킨다. 읽기-쓰기 헤더는 자화점을 만들어 정보를 저장하거나 정보를 읽어내기 위해 자화점을 찾는다. 읽기-쓰기 헤더는 각 원판 표면당 한개씩 할당되어 있다. 원판수는 설계요구에 의해 결정되는데, 현재 가장 보편적으로 사용되고 있는 HDD는 2개의 원판으로 구성되어 있다. 알루미늄으로 된 각 원판사이에는 스페이서가 있고, 이것은 강체 알루미늄 스핀들에 고정되어 있다. 그리고 스핀들은 작고 정교한 볼베어링으로 지지되어 있다. 베어링은 회전하지 않는 축에 고정되어 있으며, 축은 HDD의 기저부와 덮개에 연결되어 있다. 스핀들내의 베어링 아래에는 브러쉬없는 직류모터가 설치되어 있다. 스핀들-원판 계의 공진은 컴퓨터 하드디스크 구동장치에 소음 및 진동 문제를 일으킨다. 특히 HDD 설계시 스핀들-원판계에서 여러 가지 문제를 야기시키는 횡방향 진동 및 원추형 진동은 HDD의 데이터 밀도를 높이기 위해 반드시 제어해야 한다. 원판 진동해석에 대한 많은 연구 결과가 보고되고 있는데, 전통적으로 HDD는 강체 베어링을 가진 단일 강체 스핀들에 장착된 유연원판으로 모델링되어 왔다. 그러나 이 모델들은 베어링 및 스핀들의 탄성을 고려하지 않았기 때문에, 최근 HDD계의 공진주파수를 계산하는 데는 부적합한 것으로 판명되었다. 따라서 베어링의 탄성을 고려한 탄성 원판 및 탄성 스핀들로 구성된 좀 더 정교한 회전체 동역학 모델을 도입할 필요가 있다. 첫번째 모델은 Fig. 3에 보인 바와 같이, 두개의, 동일한 균일 탄성 원판을 가지고 두개의 볼베어링으로 단순

지지된 중공으로 된 단축 회전축으로 구성되어 있는 HDD 스피indle계이며, 각각의 치수는 다음과 같다. $r_1=6.50$ mm, $r_2=7.25$ mm, $r_3=15.31$ mm, $R_1=17.00$ mm, $R_2=47.50$ mm, $h_D=0.80$ mm, $h_1=0.95$ mm, $h_2=10.42$ mm, $l_1=b_1=3.60$ mm, $l_2=b_2=7.75$ mm, 그리고 $S=14.42$ mm. 또한 재질 및 베어링상수는 다음과 같이 선택하였다. $E_s = E_D = 8.0 \times 10^{10}$ N/m², $\nu = 0.3$, $\rho_s = \rho_D = 2790$ N·sec²/m⁴, $K_B = 3.0 \times 10^7$ N/m 및 $C_B = 100$ N·sec/m.

그리고 두번째의 모델은 두개의 동일 원판을 가지고 축의 양단에서 단순지지된 탄성 회전체 계이다. Fig. 1에 따른 두번째 모델의 치수는 다음과 같다. $R_{11} = R_{12} = 10$ mm, $R_{21} = R_{22} = 100$ mm, $h_D = 3$ mm, $l_1 = 300$ mm, $l_2 = 500$ mm, 그리고 $S = 800$ mm. 또한 재질 및 베어링상수는 다음과 같이 선택하였다. $E_s = E_D = 8.0 \times 10^{10}$ N/m², $\nu = 0.3$, $\rho_s = \rho_D = 2790$ N·sec²/m⁴, $K_B = 3.0 \times 10^6$ N/m 및 $C_B = 100$ N·sec/m.

3.2 결과 및 토론

첫번째 모델에 있어서 공간상에 고정된 좌표계에 대한 5개의 저차 연성모드를 계산하였는데, Fig. 4는 이에 대한 각 모드의 전진파(forward) 및 후진파(backward) 고유진동수를 보여 주고 있다.

Fig. 5는 해당 전진파의 모드형태를 나타내고 있다. Fig. 5(a)와 5(b)에 보인 바와 같이 첫번째 모드는 원판의 탄성 (1, 0) 운동과 계의 자이로 운동의 합이며, 두번째 모드는 두개의 탄성 원판이 연성된 국소운동이다. 여기서, 원판의 탄성 (m, n) 운동이란 m 개의 절직경 그리고 n 개의 절원을 가진 모드를 일컫는다. 스피indle들은 HDD 해석에 있어서 비교적 짧고, 강성이 크기때문에 횡방향 진동 또는 원추형 진동의 강체운동을 하고 있음을 알 수 있다. 여기서, 염두에 두어야 할 것은 원판의 모드중 오직 한개의 절직경모드만이 베어링과 스피indle의 운동에 연성된다는 사실이다(Wu 및 Flowers⁽¹¹⁾ 그리고 Chun 및 Lee⁽¹⁴⁾). 이는 원판의 한개의 절직경 모드에 의해 발생하는 관성모멘트에 기인한다. 이 모멘트는 원판과 스피indle 모드 사이에 상호작용을 일으켜 계 전체의 고유진동수에 영향을 주게 된다. 이 모멘트는 한 개의 절직경모드를 제외한 k 의 절직경모드에서는 영이 되므로 이 때는 그러한 상호작용이 없게 된다. Fig. 5(a)에 보인 바와 같이 첫

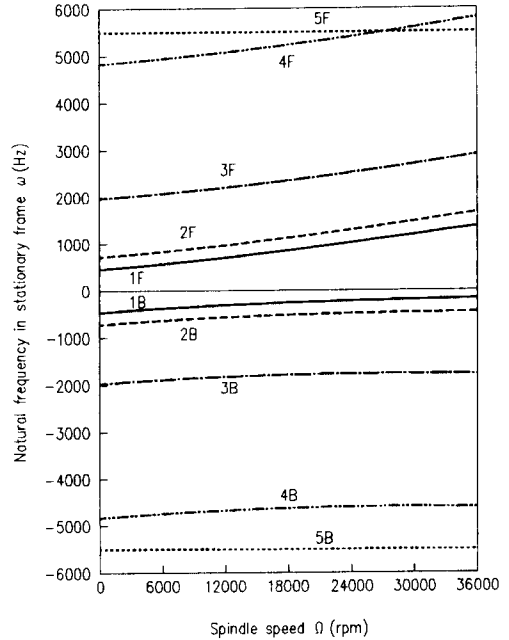


Fig. 4 Coupled natural frequencies of the model #1

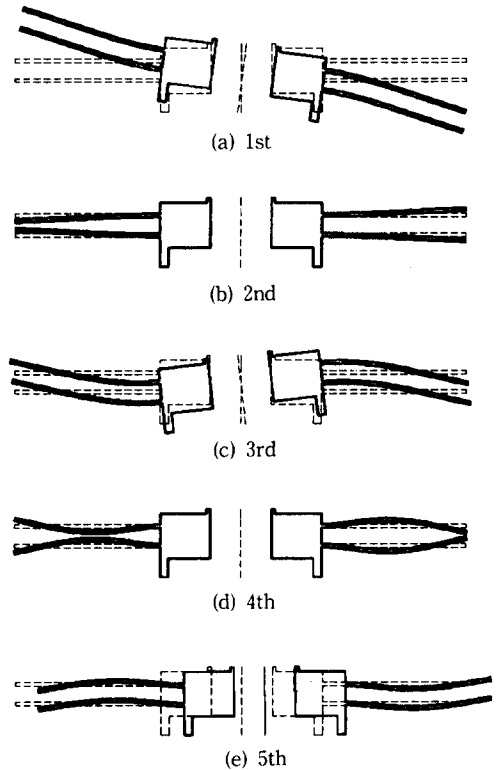


Fig. 5 Coupled mode shapes of the model #1

번째 연성모드에서는 두 개의 원판이 동일 위상(in-phase)의 모드형태를 갖기 때문에, 스피들에 작용되는 관성모멘트가 커져서 계의 원추형운동이 쉽게 유도된다.

Fig. 6에 첫번째 고유진동수에 대한 원판의 탄성의 영향을 나타내었다. 그림에서 점선은 원판을 강체로 가정한 유한요소법에 의한 결과이고, 실선은 원판의 탄성을 고려한 가정모드법에 의한 결과이다. 여기서, 원판의 탄성이 스피들의 원추형운동과 관련된 연성 고유진동수를 크게 낮출 수 있음을 보여 주고 있다. 한편, 두번째 및 네번째의 연성모드

에서는 두 원판의 위상이 서로 다름(out-of-phase)을 알 수 있는데, 이 때에는 관성모멘트가 서로 상쇄되어 영이 된다. 네번째 모드는 Fig. 5(d)에 보인 바와 같이 우세한 (1,1) 원판운동이다. 이러한 두번째 및 네번째 모드는 스피들의 운동 및 베어링의 탄성을 고려하지 않은 탄성원판의 단독 해석에 의해서도 정확하게 예측할 수 있다. 세번째 모드는 Fig. 5(c)에 보인 바와 같이 원판의 탄성운동과 조립체의 자이로스코프 운동의 합으로 구성되어 있다. 각 요소의 국소 모드형상은 첫번째 국소 모드형상과 유사하나, 스피들의 운동과 두개의 원판의 운동의 위상은 서로 다름을 알 수 있다. 여기서 흥미로운 것은, 이 모드는 연성효과를 고려하지 않은 각각의 탄성원판 또는 스피들의 단독 해석에서는 예측할 수 없다는 사실이다. 다섯번째 모드는 Fig. 5(e)에 보인 바와 같이 상대적으로 우세한 스피들의 병진운동과 관계있으며, 두개의 원판은 (1,1) 모드를 갖고 있고, 이 때 관성모멘트는 무시할 만하다. 따라서 이 모드는 두 개의 원판을 강체로 가정한 유한요소법의 결과와 일치한다.

Fig. 7은 스피들의 회전속도에 따른 연성되지 않는 $k(k \neq 1)$ 절직경모드의 고유진동수를 보여 주고 있는데, 이들은 서로의 연성효과를 고려하지 않은

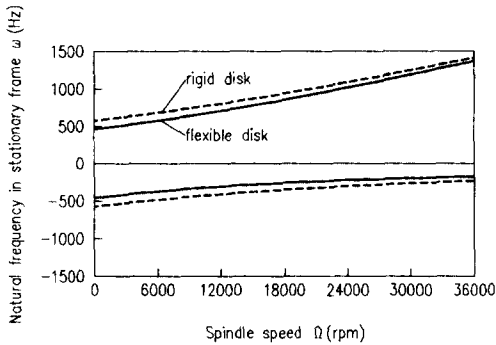


Fig. 6 Flexible disk effect on the first forward and backward natural frequencies of the model #1

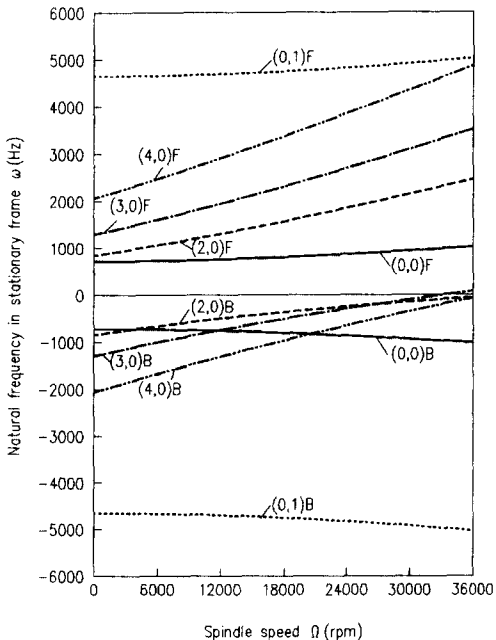


Fig. 7 Natural frequencies of the k nodal diameter modes ($k \neq 1$) of the model #1

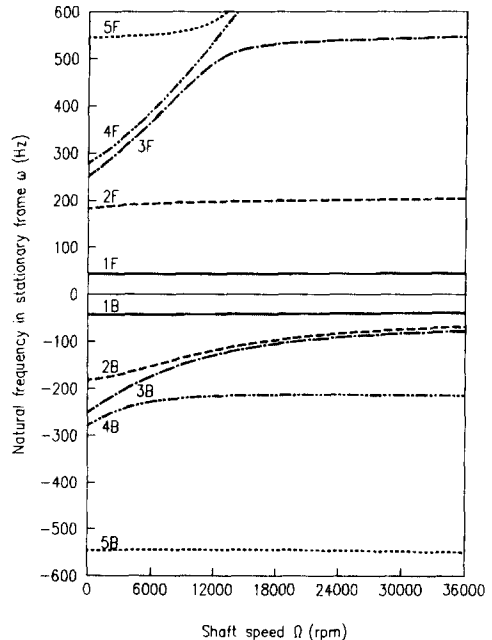


Fig. 8 Natural frequencies of one nodal diameter modes of the model #2

탄성원판의 단독 해석으로부터 구할 수 있다.

두번째 모델에 있어서 공간상에 고정된 좌표계에 대한 5개의 저차 연성모드를 계산하였는데, Fig. 8은 이에 대한 각 모드의 전진파(forward) 및 후진파(backward) 고유진동수를 보여 주고 있다.

Fig. 9는 해당 전진파의 모드형태를 나타내고 있다. Fig. 9(a)와 9(b)에 보인 바와 같이 첫번째 및 두번째 모드는 축의 탄성운동이 우세한 모드이다. 특히, 탄성 (1, 0) 첫번째 모드에서 원판운동은 아주 작아서 무시할 수 있기 때문에 축과 원판의 연성을 고려하지 않는 탄성 축-강성원판의 모델에서도 해석 가능하다. 세번째 및 네번째 모드는 Fig. 9(c)와 9(d)에 보인 바와 같이 우세한 탄성 (1, 0)원판 운동과 관계있다. 네번째 모드에 있어서 각 요소의 국소 모드형상은 세번째 모드의 각 국소 모드형상과 유사하나, 두개의 원판은 동일 위상(in-phase)의 모드형태를 갖게 된다. 여기서 흥미로

운 것은, 이 두 모드는 연성효과를 고려하지 않은 각각의 탄성원판 또는 스피들의 단독 해석에서는 구분되지 않는다는 것이다. 다섯번째의 모드는 Fig. 9(e)에 보인 바와 같이 강하게 연성된 축-원판 모드이다.

4. 결 론

가정모드법을 이용하여 이중원판을 가진 탄성 회전체의 운동을 지배하는 선형 2차 편미분방정식을 유도하였다. 제안한 방법은 작은 자유도로써 높은 계산의 효율성을 보여 주었다. 수치예제로서 두 개의 원판을 가진 두개의 회전체 모델을 선정하였으며, 여기서 스피들의 회전속도를 변화시켜 가면서 저차의 5개 연성모드의 고유진동수를 계산하였다. 여기서, 축과 원판 사이의 동역학적 연성효과를 계의 진동거동을 예측함에 있어서 매우 중요한 인자임을 보였다.

참고문헌

- (1) Lamb, H., F.R.S. and Southwell, R.V., 1921, "The Vibrations of a Spinning Disk," *Proceedings of Royal Society of London*, Vol. 99. pp. 272 ~ 280.
- (2) Southwell, R.V., 1921, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at its Center; and on the Effects of Rotation," *Proceedings of Royal Society of London*, 101, p. 133, 153.
- (3) Wah, T., 1962, "Vibration of Circular Plates," *J. of the Acoustical Society of America*, Vol. 34 (3), pp. 275 ~ 281.
- (4) Mote, C.D., Jr, 1965, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks," *J. of Engineering for Industry*, Vol. 87, pp. 258 ~ 264.
- (5) Lee, C.W., Park, S.W. and Rim, K.H., 1989, "Free Vibration of a Spinning Annular Disk Subjected to Radial Tension," *ASIA Vibration Conference*, Shenzhen, China, pp. 439 ~ 444.
- (6) Kirkhope, J. and Wilson, G.J., 1972, "Vibration of Circular and Annular Plates Using Finite Elements," *International J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pp. 181 ~ 193.

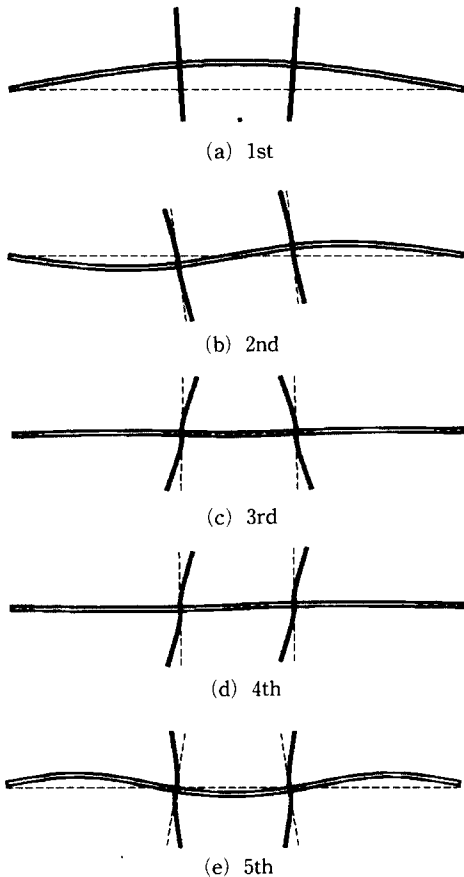


Fig. 9 Coupled mode shapes of the model #2

- (7) Kirkhope, J. and Wilson, G.J., 1976, "Vibration and Strees Analysis of Thin Rotating Discs Using Annular Finite Elements," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 44(4), pp. 461~474.
- (8) Ginesu, F. Picasso, B. and Priolo, P., 1979, "Vibration Analysis of Polar Orthotropic Annular Discs," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 65(1), pp. 97~105.
- (9) 이종원, 윤종섭, 1990, "결합을 갖는 단순 회전체의 모델링 및 실험적 검증," 대한기계학회, 춘계학술대회, pp. 124~128.
- (10) Shahab, A.A.S. and Thomas, J., 1987, "Coupling Effects of Disc Flexibility on the Dynamic Behavior of Multi Disc-shaft Systems," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 114(3), pp. 435~452.
- (11) Wu, F. and Flowers, G.T., 1992, "A Transfer Matrix Technique for Evaluating the Natural Frequencies and Critical Speeds of a Rotor with Multiple Flexible Disks," *ASME, J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 242~248.
- (12) Sakata, M., Kimura, K., Park, S.K. and Ohnabe, H., 1989, "Vibration of Bladed Flexible Rotor due to Gyroscopic Moment," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 131(3), pp. 417~430.
- (13) Wu, F. and Flowers, G.T., 1993, "An Experimental Study of the Influence of Disk Flexibility and Rubbing on Rotordynamics," *ASME, Vibration of Rotating Systems*, DE-Vol. 60, pp.19~26.
- (14) Chun, S.B. and Lee, C.W., 1996, "Vibration Analysis of Shaft-bladed Disk System Using Substructure Synthesis and Assumed Modes Method," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 189(5), pp. 587~608.
- (15) 전상복, 1996, "가정모드 및 부분구조 합성법을 이용한 탄성 회전체의 연성곱힘 진동해석," 박사학위논문, 기계공학과, 한국과학기술원, 대전.
- (16) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company Collier-Macmillan Limited, London.
- (17) Ugural, A.C. and Fenster, S.K., 1981, *Advanced Strength and Aplied Elasticity*, Elsevier, Newyork.
- (18) Lee, C.W., 1993, *Vibration Analysis of Rotors*,

Kluwer Academic Publishers.

부 록 A

반경방향 및 원주방향 응력 ; 라프라시안 ; 굽힘강성

$$\sigma_r = \frac{\rho_D \Omega^2}{8} \left[- (3 + \nu) r^2 + \frac{(1 + \nu) \{ R_2^4 (3 + \nu) + R_1^4 (1 - \nu) \}}{\{(1 + \nu) R_2^2 + (1 - \nu) R_1^2\}} - \frac{R_2^2 R_1^2 (1 - \nu) \{ R_1^2 (1 + \nu) - R_2^2 (3 + \nu) \}}{r^2 \{ (1 + \nu) R_2^2 + (1 - \nu) R_1^2 \}} \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho_D \Omega^2}{8} \left[- (1 + 3\nu) r^2 + \frac{(1 + \nu) \{ R_2^4 (3 + \nu) + R_1^4 (1 - \nu) \}}{\{(1 + \nu) R_2^2 + (1 - \nu) R_1^2\}} + \frac{R_2^2 R_1^2 (1 - \nu) \{ R_1^2 (1 + \nu) - R_2^2 (3 + \nu) \}}{r^2 \{ (1 + \nu) R_2^2 + (1 - \nu) R_1^2 \}} \right]$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$$

$$D = \frac{E_D h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$M_D = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho h_D r dr d\theta = \pi \rho h_D (R_2^2 - R_1^2)$$

부 록 B

이산화된 계 전체의 운동, 변형에너지 함수

$$\begin{aligned} T &= T_s + T_D \\ &= \frac{1}{2} \dot{Q}_V^T M_s \dot{Q}_V + \frac{1}{2} \dot{Q}_W^T M_s \dot{Q}_W + \frac{1}{2} \Omega^2 Q_V^T K_s^{(1)} Q_V \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^2 Q_W^T K_s^{(1)} Q_W + \Omega \dot{Q}_W^T K_s^{(1)} Q_V - \Omega \dot{Q}_V^T M_s Q_W \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (\dot{Q}_{\epsilon_i}^T M_{D_i} \dot{Q}_{\epsilon_i} + \dot{Q}_{\eta_i}^T M_{D_i} \dot{Q}_{\eta_i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 (-\dot{Q}_W^T M_{SD_i} \dot{Q}_{\eta_i} - \Omega \dot{Q}_V^T M_{SD_i} \dot{Q}_{\eta_i} - \Omega \dot{Q}_V^T M_{SD_i} \dot{Q}_{\epsilon_i} + Q_W^T M_{SD_i} \dot{Q}_{\epsilon_i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 (-\Omega \dot{Q}_V^T M_{SD_i} Q_{\eta_i} + \Omega^2 Q_W^T M_{SD_i} Q_{\eta_i} + \Omega \dot{Q}_W^T M_{SD_i} Q_{\epsilon_i} + \Omega^2 Q_V^T M_{SD_i} Q_{\epsilon_i}) \\ U &= U_s + U_D + U_B \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (Q_{D\epsilon_i}^T K_{D_i} Q_{D\epsilon_i} + Q_{B\eta_i}^T K_{D_i} Q_{B\eta_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_V^T K_s^{(3)} Q_V + \frac{1}{2} Q_W^T K_s^{(3)} Q_W \end{aligned}$$

부 록 C

운동방정식에 사용된 행렬의 각 요소

$$C_s = \sum_{i=1}^2 C_B \Phi_s |_{b_i}^T \Phi_s |_{b_i}$$

$$K_{D_i} = \pi \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} \left[Dr \Phi_{D_i}''^T \Phi_{D_i}'' + \left\{ \frac{D(3-2\nu)}{r} + h_{D_i} r \sigma_{r_i} \right\} \Phi_{D_i}^T \Phi_{D_i} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{D(3-2\nu)}{r^3} + \frac{h_{D_i} \sigma_{\theta_i}}{r} \right\} \Phi_{D_i}^T \Phi_{D_i} + 2D\nu \Phi_{D_i}''^T \Phi_{D_i}'' \right. \\ \left. - \frac{2D\nu}{r} \Phi_{D_i}''^T \Phi_{D_i}'' - \frac{2D(3-2\nu)}{r^2} \Phi_{D_i}^T \Phi_{D_i} \right] dr$$

$$K_s^{(1)} = \rho_s \int_0^S (A_s \Phi_s^T \Phi_s - I_{sy} \Phi_s^T \Phi_s) dS$$

$$+ \sum_{i=1}^2 M_{D_i} \Phi_s |_{l_i}^T \Phi_s |_{l_i}$$

$$+ \sum_{i=1}^2 (J_{Dy_i} - J_{Dx_i}) \Phi_s |_{l_i}^T \Phi_s |_{l_i}$$

$$K_s^{(2)} = E_s \int_0^S (I_{sy} \Phi_s^T \Phi_s) dS$$

$$K_s^{(3)} = \sum_{i=1}^2 K_B \Phi_s |_{b_i}^T \Phi_s |_{b_i}$$

$$M_{D_i} = \pi \rho_D \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} (h_{D_i} r \Phi_{D_i}^T \Phi_{D_i}) dr$$

$$M_s = \rho_s \int_0^S (A_s \Phi_s^T \Phi_s + I_{sy} \Phi_s^T \Phi_s) dS$$

$$+ \sum_{i=1}^2 (M_{D_i} \Phi_s |_{l_i}^T \Phi_s |_{l_i} + J_{Dy_i} \Phi_s |_{l_i}^T \Phi_s |_{l_i})$$

$$M_{SD_i} = \pi \rho_D \Phi_s |_{l_i}^T \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} h_{D_i} r^2 \Phi_{D_i} dr$$