

<논 문>

## 다공매체를 통과하는 유동문제의 유한요소해석과 부분해석후 오차계산

이 춘 열\*

(1996년 11월 30일 접수)

### Finite Element Analysis and Local A Posteriori Error Estimates for Problems of Flow through Porous Media

Choon-Yeol Lee

**Key Words:** Variational Inequalities(변분부등식), Finite Element Approximation(유한요소 근사식), A Posteriori Error(A Posteriori 오차), Minimization Problem(최소화문제), Global Error(전체오차), Local Error(부분오차), Error Estimation(오차계산), Porous Media(다공매체)

#### Abstract

A new a posteriori error estimator is introduced and applied to variational inequalities occurring in problems of flow through porous media. In order to construct element-wise a posteriori error estimates the global error is localized by a special mixed formulation in which continuity conditions at interfaces are treated as constraints. This approach leads to error indicators which provide rigorous upper bounds of the element errors. A discussion of a compatibility condition for the well-posedness of the local error analysis problem is given. Two numerical examples are solved to check the compatibility of the local problems and convergence of the effectivity index both in a local and a global sense with respect to local refinements.

#### 1. 서 론

최근 유한요소법을 사용하는데 있어서 최적의 유한요소 격자를 구하는 방법으로서의 적응 알고리즘(adaptive algorithm) 및 적응 유한요소법(adaptive finite element method)에 대한 관심이 늘어나고 있다. 적응 유한요소법은 유한요소해석후 각각의 요소들에 대한 추가적인 분할(refinement)이 필요할 것인가를 판단하여 필요한 경우 요소의 분할을 수행하고, 이러한 과정을 통하여 최

적의 유한요소 격자를 얻게 된다.<sup>(1)</sup> 이 과정에서 분할의 필요성을 판단을 하기 위해서는 요소 각각에서의 유한요소 근사해의 오차를 계산할 수 있는 효과적인 지역 오차계산법(local error estimator)이 필수적이다. 오차계산법으로는 요소에서의 잔류오차를 이용하여 근사해의 오차를 계산하는 방법(element residual technique),<sup>(2)</sup> 지배방정식에 대한 대응함수를 사용하는 방법(duality technique),<sup>(3)</sup> 전체의 영역을 부분적으로 분할한 부분영역에서의 잔류오차를 이용하는 방법(subdomain residual technique),<sup>(4)</sup> 유한요소에서 사용되는 내삽함수의 오차를 계산하여 유한요소 근사해의 오차를 계산하는 방법(interpolation error estimate technique),<sup>(5)</sup>

\*회원, 영남대학교 기계공학부

유한요소해석의 결과로 얻어진 근사해를 후처리하여 오차를 계산하는 방법(post-processing technique) 등<sup>(11)</sup>이 연구되어 오고 있다. 현재 이러한 여러 가지 방법에 의한 오차계산법이 개발되어 사용되고 있지만 선형적인 문제에만 적용 가능하였고, 선형 및 비선형 문제에 모두 적용될 수 있는 오차계산법은 아직 개발되고 있지 않은 실정이다.

유한요소 근사해의 오차를 각각의 유한요소에 대해서 알아내기 위해서는 해석후(a posteriori) 오차계산방법을 사용하게 되며, 이러한 오차계산법은 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.

첫째, 계산된 오차의 전체적인 값(global error)은 실제오차에 근사하여야한다.

둘째, 각각의 유한요소에서 계산된 지역오차(local error) 역시 유한요소 각각에 대한 실제오차와 근사하여야 한다.

셋째, 오차계산법의 알고리즘은 기존의 유한요소 해석 프로그램에 구현하기가 쉬워야 한다.

넷째, 오차계산법의 수학적 배경이 잘 정립되어 있어야한다.

이중에서 첫째와 둘째는 수치해석 결과에 의하여 판단할 수 있으며, 그중 둘째는 적응 유한요소법을 사용하기 위하여 필수적이라 하겠다. 본 논문에서는 이상과 같은 조건을 만족하고, 선형 및 비선형 문제에 공통적으로 사용할 수 있는 새로운 해석후 오차계산법을 개발하였다. 이 오차계산법은 선형문제에서 효과적으로 사용되는 요소 잔류오차방법<sup>(2,6)</sup>을 기초로 하여 개발되었으며, 수학적 배경은 참고문헌<sup>(7,8)</sup>을 참조하기 바란다. 또한 이 오차계산법이 첫째와 둘째사항을 만족함을 보이기 위하여 비선형 변분부등식(variational inequality)<sup>(9-11)</sup> 형태의 지배방정식으로 표현되는 다공매체(porous media)의 유동문제<sup>(12)</sup>에 적용하였다.

## 2. 문제의 수식화

여기에서는 소볼레프계(Sobolev space)<sup>(13)</sup>의 표기법을 사용하며,  $H^s(\Omega)$ 는  $R^N$  ( $N=2, 3$ )에서의 개방영역  $\Omega$ 에서 정의된 힐버트계를 표시하도록 하고,  $L^2(\Omega)$ 는 다음과 같은 크기(norm)를 갖는 레베크함수계를 나타내도록 한다.

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{\int_{\Omega} v^2 dx}$$

2차원 개방영역  $\Omega$ 의 경계  $\partial\Omega$ 가 리프지츠(Lipschitz) 조건<sup>(13)</sup>을 만족한다고 가정하고,  $\Omega$ 에서 정의된 다음과 같은 비선형 변분부등식의 방정식을 생각해 보자.

$$-\Delta u \geq f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u \geq \psi \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$(-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega \quad (4)$$

여기서,  $\Delta$ 는  $\nabla \cdot \nabla$ 를 나타내며,  $\psi$  및  $g$ 는 각각 문제의 영역  $\Omega$ 와 경계  $\partial\Omega$ 에서 정의되고, 입력으로서 주어지는 함수이고, 다음 조건을 만족한다.

$$\psi \in C(\Omega), \quad \psi \leq 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (5)$$

이 방정식은 다공매체 유동문제의 지배방정식<sup>(12)</sup>이며, 장애물문제(obstacle problem)<sup>(7)</sup> 및 접촉문제<sup>(14)</sup>에서도 유사한 형태의 지배방정식이 나타나게 된다. 먼저 이 문제에 대한 저차미분문제(weak problem)를 구하기 위하여 철면인정함수 폐집합(closed convex set of admissible functions)  $K$ 를 생각하도록 한다.

$$K \equiv \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ in } \Omega, v = g \text{ on } \partial\Omega\}$$

이제  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ 라 가정하고, 식 (1)의 양변을  $(v - \psi)$ 로 곱한뒤 문제 전체영역  $\Omega$ 에 대하여 적분을 수행하면 다음의 결과를 얻게된다.

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)(v - \psi) dx \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (6)$$

또한 식 (3)을 전체영역  $\Omega$ 에서 적분한다.

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)(u - \psi) dx = 0 \quad (7)$$

여기서,  $u$ 는 지배방정식을 만족하는 엄밀해이며  $v$ 는 인정함수집합  $K$ 에 속하는 임의의 함수를 나타낸다. 식 (6)에서 식 (7)을 빼고 정리하면 다음식을 구할 수 있다.

$$\int_{\Omega} -\Delta u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad (8)$$

여기에,  $v - u$ 는  $\partial\Omega$ 에서 0이라는 것과 그린(Green)의 공식을 사용하여 부분적분을 수행한다.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K \quad (9)$$

이제 복선형 형태(bilinear form)  $B(\cdot, \cdot)$ , 선

형 범함수(linear functional)  $F(\cdot)$ , 범함수(functional)  $I(\cdot)$ 를 정의한다.

$$B: K \times K \rightarrow R, \quad B(u, v) \equiv \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$F: K \rightarrow R, \quad F(v) \equiv \int_{\Omega} f v dx$$

$$I: K \rightarrow R, \quad I(v) \equiv \frac{1}{2} B(v, v) - F(v)$$

위의 정의와 식 (9)를 이용하면 지배방정식 (1), (2), (3)은 저차미분형태의 변분부등식으로 표현될 수 있다.

Find  $u \in K$  such that

$$B(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K \quad (10)$$

또한 위 식과 동등한 문제로서 최소화문제(minimization problem)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

Find  $u \in K$  such that

$$I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in K \quad (11)$$

이제부터는 식 (1), (2), (3)으로 표현되는 특정한 문제뿐만이 아니라 변분부등식 (10)으로 표현될 수 있는 일반적인 모든 문제에 대하여 기술하고자 한다.

우선 식 (10)과 식 (11)에 대한 유한요소 근사식을 구성하기 위하여 요소  $\Omega_k$ 에서 정의되는 형상함수 집합  $P(\Omega_k)$ 로부터 유한요소 부분집합  $V_h \subset H^1(\Omega)$ 을 정의한다.

$$V_h \equiv \{ v_h \in C(\Omega) \mid v_h \in \prod_k P(\Omega_k) \quad v_h = g \text{ on } \partial\Omega \}$$

또한 이를 이용하여 유한차원 폐부분집합 (finite dimensional closed convex subset)을 정의한다.

$$K_h \equiv \{ v_h \in V_h \mid v_h \geq \psi \}$$

그러므로 식 (11)에 대한 유한요소 근사식은 다음과 같이 주어지게 된다.

Find  $u_h \in K_h$  such that

$$I(u_h) \leq I(v_h) \quad \forall v_h \in K_h \quad (12)$$

여기에서 식 (12)의 근사해  $u_h$ 는  $h$ 가 0에 접근함에 따라 식 (11)의 해  $u$ 에 수렴하며, 이것은 참고문헌<sup>(14)</sup>에 증명되어 있다.

### 3. 오차계산법

먼저 유한요소 근사해의 오차와 오차가 속하는 집합을 다음과 같이 정의한다.

$$e \in K - \{ u_h \}, \quad e \equiv u - u_h$$

$$K - \{ u_h \} \equiv \{ w \mid w = v - u_h, \quad v \in K \}$$

그러므로 식 (10)에  $u$ 대신  $e + u_h$ 를 대입하면 다음의 식을 얻게 된다.

$$B(e, v - e - u_h) \geq F(v - e - u_h) - B(u_h, v - e - u_h) \quad (13)$$

여기에서  $K - \{ u_h \}$ 에 속하는 임의의 함수,  $w = v - u_h$ 를 대입하면, 식 (13)은 오차에 대한 변분부등식으로 변환되게 된다.

Find  $e \in K - \{ u_h \}$  such that

$$B(e, w - e) \geq F(w - e) - B(u_h, w - e) \quad \forall w \in K - \{ u_h \} \quad (14)$$

이식은 다음의 최소화 문제와 동등하게 된다.

Find  $e \in K - \{ u_h \}$  such that

$$J(e) \leq J(w) \quad \forall w \in K - \{ u_h \} \quad (15)$$

여기에서 범함수  $J(\cdot)$ 의 정의는 다음과 같다.

$$J(w) \equiv \frac{1}{2} B(w, w) - F(w) + B(u_h, w)$$

이제 오차의 에너지 기준(energy norm)을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{1}{2} \|e\|_E^2 \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e dx$$

또한 식 (13)을 사용하여  $v = u_h$  (또는  $w = 0$ )를 대입한다.

$$B(e, e) \leq F(e) - B(u_h, e)$$

그러면 오차의 에너지 기준에 대한 제한(bound)을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2} \|e\|_E^2 \equiv \frac{1}{2} B(e, e) \leq -J(e) \quad (16)$$

이렇게 구해진 오차의 제한은 영역 전체의 값(global error)이므로 각각의 유한요소에서의 부분오차(local error)를 구하기 위하여 형상함수가 요소간의 경계에서 불연속을 가질 수 있도록 한다.

이를 위하여 각각의 유한요소  $\Omega_k$ 에서 요소간의 경계에서 불연속을 갖는 인정함수 집합  $\tilde{K}_k$ 와  $\hat{K}$ 을 정의한다.

$$\begin{aligned} \tilde{K}_k &\equiv \{ w \in H^1(\Omega) \mid w \geq \phi - u_h \text{ in } \Omega_k, \\ &\quad w = 0 \text{ on } \partial\Omega_k \cap \partial\Omega \} \\ \hat{K} &\equiv \prod_k \tilde{K}_k \end{aligned}$$

또한 요소  $\Omega_k$ 와  $\Omega_l$ 의 경계에서의 단위법선벡터를 각각  $\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_l$ 라 할 때, 이 두 요소의 공통경계  $\Gamma_{kl}$ 에서의 단위법선벡터  $\mathbf{n}_{kl}$ 을 정의하자.

$$\mathbf{n}_{kl} \equiv \begin{cases} \mathbf{n}_k & \text{if } k > l \\ \mathbf{n}_l & \text{if } k < l \end{cases}$$

이 공통경계  $\Gamma_{kl}$ 에서 발생하는 불연속의 차이(jump)와 평균값(average)을 다음과 같이 정의한다.

$$[w]_{kl} \equiv \begin{cases} w|_{\Omega_k} - w|_{\Omega_l} & \text{if } k > l \\ w|_{\Omega_l} - w|_{\Omega_k} & \text{if } k < l \end{cases} \quad (17)$$

$$\langle w \rangle_{kl} \equiv \frac{1}{2}(w|_{\Omega_k} + w|_{\Omega_l}) \quad (18)$$

요소  $\Omega_k$ 의 경계  $\partial\Omega_k$ 에서 정의되는 이웃하는 요소  $\Omega_l$ 와의 불연속의 차이는 다음과 같다.

$$[w]_k \equiv w|_{\partial\Omega_k} - w|_{\partial\Omega_l} \quad (19)$$

이제 요소간의 경계에서 형상함수의 불연속에 대해 라그랑지언(Lagrangian)을 취하도록 한다.

$$L : \hat{K} \times R \rightarrow R \quad (20)$$

$$L(w, \mu) \equiv J(w) - \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{int}} \mu(s) [w(s)]_{kl} ds$$

이때  $w$ 가 요소경계에서 연속이면(또는  $[w]_{kl} = 0$ 이면),  $L(w, \mu) = J(w)$ 임을 알 수 있다.

식 (15)와 (16)을 사용하여 안장형 문제(saddle point problem)를 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e\|_{\hat{K}}^2 &\leq -J(e) = - \inf_{w \in \hat{K} - (u_h)} J(w) \\ &= - \inf_{w \in \hat{K}} \sup_{\mu \in R} L(w, \mu) \\ &\leq - \sup_{\mu \in R} \inf_{w \in \hat{K}} L(w, \mu) \\ &\leq - \inf_{w \in \hat{K}} L(w, \mu) \quad \forall \mu \in R \quad (21) \end{aligned}$$

위의 결과를 각각의 유한요소에 대해 적용하기 위하여  $L(w, \mu)$ 에 포함되어 있는  $B(u_h, w)$ 를 변환한다.

$$\begin{aligned} B(u_h, w) &= \sum_k \left\{ \int_{\Omega_k} -\Delta u_h dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_k} (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_k) w ds \right\} \\ &= \sum_k \int_{\Omega_k} -\Delta u_h dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}_k) w ds \\ &\quad + \sum_k \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \frac{1}{2} [\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k w ds \\ &\quad + \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{int}} \langle \nabla u_h \rangle_{kl} \cdot \mathbf{n}_{kl} [w]_{kl} ds \end{aligned}$$

여기서, 주의해야 할 점은  $\hat{K}$ 에 속하는  $w$ 는  $\partial\Omega$ 에서 0이라는 것이다. 그러므로 라그랑지언  $L(w, \mu)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} L(w, \mu) &= \frac{1}{2} B(w, w) - F(w) \\ &\quad + \sum_k \int_{\Omega_k} -\Delta u_h dx \\ &\quad + \sum_k \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \frac{1}{2} [\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k w ds \\ &\quad + \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{int}} \langle \nabla u_h \rangle_{kl} \cdot \mathbf{n}_{kl} [w]_{kl} ds \\ &\quad - \sum_{\Gamma_{kl}} \int_{\Gamma_{kl}} \mu [w]_{kl} ds \end{aligned}$$

위 식을 간단히 표현하기 위하여 유한요소  $\Omega_k$ 에서 범함수  $J_k(w)$ 를 정의한다.

$$\begin{aligned} J_k(w) &\equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \nabla w \cdot \nabla w dx \\ &\quad - \int_{\Omega_k} (\Delta u_h + f(x)) w dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \frac{1}{2} \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_k w ds \end{aligned}$$

그러면 라그랑지언  $L(w, \mu)$ 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} L(w, \mu) &= \sum_k J_k(w) \\ &\quad - \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{int}} \{ \mu - \langle \nabla u_h \rangle_{kl} \cdot \mathbf{n}_{kl} \} [w]_{kl} ds \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,  $[w]_{kl}$ 을 포함하는 연결된 항을 없애기 위하여 라그랑지 매개변수  $\mu$ 를 요소간 평균값으로 취한다.

$$\mu = \langle \nabla u_h \rangle_{kl} \cdot \mathbf{n}_{kl} \quad (23)$$

이제 식 (21)과 (22)를 사용하면 오차의 제한은 다음과 같이 얻어지게 된다.

$$\|e\|_k^2 \leq -2 \inf_{w \in \tilde{K}_k} \sum_k J_k(w) \quad (24)$$

그러므로 이 오차의 제한은 다음과 같은 지역 최소화문제를 통하여 얻을 수 있게 되며, 이 문제의 해를  $e_k$ 라 하자.

Find  $e_k \in \tilde{K}_k$  such that  
 $J_k(e_k) \leq J_k(w_k) \quad \forall w_k \in \tilde{K}_k \quad (25)$

여기서 주목해야 할 것은 식 (15)에서의 전체적인 문제가 요소 각각의 지역문제들로 나뉘어졌다는 점이다. 그러나 이러한 지역문제의 성립성(well-posedness)을 먼저 확인하여야 한다. 우선 지역 문제는 형식적으로는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$-\Delta e_k \geq \Delta u_h + f \text{ in } \Omega_k \quad (26)$$

$$e_k \geq -u_h + \psi \text{ in } \Omega_k \quad (27)$$

$$(-\Delta e_k - \Delta u_h - f)(e + u_h - \psi) = 0 \text{ in } \Omega_k \quad (28)$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}[\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k & \text{on } \partial\Omega_k/\partial\Omega \\ 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

이 문제의 경계조건은 노이만(Neumann)형이며, 이러한 문제의 해가 존재하기 위하여는 다음의 조건이 만족되어야만 한다.

$$\int_{\Omega_k} (\Delta u_h + f(x)) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_k} [\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k ds \leq 0 \quad (30)$$

그러나 이 식 (30)은 요소 각각에 대해서 일반적으로 만족되지 않으므로 이러한 문제점을 해결하기 위하여 다음과 같이 정의되는 상수  $\delta_k$ 를 식 (26)에 추가하도록 한다.

$$\delta_k \equiv \frac{1}{\text{meas}(\Omega_k)} \left\{ \int_{\Omega_k} (\Delta u_h + f(x)) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_k} [\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k ds \right\}$$

이때  $\delta_k \leq 0$ 이면 부분문제는 성립함을 알 수 있다.

이상과 같이 부분문제에서 구해진 부분해  $e_k$ 를 사용하면 식 (24)의 오차의 제한은 다음과 같이 주어진다.

$$\|e\|_k^2 \leq -2 \sum_k J_k(e_k) \quad (31)$$

이제 이 오차의 제한을 간략하게 표현하기 위하여  $J_k(e_k)$ 를 다음과 같이 변환하도록 한다.

$$\begin{aligned} J_k(e_k) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \nabla e_k \cdot \nabla e_k dx \\ &\quad - \int_{\Omega_k} (\Delta u_h + f(x)) e_k dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_k/\partial\Omega} \frac{1}{2} [\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k e_k ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \nabla e_k \cdot \nabla e_k dx \\ &\quad - \int_{\Omega_k} (\Delta e_k + \Delta u_h + f(x)) e_k dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_k/\partial\Omega} (\nabla e_k \cdot \mathbf{n}_k) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\nabla u_h]_k \cdot \mathbf{n}_k e_k ds \end{aligned}$$

여기서, 부분문제 식 (26), (27), (28), (29)를 생각해 볼 때 다음과 같이 지배방정식과 경계조건이  $e_k$ 에 의하여 잘 만족될 경우 2번째와 3번째의 항은 첫번째항에 비해 무시할 만큼 작다는 것을 알 수 있다.

$$\Delta e_k + \Delta u_h + f \approx 0 \quad \text{in } \Omega_k$$

$$\nabla e_k \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]_{kl} \approx 0 \quad \text{on } \partial\Omega_k$$

이러한 경우에 대하여 오차계산식을 간략화하면 다음과 같이 부분해  $e_k$ 에 의해서 표현된다.

$$\|e\|_k^2 \leq \sum_k \int_{\Omega_k} \nabla e_k \cdot \nabla e_k dx \quad (32)$$

### 4. 수치해석

전술된 오차계산법의 정확도를 확인하기 위하여 전술된 변분부등식의 형태로 주어지는 다공매체로 만들어진 댐을 통과하는 유동문제를 해석하였다.

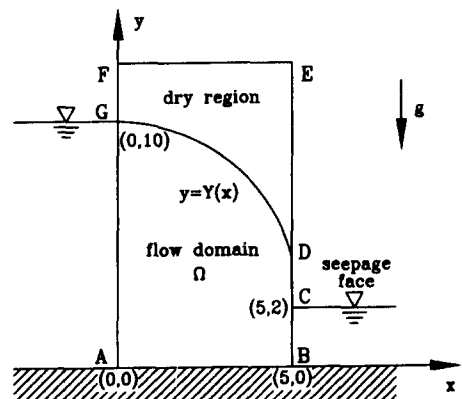


Fig. 1 Configuration of the dam problem

유한요소 근사식에는 제한절점 (constrained node) 을 사용하지 않아도 부분적인 분할이 항상 가능하며 문제영역 내에서 조건식  $v_h \geq \phi$  를 만족하기 용이한 삼각형 선형 유한요소를 사용하였으며, 주의할 점은 선형 유한요소를 사용하는 경우  $\Delta u_h = 0$  이라는 것이다. Fig. 2와 3에는 전체문제를 풀기위한 삼각형요소가 나타나 있으며, 이등변 직각삼각형의 직교하는 한 변의 길이를 유한요소의 크기 매개변수  $h$ 로 택하였으며, 요소의 번호는 댐의 좌측아래에서 오른쪽으로 진행하며, 위쪽으로 가면서 주어졌다. Fig. 2와 3에 나타난 각각의 삼각형요소에 대하여 전술한 바와 같이 부분문제를 정의하였으며, 부분문제에서 계산된 전체 효과지수 (global effectivity index)  $\eta$ 와 각각의 유한요소에서의 부분 효과지수 (local effectivity index)  $\eta_k$ 는 요소  $\Omega_k$ 의 부분문제에서 계산된  $\|e_k\|_{E, \Omega_k}$ 와 실제 유한요소

근사해의 오차  $\|u - u_h\|_{E, \Omega_h}$ 의 비로써 다음과 같이 정의된다.

$$\eta \equiv \left[ \frac{\sum_k \|e_k\|_{E, \Omega_k}^2}{\sum_k \|u - u_h\|_{E, \Omega_k}^2} \right]^{1/2}$$

$$\eta_k \equiv \frac{\|e_k\|_{E, \Omega_k}}{\|u - u_h\|_{E, \Omega_k}}$$

이러한 효과지수는 엄밀오차와 계산된 오차를 비교하여 오차계산법의 정확성을 판단하기 위한 것이며, 효과지수가 1에 가까울수록 계산된 오차가 엄밀오차에 근접하다는 것이므로 오차계산법이 정확하다는 것을 의미한다.

각각의 부분문제에서는 부분분할 (local refinement)에 따른 오차계산의 효과지수의 수렴도를 검토하기 위하여 Fig. 4에 나타난 바와 같이 세 종류의 부분분할을 적용하였다. 여기에서 refinement 0는 추가적인 부분분할없이 부분문제를 해석한 것을 의미한다. 주어진 변분부등식을 풀기 위하여 전체 문제 및 부분문제에 모두 projected SOR (successive over-relaxation) 방법을 사용하였다.

#### 4.1 댐을 투과하는 유동문제

이 문제는 Fig. 1에 나타난 바와 같이 댐의 양면에 수위가 주어져 있을 때 다공매체인 댐을 투과하는 유동의 자유경계와 유량을 구하는 것이다. 초기 형태의 지배방정식에는 유량이 포함되어 있는 혼합 형태 (mixed type) 의 경계조건이 주어지게 되나 바이오키 (Baicocchi) 변환을 통하여 경계조건을 디리클렛 (Dirichlet) 형태로 바꿀 수 있으며, 다음과 같이 주어지게 된다.

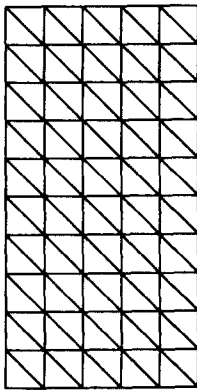


Fig. 2 Finite element mesh used for the dam problem. (h=5/5)

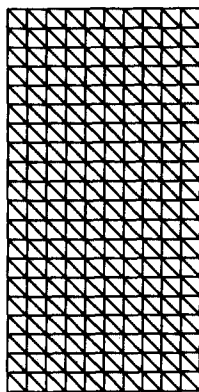


Fig. 3 Finite element mesh used for the dam problem. (h=5/10)

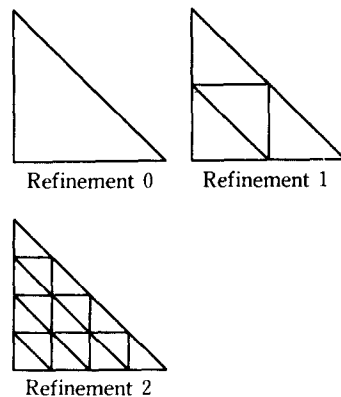


Fig. 4 Local refinements

구간 AB :  $u = -qx + \frac{1}{2}Y_1^2$   
 구간 AG :  $u = \frac{1}{2}(Y_1 - y)^2$   
 구간 BC :  $u = \frac{1}{2}(Y_2 - y)^2$   
 구간 GF, FE, EC :  $u = 0$

여기에서 상수인 유량  $q$ 와 변수  $u(x, y)$ 는 바이오키 변환에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$q \equiv \frac{1}{2L}(Y_1^2 - Y_2^2)$$

$$u(x, y) \equiv \begin{cases} \int_y^{Y(x)} p(x, \xi) d\xi, & y < Y(x) \\ 0, & y \geq Y(x) \end{cases}$$

$p = \text{압력}$

댐의 크기로서 입수면의 높이  $Y_1=10$ , 출수면의 높이  $Y_2=2$ , 댐의 폭  $L=5$ 로 정하였으며, 이 문제는 엄밀해가 존재하지 않으므로 격자의 크기  $h$ 를  $5/40$ 으로 한 미세한 격자를 사용하여 해석한 결과를 엄밀해로 취하였으며, 엄밀해와 유한요소 해석값과의 차이와 부분문제에서 구해진 오차계산값과의 비로서 효과지수를 계산하였다. 이는 미세한 격자와 Fig. 2와 3에 나타난 바와 같은 격자들로부터 구한 근사해에서 오차계산법을 사용하여 계산된 상대오차를 구하여 검증하였다. 각각의 격자들에 대해서 계산된 상대오차는  $h=5/5$  경우 11.37%,  $h=5/10$  경우 6.01%,  $h=5/40$  경우 1.57%이었으며 이러한 사실로부터  $h=5/40$ 인 경우는 상대적으로 엄밀해에 근접함을 알 수 있다. Fig. 5에는 영역 전체에서의 효과지수의 부분분할에 따른 변화가 나타나 있으며, Fig. 6과 7에는 각각의 요소에서의 효과지수의 분포가 요소번호 및 부분분할에 따라 나타나 있다. 여기서 주의할 점은 요소번호는 임의

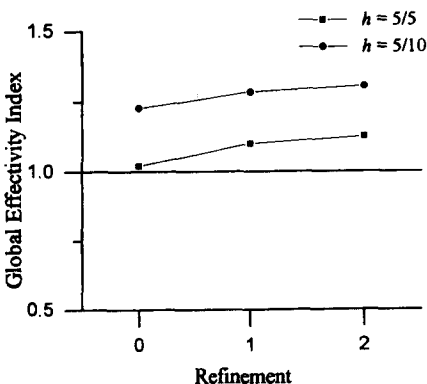


Fig. 5 Global effectivity index of the dam problem

로 주어져 있으므로 요소번호에 따르는 변화는 의미가 없으며, 부분오차의 효과지수가 0으로 표시되는 요소는 그 요소에서의 엄밀오차가 0임을 의미한다.

4.2 SHEET 파일이 있는 댐의 유동문제

이 문제는 전술된 문제와 같으나 Fig. 8에 나타난 바와 같이 댐의 한쪽 면에 물이 통과하지 못하도록 sheet 파일을 설치한 것이며, 댐의 크기는 입수면의 높이  $Y_1=7$ , 출수면의 높이  $Y_2=1$ , 댐의 폭  $L=5$ , sheet파일의 길이는 4로 정하였다. 이 경우 지배방정식은 이전의 문제와 같으나 경계조건은 다음과 같이 주어지게 된다.

구간 AB :  $u = -q(x-L) + \frac{1}{2}Y_2^2$   
 구간 AG :  $u = \frac{1}{2}y^2 - Y_1y + \frac{1}{2}Y_2^2 + qL$   
 구간 BC :  $u = \frac{1}{2}(Y_2 - y)^2$

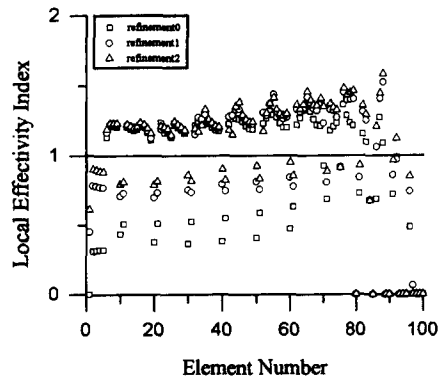


Fig. 6 Local effectivity index of the dam problem. (h=5/5)

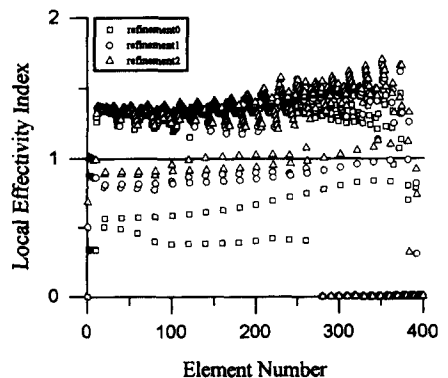


Fig. 7 Local effectivity index of the dam problem. (h=5/10)

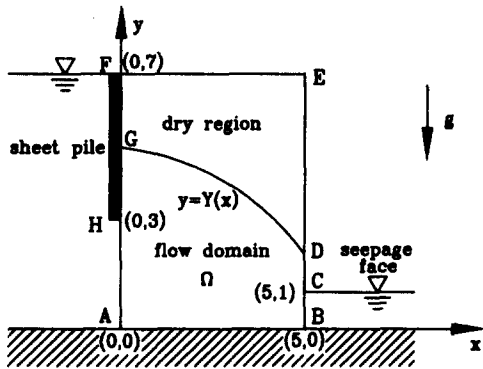


Fig. 8 Configuration of the dam with a sheet pile problem

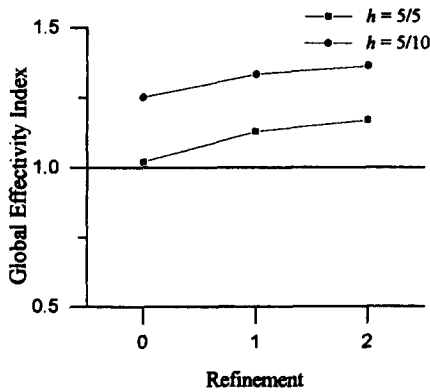


Fig. 9 Global effectivity index of the dam with a sheet pile problem

구간 GF :  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$   
 구간 FE, EC :  $u = 0$

경계조건에서 나타나는 변수  $u$ 는 이전의 문제에서의 정의와 같으나, 이 문제의 경우에는 댐을 통과하는 유량  $q$ 를 수위만으로는 미리 결정할 수 없고, 이로 인하여 지배방정식뿐만 아니라 경계조건 까지도 비선형이 된다.

유량은 sheet 파일의 끝에서 0이라는 사실을 이용하여 뉴턴(Newton)방법에 의해서 유량의 초기값을 가정하고 반복법으로 구할 수 있다. 여기서 구해지는 유량 역시 유한요소 격자에 따라 변하게 되므로 Fig. 2와 3과 같은 형태의 격자들을 사용하여 각각의 상대오차를 계산하였다. 상대오차는  $h = 5/5, 5/10, 5/40$ 인 경우에 대해 각각 16.83, 9.09, 2.41%이므로 미세한 격자에서 구해진 유량  $q=3.8890$  이 상대적으로 실제값에 근접함을 알

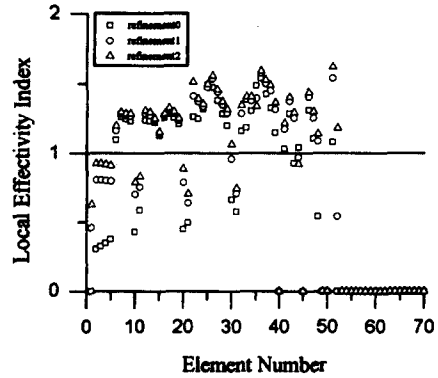


Fig. 10 Local effectivity index of the dam with a sheet pile problem. ( $h=5/5, q=3.8890$ )

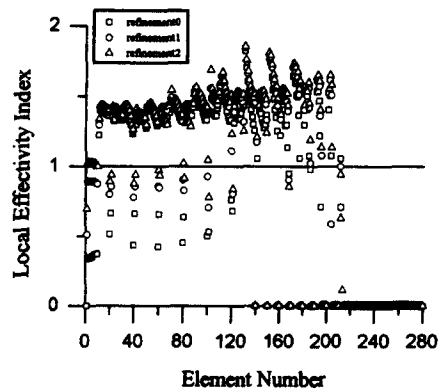


Fig. 11 Local effectivity index of the dam with a sheet pile problem. ( $h=5/10, q=3.8890$ )

수 있었다. 이 문제 또한 엄밀해가 주어지지 않으므로 미세한 격자를 사용하여 얻은 해를 엄밀해로 택하였으며, 이는 위의 문제에서와 같이 상대오차를 계산하여 검증하였다. Fig. 9에는 영역 전체에서의 효과지수의 부분분할에 따른 변화가 나타나 있으며 Fig. 10과 11에는 각각의 요소에서의 효과지수의 분포가 요소번호 및 부분분할에 따라 나타나 있다. 위의 문제와 같이 부분오차의 효과지수가 0으로 표시되는 요소는 그 요소에서의 엄밀오차가 0임을 의미한다.

### 5. 결론

본 논문의 주된 목적은 새로운 오차계산법을 개발하고 이 오차계산법의 정확성을 수치적인 실험을 통하여 검증하는 것이며, 수치해석의 결과 다음과



같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 수치해석의 결과를 보면 효과지수는 부분분할을 많이 함에 따라 증가함을 알 수 있다. 이는 부분분할에 따라 부분문제의 해석이 점점 정밀하게 되고, 식 (32)에서 가정한 바와 같이 첫항 외의 나머지 항에 의한 효과가 작아지게 됨으로서 식에서 나타난 바와 같이 계산된 오차가 상위제한(upper bound)이 되는 것을 나타냄을 알 수 있다. 이러한 경향은 요소 각각에서의 부분오차에서도 나타나고 있다.

(2) 영역 전체에서의 효과지수는 1.5 이하로 낮은 수준의 값이다. 이로써 참고문헌<sup>(1~5)</sup>에서 소개된 오차계산법의 효과지수가 대체로 5이상의 값을 갖으며, 단순한 상위제한값만을 제시하거나 요소의 크기에 대하여 효과지수가 수렴하지 않는 등의 단점을 갖고 있는 것을 볼 때, 본 논문에서 개발된 오차계산법은 상당히 효과적인 것을 알 수 있다.

(3) 요소 각각에서의 부분효과지수는 1.0에서 2.0 사이의 값을 가지고 있으며, 부분분할을 많이 할수록 이 값의 분포가 균일해짐을 알 수 있다. 또한 전술한 바와 같이 자유경계면을 결정하는 과정에서의 비선형성에 의하여 자유경계면의 요소에서의 부분효과지수가 가장 좋지 않았다.

### 참고문헌

- (1) Oden, J. T., Demkowicz, L., Rachowicz, W. and Westermann, T. A., 1989, "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori Error Estimation," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 77, pp. 113~180.
- (2) Bank, R. E. and Weiser, A., 1985, "Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations," *Math. Comp.*, 44, pp. 283~301.
- (3) Ekeland, I. and Teman, R., 1976, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- (4) Babuska, I. and Rheinboldt, W. C., 1978, "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations," *SIAM, J. Numer. Anal.*, 15, pp. 736~753.
- (5) Demkowicz, L. and Oden, J. T., 1986, "On a Mesh Optimization Based on a Minimization of Interpolation Error," *Internat. J. Engrg. Sci.*, 24, pp. 55~68.
- (6) Percell, P. and Wheeler, M. F., 1978, "A Local Residual Finite Element Procedure for Elliptic Equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, 15, pp. 705~714.
- (7) Ainsworth, M., 1991, "Analysis of a Signorini-Obstacle Type Variational Inequality," *TICOM Report 91-1*, Austin, Texas.
- (8) Ainsworth, M., Oden, J. T. and Lee, C. Y., 1993, "Local a Posteriori Error Estimators for Variational Inequalities," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 9, pp. 23~33.
- (9) Duvaut, G. and Lions, J. L., 1976, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin.
- (10) Hlavacek, I., Haslinger, J., Necas, J. and Lovisek, J., 1980, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Applied Mathematical Sciences, 66, Springer-Verlag.
- (11) Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G., 1980, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press.
- (12) Elliot, C. M. and Ockenden, J. R., 1982, *Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems*, Pitman Pub., Boston.
- (13) Adams, R. A., 1975, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.
- (14) Kikuchi, N. and Oden, J. T., 1988, *Contact Problems in Elasticity*, SIAM, Philadelphia.