

〈논 문〉

고유진동수와 모드의 민감도를 계산하기 위한 대수적 방법

정길호* · 김동옥* · 이종원** · 이인원***

(1995년 9월 16일 접수)

Algebraic Method for Computation of Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities

Gil-Ho Jung, Dong-Ok Kim, Chong-Won Lee and In-Won Lee

Key Words : Sensitivity Analysis(민감도 해석), Design Parameter(설계변수), Eigenvalue Problem(고유치 문제), Algebraic Method(대수적 방법)

Abstract

This paper presents an efficient numerical method for the computation of eigenpair derivatives for a real symmetric eigenvalue problem with distinct and multiple eigenvalues. The method has a very simple algorithm and gives an exact solution. Furthermore, it saves computer storage and CPU time. The algorithm preserves not only the symmetricity but also the band width of the matrices, allowing efficient computer storage and solution techniques. Results from the proposed method for calculating the eigenpair derivatives are compared with those from Rudisill and Chu's method and Nelson's method which is known efficient one in the case of distinct natural frequencies. As an example to demonstrate the efficiency of the proposed method in the case of distinct eigenvalues, a cantilever plate is considered. The design parameter of the cantilever plate is its thickness. For the eigenvalue problem with multiple natural frequencies, the adjacent eigenvectors are used in the algebraic equation as side conditions, lying adjacent to the m (multiplicity of multiple natural frequency) distinct eigenvalues, which appear when design parameter varies. A cantilever beam is used to demonstrate the efficiency of the proposed method in the case of multiple natural frequencies. Results from the proposed method for calculating the eigenpair derivatives are compared with those from Dailey's method (an amendment of Ojalvo's work) which finds the exact eigenvector derivatives. The design parameter of the cantilever beam is its height. Data is presented showing the amount of CPU time used to compute the first ten eigenpair derivatives by each method. It is important to note that the numerical stability of the proposed method is proved.

1. 서 론

시스템의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유진동수와 모드를 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정할 때 유용할 뿐만 아니라, 설계

*회원, 한국과학기술원 기계공학과

**회원, 중앙대학교 기계공학과

***회원, 한국과학기술원 토목공학과

경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데 있어서도 대단히 유용하다.

1975년에 Rudisill과 Chu⁽¹⁾가 모든 미분을 구할 수 있는 대수적인 방법을 제안했다. 이 방법은 최종적으로 풀어야 하는 선형 대수방정식의 계수행렬이 비대칭이고, 서로 다른 고유치를 갖는 고유치 문제에 국한되어 있다. 1976년에 Nelson⁽²⁾도 서로 다른 고유치를 갖는 일반적인 실제수행렬에 대한 고유쌍을 계산하는 알고리즘을 제안했다. 이 방법도 한개의 고유쌍 미분을 계산하기 위하여 그에 해당하는 한쌍의 고유치가 필요하기 때문에 효율적이긴 하지만, 고유치가 중복근을 갖는 경우에 어려움이 있다. 일반적인 구조물은 구조물의 대칭성 때문에 많은 중복근이 존재한다. 그래서 중복근을 갖는 경우에 고유진동수 및 모드의 미분을 구하는 것이 최근의 연구과제이다.⁽³⁻⁹⁾ Nelson의 방법을 중복근을 갖는 경우까지 확장한 Ojalvo^(3,4) 방법이 있고, 이 방법을 수정한 Mills-Curren⁽⁵⁾ 방법과 Dailey⁽⁶⁾ 방법이 있다. 이 방법들은 Nelson의 방법을 기본적인 알고리즘으로 사용하기 때문에 모드의 미분값을 구할 때 대단히 복잡하다. 그렇지만 제안방법은 선형 대수방정식의 계수행렬이 대칭을 유지하도록 제약조건을 첨가한다. 대칭행렬은 band형태나 sky-line형태로 계산할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 해석시간을 절약할 수 있는 장점이 있다. 또한 시스템의 고유진동수가 중복근을 갖는 경우에도, 설계변수가 변할 때 나타나는 m (중복근의 갯수)개의 모드에 근접한 원래 시스템의 모드 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약조건을 첨가하여 모드의 미분을 계산할 수 있다.

2장과 3장에서는 기존 방법들의 고유치 문제에 대한 민감도 해석을 간략히 살펴보았다. 4장에서는 제안방법과 제안방법의 수치적 안정성을 증명하였고, 5장에서는 예제를 통한 수치해석을 수행하였다.

2. 기존의 민감도 해석기법

2.1 이론적 배경

동적 해석에서 일반화된 고유 문제는 다음과 같다.

$$K\phi_j = \lambda_j M\phi_j \quad (1)$$

여기서, K 와 M 은 각각 시스템의 강성행렬과 질량

행렬이다. M 은 양의 한정(positive definite) 행렬이고, K 는 양의 한정(positive definite) 행렬 또는 반양의 한정(semi-positive definite)행렬이다. K 와 M 은 n 차의 대칭행렬이고, λ_j 는 시스템의 j 번째 고유진동수의 제곱이고, ϕ_j 는 시스템의 j 번째 모드이다. 모드는 일반적으로 다음과 같이 정규화한다.

$$\phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (2)$$

고유치의 미분을 구하기 위해 설계변수에 대하여 식 (1)을 미분하면

$$(K - \lambda_j M) \phi'_j = -(K' - \lambda'_j M') \phi_j + \lambda'_j M \phi_j \quad (3)$$

식 (3)의 양변 앞에 ϕ_j^T 를 곱하고 정리하면, 고유치 미분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda'_j = \phi_j^T (K' - \lambda'_j M') \phi_j \quad (4)$$

여기서, $\lambda'_j = \partial \lambda_j / \partial \rho$, $K' = \partial K / \partial \rho$ 그리고 $M' = \partial M / \partial \rho$ 이고, ρ 는 설계변수이다. λ_j 를 식 (4)와 같이 구했으므로 식 (3)의 우변항은 아는 값이다. 그러나, 행렬 $K - \lambda_j M$ 가 정칙행렬이 아니기 때문에 직접적으로 ϕ'_j 를 구할 수 없다. 그래서 Rudisill과 Chu는 제약조건을 첨가해서 비대칭 정칙행렬을 구성하여 ϕ'_j 를 계산했고, Nelson은 특이해(particular solution)와 비특이해(homogeneous solution)의 합으로 ϕ'_j 를 구하는 알고리즘을 제시했다. 이외에도 모드의 미분을 모드들의 조합으로 표시하여 계산하는 modal method⁽¹⁰⁻¹⁵⁾와 이를 수정·보완한 많은 방법들이 있지만, 한개의 모드의 미분을 구하기 위하여 전부, 또는 여러 개의 모드들이 필요하기 때문에 Nelson 방법에 비해서 계산량이 많은 단점이 있다.⁽¹⁶⁾ 또한 반복과정을 통한 반복적 방법^(1, 17-19)들이 있지만 근사해를 구하기 때문에 본 논문⁽²⁰⁾에서는 고려하지 않았다.

2.2 Nelson 방법

이 방법은 특이해 v 와 비특이해 $c\phi_j$ 의 합으로 모드의 미분을 계산한다. 즉,

$$\phi'_j = v + c\phi_j \quad (5)$$

여기서, c 는 계수이다. j 번째 모드의 요소중에서 가장 큰 값에 해당하는 위치를 k 라고 하면, ϕ'_j 의 요소중에서 k 번째 값을 0으로 함으로써 특이해 v 를 계산할 수 있다. 계수 c 는 식 (2)을 미분한 식에서 식 (5)을 대입하면, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c = -vM\phi_j - 0.5\phi_j^T M' \phi_j \quad (6)$$

Nelson 방법의 알고리즘을 Table 1에 정리하였다.

이 방법은 서로 다른 고유치를 갖는 고유치 문제에 대하여 수 많은 방법들 중에서 지금까지 가장 효율적인 방법중의 하나이지만, (16) 알고리즘이 다소 복잡할 뿐만 아니라 중복근을 갖는 경우에 ϕ_j 을 구할 수 없다. Ojalvo, Mills-Curren 그리고 Dailey 등이 이 방법을 확장하여 중복근을 갖는 경우에 해법을 개발하였지만, 알고리즘이 대단히 복잡하고 계산시간이 오래 걸리는 단점이 있다. Dailey 방법을 3장에서 소개했다.

2.3 Rudisill & Chu 방법

이 방법은 제약조건을 첨가하여 비대칭 선형대수 방정식을 푸는 방법이다. 식 (1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M) \phi_j = 0 \quad (7)$$

식 (7)를 미분한 식 (3)를 다시 쓰면,

$$(K - \lambda_j M) \phi_j' - \lambda_j' M \phi_j = -(K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (8)$$

모드를 길이로 정규화한 다음 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T \phi_j = 1 \quad (9)$$

$$\phi_j^T \phi_j' = 0 \quad (10)$$

식 (8)과 식 (10)를 합해서 선형 대수방정식 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K - \lambda_j M & -M \phi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \end{Bmatrix} \phi_j \quad (11)$$

식 (11)에서 계수행렬을 Choleski의 행렬분해법(21)을 이용하여 ϕ_j' 과 λ_j' 을 구할 수 있다. 알고리즘을 Table 2에 정리하였다.

이 방법은 알고리즘이 대단히 간단하고 정확한 해를 구할 수 있는 강력한 방법임에도 불구하고, 계수행렬이 비대칭이어서 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 많이 소요될 뿐만 아니라, 수치적 안정성의 증명이 없고, 중복근이 있는 경우에 사용할 수 없는 단점이 있기 때문에 그동안 사장되었던 방법이다. 제안방법은 이방법의 장점을 유지하면서 앞에서 열거한 단점들을 모두 보완했다.

Table 1 The procedure of Nelson's method

(1) Compute $\lambda_j' = \phi_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j$
(2) Let $f_j = -(K' - \lambda_j M') \phi_j + \lambda_j' M \phi_j$, and $G_j = K - \lambda_j M$
(3) Find k such that $\phi_{j,k}$ is the largest element on the column of ϕ_j , where $\phi_j = (\phi_{j1}, \phi_{j2}, \dots, \phi_{jn})^T$
(4) Construct \bar{G}_j by zeroing out row k and column k of G_j and setting the k-th diagonal elements to 1.
(5) Construct \bar{f}_j by zeroing out the k-th element of f_j .
(6) Solve $\bar{G}_j v_j = \bar{f}_j$.
(7) Compute $c_j = -vM\phi_j - 0.5\phi_j^T M' \phi_j$.
(8) Let $\phi_j' = v_j + c_j \phi_j$

Table 2 The procedure of Rudisill and Chu's method.

(1) Define $K_{jR-C}^* = \begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K - \lambda_j M & -M \phi_j \end{bmatrix}$
(2) Compute $f_{jR-C} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \phi_j \end{Bmatrix}$
(3) Compute $\begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = [K_{jR-C}^*]^{-1} f_{jR-C}$ (using LU decomposition method)

3. Dailey 방법

이 방법은 Ojalvo 방법을 수정·보완한 방법이다. 예를 들어, 고유치 문제의 고유진동수가 m 번 중복되었다고 하면, 설계변수가 변함에 따라 중복되었던 m 개의 고유진동수가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우 m 개의 서로 다른 고유진동수에 대응하는 모드들을 구할 수 있다. 그러나 중복된 고유진동수를 갖는 고유 부공간(eigen-subspace)에서는 임의의 벡터쌍은 모두 모드가 될 수 있다. 모드의 미분이 존재하기 위해서는 설계변수가 변하기 전의 고유치가 중복근을 갖는 고유 부공간에서 설계변수가 변할 때 나타나는 모드에 가장 근접한 모드 집합을 먼저 구해야 한다. 이러한 근접한 모드 집합을 구하기 위해서 다음과 같은 고유치 문제를 고려한다.

$$K\Psi = M\Psi\Lambda \quad (12)$$

위 식에서 Ψ 는 m 개의 고유벡터로 이루어진 $n \times m$ 행렬이며, Λ 는 Ψ 로 기술되는 고유 부공간(eigen-subspace)의 m 차 중복고유치인 λ_m 으로 구성된 $m \times m$ 대각행렬이다. 즉 I_m 를 m 차 단위행렬이라 할 때 $\Lambda = \lambda_m I_m$ 이며, $\Psi^T M \Psi = I_m$ 이다. 또한 근접한 모드들은 직교변환(orthonormal transformation)에 의해 Ψ 의 항으로 표시될 수 있다.

$$Z = \Psi\Gamma \quad (13)$$

여기서, Γ 는 $m \times m$ 직교변환행렬이다.

$$Z^T M Z = \Gamma^T \Psi^T M \Psi \Gamma = \Gamma^T \Gamma = I_m \quad (14)$$

모드의 미분을 구하기 위하여 먼저 Γ 를 계산해야 한다. 설계변수가 변함에 따라 중복되었던 고유

진동수는 서로 다른 m 개의 값을 갖게 되기 때문에, $\Lambda' = \partial\Lambda/\partial p = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ 로 쓸 수 있다. Γ 를 구하기 위하여 다음과 같이 근접한 모드 Z 로 구성된 고유치 문제를 고려하면,

$$KZ = MZA \quad (15)$$

식 (15)을 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_m M)Z' = -(K' - \lambda_m M')Z + MZA' \quad (16)$$

식 (16)의 양변의 앞에 Ψ^T 를 곱하고, $D \equiv [\Psi^T(K' - \lambda_m M')\Psi]$ 와 $Z = \Psi\Gamma$ 를 이용하여 정리하면,

$$D\Gamma = \Gamma A' \quad (17)$$

고유치 문제인 식 (17)을 풀면 Γ 를 구할 수 있다. 그러므로 식 (13)의 직교변환을 이용하여 근접한 모드들로 이루어진 행렬 Z 를 구할 수 있다. 이제 Z' 을 구하기 위하여 식 (16)의 우변을 $F \equiv -(K' - \lambda_m M')Z + MZA'$ 라고 하면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_m M)Z' = F \quad (18)$$

식 (18)의 계수행렬 $K - \lambda_m M$ 의 랭크는 $n - m$ 이므로 정칙행렬이 아니다. 그러므로 식 (18)을 이용하여 Z' 을 직접 구할 수는 없다. 다음은 Z' 을 구하는 과정을 정리한 것이다.

만일 V 가 $(K - \lambda_m M)V = F$ 의 해이며, $V + ZC$ 도 해가 된다. 여기서, C 는 $m \times m$ 계수행렬이다. 식 (18)에 Nelson의 알고리즘을 적용하여 V 를 구한다. V 를 구하기 위한 절차를 Table 3에 정리하였다.

이제 계수행렬 C 의 대각요소를 구하기 위해 정규화조건 $Z^T M Z = I_m$ 를 미분한 다음, $Z' = V + ZC$ 를 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

Table 3 The procedure to find the particular solution V

(1) Let $Z = [z_{ij}]$
(2) Find k such that z_{k1} is the largest element on the first column of Z .
(3) Replace the k -th row and column of G with zeros, except placing 1 on the k -th diagonal element.
(4) Replace the k -th row of F with zeros.
(5) Go back to step 2 and repeat for the next column of X until through. If k has been used before, choose the second largest (third largest, etc.) element in the column instead.
(6) Call the resulting matrices \bar{G} and \bar{F} .
(7) Solve $\bar{G}V = \bar{F}$.

$$Q \equiv C + C^T = -V^T M Z - Z^T M V - Z^T M' Z \quad (19)$$

즉,

$$c_{ii} = 0.5q_{ii} \quad (20)$$

C의 비대각요소는 고유치 문제 $KZ = MZA$ 를 두 번 미분함으로써 구할 수 있다. 일단 식 (15)를 설계변수에 대하여 미분하면,

$$K'Z + KZ' - M'ZA - MZ'A - MZA' = 0 \quad (21)$$

식 (21)을 한번 더 미분하고 정리하면,

$$(K'' - \lambda M'')Z + 2(K' - \lambda M')Z' + (K - \lambda M)Z'' - 2M'ZA' - 2MZ'A' - MZA'' = 0 \quad (22)$$

식 (22)의 앞에 Z^T 를 곱하고, $Z' = V + ZC$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$Z^T(K'' - \lambda M'')Z + 2Z^T(K' - \lambda M')V + 2Z^T(K' - \lambda M')ZC - 2Z^T M'ZA' - 2Z^T MVA' - 2Z^T MZCA' - A'' = 0 \quad (23)$$

식 (23)에 $Z^T(K' - \lambda M')Z = Z^T[-(K - \lambda M)Z' + MZA'] = A'$ 과 $Z^T MZ = I_m$ 인 관계를 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$R \equiv CA' - A'C + 0.5A'' \\ = Z^T(K' - \lambda M)V - Z^T(M'Z + MV)A'$$

$$+ 0.5Z^T(K'' - \lambda M'')Z \quad (24)$$

식 (24)에서 A'' 는 대각행렬이고, $CA' - A'C$ 는 대각요소가 0인 행렬이기 때문에 C와 A'' 를 이식에서 개별적으로 구할 수 있다. $C = [c_{ij}]$, $R = [r_{ij}]$, $A' = \partial A / \partial p = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 그리고 $A'' = \text{diag}(\lambda_1'', \dots, \lambda_m'')$ 이므로 다음과 같이 r_{ij} 를 구할 수 있다.

$$r_{ij} = \begin{cases} c_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) & \text{if } j \neq i \\ 0.5\lambda_i'' & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

그러므로, $\lambda_j \neq \lambda_i$ 이면 $c_{ij} = r_{ij} / (\lambda_j - \lambda_i)$ 이고 식 (20)에서 $c_{ij} = 0.5q_{ij}$ 이다. 중복된 모드미분값이 존재할 때, 즉 $\lambda_j = \lambda_i (j \neq i)$ 이면, 설계변수가 변해도 원래의 m -차원 고유부공간은 m 개의 서로 다른 고유치로 변하지 않는다. 이 경우, 모드의 미분이 유일하지 않기 때문에 계수행렬 C가 제한조건 $c_{ij} + c_{ji} = q_{ij} = q_{ji}$ 을 만족하면, $Z' = V + ZC$ 의 어떠한 행동 모드의 미분으로써 유효하다. 이러한 Dailey의 방법을 Table 4에 정리하였다.

이 방법은 정확한 해를 구하고, 중복된 고유치에 해당하는 모드들의 미분을 구하기 위해 중복된 고유쌍만이 필요하다는 장점을 가지고 있다. 그렇지만, 알고리즘이 복잡해서 계산시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라, 결정적으로 K'' 와 M'' 의 계산이 필요한

Table 4 The procedure of Dailey's method

(1) Compute $D = \Psi^T(K' - \lambda_m M')\Psi$
(2) Solve the eigenvalue problem $D\Gamma = \Gamma A'$. A' is the diagonal matrix of eigenvalue derivatives, and Γ should be normalized so that $\Gamma^T \Gamma = I_m$
(3) Let the columns of $Z = \Psi\Gamma$ be the new eigenvectors.
(4) Compute $G = K - \lambda_m M$, $F \equiv -(K' - \lambda_m M')Z + MZA'$
(5) Find the m rows of Z containing the largest elements. Zero out these rows and columns of G and the same rows of F . Place 1 in the affected diagonal elements of G and call the resulting matrices \bar{G} and \bar{F} .
(6) Solve $\bar{G}V = \bar{F}$
(7) Compute $Q = C + C^T = -V^T M Z - Z^T M V - Z^T M' Z$
(8) Compute $R = CA' - A'C + 0.5A'' = Z^T(K' - \lambda M')V - Z^T(M'Z + MV)A' + 0.5Z^T(K'' - \lambda M'')Z$
(9) Construct the $m \times m$ matrix C by the rule
$c_{ij} = \begin{cases} r_{ij} / (\lambda_j - \lambda_i), & \text{if } \lambda_j \neq \lambda_i \\ 0.5q_{ij}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{where, } A' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$
(10) Let $Z' = V + ZC$. The columns of Z' are the eigenvector derivatives.

점에서 제안방법보다 비효율적이다.

4. 제안방법

4.1 서로 다른 고유치를 갖는 경우

제안방법은 정규화 조건, 식 (2)을 미분하여 제약조건으로 이용한다. 이 제약조건을 이용하여 계수행렬을 대칭으로 만들고, 수치적으로 안정한, 즉 역행렬을 구할 수 있는 선형 대수방정식을 풀므로서 모드의 미분을 구하는 방법이다. 식 (8)을 다시 써보면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M) \phi_j - \lambda_j M \phi_j = -(K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (26)$$

식 (2)과 같이 모드를 정규화한 식을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T M \phi_j' + 0.5 \phi_j^T M' \phi_j = 0 \quad (27)$$

식 (26)과 식 (27)를 합해서 계수행렬이 대칭인 선형 대수방정식 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K - \lambda_j M & -M \phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K' - \lambda_j M') \phi_j \\ 0.5 \phi_j^T M' \phi_j \end{bmatrix} \quad (28)$$

식 (28)에서 계수행렬을 LDL^T (L : lower triangular matrix, D : diagonal matrix)⁽²¹⁾로 행렬 분해해서 ϕ_j 와 λ_j 를 간단히 구할 수 있다. 계수행렬이 대칭인 것은 대단히 중요하다. 계수행렬을 band형태나 sky-line형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산시간이 절약된다. 중복근을 갖는 경우의 알고리즘은 4.2절에 소개하였고, 수치적 안정성은 4.3절에서 증명하였다.

4.2 중복된 고유치를 갖는 경우

Dailey 방법에서와 같이 근접한 모드 Z 를 구했다고 가정하고, 다음과 같은 정규화조건을 갖는 고유치 문제를 고려하자.

$$KZ = MZA \quad (29)$$

$$Z^T MZ = I \quad (30)$$

식 (29)와 (30)을 설계변수에 대하여 미분하면,

$$(K - \lambda M) Z' - MZA' = -(K' - \lambda M') Z \quad (31)$$

$$Z^T MZ' + 0.5 Z^T M' Z = 0 \quad (32)$$

서로 다른 고유치를 갖는 경우와 마찬가지로 식 (31)과 식 (32)을 합해서 계수행렬이 대칭인 선형 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z' \\ \Lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K' - \lambda M') Z \\ 0.5 Z^T M' Z \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서, 계수행렬의 차수는 $(n+m) \times (n+m)$ 이다. 계수행렬이 대칭이므로 LDL^T 행렬분해법으로 Z' 와 Λ' 를 구할 수 있다.

Dailey 방법뿐만 아니라 제안방법도 모드의 미분을 구할 때, 중복된 고유치에 해당하는 고유쌍만이 필요하고, 연산과정에서 대칭인 행렬을 사용한다. 이러한 특징은 자유도가 큰 실제 대형 구조물을 해석할 때 대단히 유효하다. 또한 제안방법은 모드의 미분을 계산하기 위하여 강성행렬과 질량행렬의 1차 미분만이 필요한 반면에, Dailey 방법은 2차 미분까지 필요하다. 이와 같이 제안 방법은 알고리즘이 대단히 간단하고 정확한 해를 구한다. 제안방법의 알고리즘을 Table 5에 정리하였다.

Table 5 The procedure of the proposed method

(1) Compute $D = \Psi^T (K' - \lambda M') \Psi$
(2) Solve the eigenvalue problem $D\Gamma' = \Gamma\Lambda'$. Λ' is the diagonal matrix of eigenvalue derivatives, and Γ should be normalized so that $\Gamma^T \Gamma = I$
(3) Let the columns of $Z = \Psi \Gamma$ be the new eigenvectors.
(4) Define $K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix}$
(5) Compute $P = \begin{bmatrix} -(K' - \lambda M') Z \\ 0.5 Z^T M' Z \end{bmatrix}$
(6) Compute $\begin{bmatrix} Z' \\ \Lambda' \end{bmatrix} = [K^*]^{-1} P$

4.3 제안방법의 수치적 안정성⁽²²⁾

고유치가 중보근을 갖는 일반적인 경우에 대하여 제안방법의 수치적 안정성을 증명하였다. 수치적 안정성은 제안방법의 최종 결과식에서 계수행렬의 정칙성(nonsingularity)을 증명하면 된다. 증명의 간단화를 위하여 처음 m 개의 고유값이 중복되었다고 가정하고, 다음과 같이 행렬 K^* 를 정의한다.

$$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

여기서, Z 는 근접한 모드들로 이루어진 $n \times m$ 행렬이다. 행렬 K^* 가 정칙행렬임을 증명하기 위하여 다음과 같은 고유치 문제를 도입한다.

$$K^* U = M^* U D \quad (35)$$

여기서,

$$M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n+m}] \quad (37)$$

$$D = \text{diag}(\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_{n+m}) \quad (38)$$

I_m 은 m 차의 단위행렬이고, U 와 D 는 $(n+m) \times (n+m)$ 행렬이다. 식 (35)의 고유치 문제의 $n+m$ 개의 모드와 고유치는 다음과 같다.

모드

$$u : \begin{cases} \begin{Bmatrix} z_i \\ e_j \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} z_i \\ -e_j \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} z_k \\ 0 \end{Bmatrix} & i=1, 2, \dots, m \\ & k=m+1, m+2, \dots, n \end{cases} \quad (39)$$

여기서, $e_j = [0, \dots, 1, \dots, 0]$ 이다. 즉 j 번째 요소만 1이고 나머지는 0이다.

고유치

$$\gamma : \begin{cases} -1, \dots, -1 (m \text{개}) \\ 1, \dots, 1 (m \text{개}) & (k=m+1, m+2, \dots, n) \\ \lambda_k - \lambda (n-m \text{개}) \end{cases} \quad (40)$$

여기서, λ 는 중복된 고유진동수이다.

식 (35)의 determinant 관계를 고려하면,

$$\begin{aligned} \det[K^*] &= \det[M^*] \det[D] \\ &= (-1)^m \det[M] \prod_{k=m+1}^n (\lambda_k - \lambda) \neq 0 \end{aligned} \quad (41)$$

식 (41)에서 $\det[M]$ 은 정의에 의해 0(zero)이 아니므로 $\det[K^*] \neq 0$ 이다. 이상에서 제안방법의

수치적 안정성을 증명하였다.

5. 수치해석

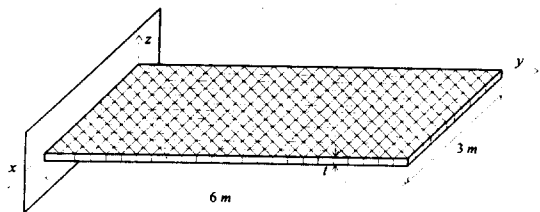
제안방법의 효율성을 증명하기 위하여 서로 다른 고유진동수를 갖는 경우인 평판과, 중복된 고유진동수를 갖는 경우인 외팔보를 예제로 택하여 수치 해석하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 계산속도가 10 Mips이고, 0.9 MFlops인 IRIS4D20-S17이다.

5.1 평판

서로 다른 고유진동수를 갖는 시스템의 예로 Fig. 1의 평판 구조물을 고려하자. 이 구조물은 576개의 삼각형 요소로 모델링하였다. 각 절점은 3자유도(z -변위, x -각변위, y -각변위)이기 때문에 한 요소는 9자유도이다. 전체 자유도는 936이다.

탄성계수는 $10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는 $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 이다. Poisson비는 0.3이다. 설계변수는 평판의 두께 t 이다. 고유진동수 10개를 Table 6에 표시하였다. 강성행렬과 질량행렬이 각각 t_0 과 t 에 비례한다. 그래서 이 경우 강성행렬과 질량행렬의 미분은 t 에 대하여 미분함으로써 간단히 구할 수 있다.

이 예제의 경우 해석시간은 Rudisill-Chu의 방법, Nelson 방법과 비교하였다. 10개의 고유쌍 미분을 구하는데 걸린 시간은 Rudisill-Chu의 방법은 409.0 sec, Nelson 방법의 경우 47.3 sec이고, 제안방법은 46.8 sec이다. Nelson 방법은 $n-1$ 차의 선형 대수방정식과 상수 c 를 계산하고, 제안방법은 $n+1$ 차의 선형 대수방정식을 계산하기 때문에 계산시간은 비슷하다. 그러나 Rudisill-Chu의 방법



Number of nodes	: 325
Number of elements	: 576
Number of degrees of freedom	: 936
Young's modulus	: $E = 10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
Mass density	: $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

Fig. 1 Cantilever plate with the thickness t as the design parameter

Table 6 The first ten eigenvalues and their derivatives with respect to the thickness of the cantilever plate

Eigenvalue number	Eigenvalues	Eigenvalue derivatives
1	0.33782E+02	0.67744E+04
2	0.62019E+03	0.12404E+06
3	0.13099E+04	0.26198E+06
4	0.65761E+04	0.13134E+07
5	0.10268E+05	0.20537E+07
6	0.23768E+05	0.47535E+07
7	0.24201E+05	0.48401E+07
8	0.39428E+05	0.78856E+07
9	0.44496E+05	0.88992E+07
10	0.65571E+05	0.13103E+08

Table 7 Some components of the first and third mode shape derivatives with respect to the thickness of the cantilever plate

Equation number	First mode shape derivative	Third mode shape derivative
1	-0.80433E+01	-0.72426E+02
2	-0.73472E+02	-0.59611E+03
3	-0.26499E+02	0.10798E+03
4	-0.12152E+02	-0.83690E+02
5	-0.93150E+02	-0.62771E+03
6	-0.11284E+02	-0.17880E+02
⋮	⋮	⋮
931	-0.46441E+04	0.45239E+04
932	-0.10803E+04	-0.37847E+04
933	-0.14056E+02	-0.27537E+03
934	-0.46405E+04	-0.44525E+04
935	-0.10808E+04	-0.37950E+04
936	-0.14924E+02	-0.29265E+03

은 비대칭 행렬연산을 하기 때문에 계산시간이 많이 걸린다. 이 결과를 Table 7과 Fig. 2에 표시하였다.

5.2 외팔보

중복된 고유치를 갖는 시스템의 예로 Fig. 3의

외팔보를 고려하자. 이 구조물은 200개의 보요소로 모델링하였다. 각 절점은 4자유도(y -변위, z -변위, y -각변위, z -각변위)이기 때문에 한요소는 8자유도이다. 전체 자유도는 800이고, 고유치 문제의 차수는 800×800 이다.

탄성계수는 $2.10 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 이고, 밀도는 $7.85 \times$

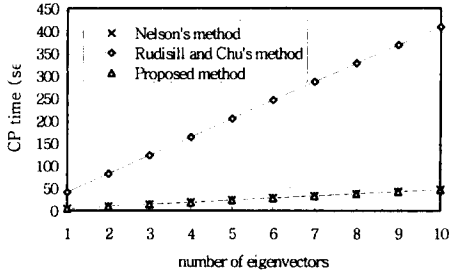
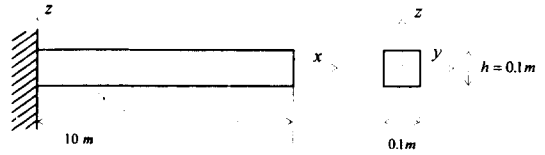


Fig. 2 CP time required to calculate the eigenpair derivatives

10³ kg/m³이다. Poisson비는 0.3이고, 보의 폭과 높이는 모두 0.5 m이다. 설계변수는 보의 높이 h 이다. 고유진동수 10개를 Table 8에 표시하였다. 이 외괄보는 첫번째와 두번째, 세번째와 네번째의 순으로 중복된 고유치를 갖는다.

이 예제의 경우 해석시간은 Dailey 방법과 비교하였다. 10개의 고유쌍 미분을 구하는데, 걸린 시간은 Dailey 방법의 경우 10.1 sec이고, 제안방법은 7.2 sec이다. Dailey 방법은 $n-2$ 차의 선형 대



- Number of nodes : 201
- Number of elements : 200
- Number of degrees of freedom : 800
- Young's modulus : $E=2.10 \times 10^{11}$ N/m²
- Mass density : $\rho=7.85 \times 10^3$ kg/m³

Fig. 3 Cantilever beam with the height t as the design parameter

수방정식과 상수행렬 C 를 계산하는데, 상수행렬을 구하기가 복잡하기 때문에 제안방법에 비해서 계산 시간이 많이 소요된다. 제안방법은 한번의 $n+2$ 차의 선형 대수방정식을 풀므로써 고유치 미분과 모드의 미분을 계산한다. 강성행렬과 질량행렬의 반 띠편역(half bandwidth)이 시스템의 차수에 비하여 작기 때문에 계산시간이 적게 소요되었다. 반 띠편역

Table 8 Central processor seconds required to calculate the first ten eigenpair derivatives.

Method	Operations	CPU time(sec)
Nelson's method	$\lambda_j' = \phi_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j$	5.4
	G_j and f_j	6.1
	where $f_j = -(K' - \lambda_j M') \phi_j + \lambda_j M' \phi_j$	
	$G_j = K - \lambda_j M$	
	$v_j = \bar{D}_j^{-1} \bar{f}_j$	29.5
	$\phi_j' = v_j + c_j \phi_j$	6.3
	TOTAL	47.3
Rudisill and Chu's method	$K_j^* = \begin{bmatrix} K - \lambda_j M & -M \phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix}$	7.3
	$f_{jR-C}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \end{Bmatrix} \phi_j$	6.7
	$\begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = [K_{jR-C}^*]^{-1} f_{jR-C}^*$	391.6
	TOTAL	409.0
Proposed method	$K_j^* = \begin{bmatrix} K - \lambda_j M & -M \phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix}$	7.3
	$f_j = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda_j M') \phi_j \\ 0.5 \phi_j^T M' \phi_j \end{Bmatrix}$	8.4
	$\begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = [K_j^*]^{-1} f_j$	31.1
	TOTAL	409.0

은 7이다. 이 결과를 Table 9와 Fig. 4에 표시하였다.

Dailey 방법은 K' , M' 와 K'' , M'' 을 필요로 하고 제안방법은 K' , M' 만을 필요로 하기 때문에 약

33%의 컴퓨터 메모리를 절약할 수 있다. 이 경우에 제안방법의 해석시간을 1로 했을 때, Dailey 방법은 1.40이다. 제안방법은 Dailey방법에 비해서 약 30%의 CUP 시간을 절약할 수 있다.

Table 9 The first ten eigenvalues and their derivatives with respect to the height of the cantilever beam

Eigenvalue number	Eigenvalues	Eigenvalue derivatives
1	0.68832E+03	0.36816E-03
2	0.68832E+03	0.27533E+04
3	0.26878E+05	0.35625E-04
4	0.26878E+05	0.10751E+06
5	0.20879E+06	0.25249E-03
6	0.20879E+06	0.83514E+06
7	0.79110E+06	0.10139E-02
8	0.79110E+06	0.31644E+07
9	0.21252E+07	0.60538E-03
10	0.21252E+07	0.85006E+07

Table 10 Some components of the third and fourth mode shape derivatives with respect to the height of the cantilever beam

Equation number	Third mode shape derivative	Fourth mode shape derivative
1	-0.38813E-05	0.00000E-00
2	0.00000E-00	-0.38813E-05
3	0.00000E-05	0.15463E-03
4	-0.15463E-03	-0.00000E-00
5	-0.15401E-04	0.00000E-00
6	0.00000E-00	-0.15401E-04
7	-0.00000E-00	0.30553E-03
⋮	⋮	⋮
794	0.00000E-00	0.13878E-01
795	0.00000E-00	-0.68112E-02
796	0.68112E-02	0.00000E-00
797	0.14219E-01	0.00000E-00
798	0.00000E-00	0.14219E-01
799	0.00000E-00	-0.68111E-02
800	0.68112E-02	0.00000E-00

Table 11 Central processor seconds required to calculate the first ten eigenpair derivatives

Method	Operations	CPU time(sec)
Dailey's method	Z (adjacent eigenvectors)	1.5
	\bar{G} and \bar{F}	2.3
	$V = \bar{G}^{-1} \bar{F}$	1.8
	$c_{ij} = \begin{cases} r_{ij} / (\lambda'_j - \lambda'_i) \\ 0.5q_{ij} \end{cases}$	4.4
	where, $Q = -V^T M Z - Z^T M V - Z^T M' Z$ $R = Z^T (K' - \lambda M') V - Z^T (M' Z + M V) \Lambda'$ $+ 0.5 Z^T (K'' - \lambda M'') Z$	
	$Z' = V + ZC$	0.1
	TOTAL	10.1
Proposed method	Z (adjacent eigenvectors)	1.5
	$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix}$	1.3
	$P = \begin{bmatrix} -(K' - \lambda M') Z \\ 0.5 Z^T M' Z \end{bmatrix}$	1.8
	$\begin{bmatrix} Z' \\ \Lambda' \end{bmatrix} = K^{*-1} P$	2.6
	TOTAL	7.2

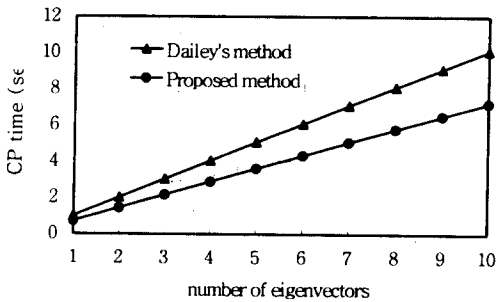


Fig. 4 CP time required to calculate the eigenpair derivatives

예제를 통하여 각각의 경우에 제안방법의 효율성을 증명하였다. 제안방법은 서로 다른 고유치 문제 뿐만 아니라 중복된 고유치 문제에도 적용될 수 있음을 보였다.

6. 결 론

본 논문에서 고유치의 미분들을 구하는 수치적으로 안정한 수치해석기법을 제안하였다. 제안방법은 최종 결론식의 계수행렬이 대칭이고, 선형 대수방정식을 풀기 때문에 기존의 FEM 상용코드에 무리

없이 적용할 수 있다. 더구나, 대칭행렬은 band 형태나 sky-line 형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산시간이 절약된다. 무엇보다도 중요한 것은 수치적 안전성의 증명이 가능하고, 알고리즘이 대단히 간단하다는 것이다.

참고문헌

- (1) Rudisill, C. S. and Chu, Y., 1975, "Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA J.*, Vol. 13, pp. 834~837.
- (2) Nelson, R. B., 1976, "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives," *AIAA J.*, Vol. 14, pp. 1201~1205.
- (3) Ojalvo, I. U., 1986, "Efficient Computation of Mode-shape Derivatives for Large Dynamic Systems," *AIAA J.*, Vol. 25, pp. 1386~1390.
- (4) Ojalvo, I. U., 1988, "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 361~366.
- (5) Mills-Curran, W. C., 1988, "Calculation of

- Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues," *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 867~871.
- (6) Dailey, R. L., 1989, "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues," *AIAA J.*, Vol. 27, pp. 486~491.
- (7) Zhong, W. and Cheng, G., 1986, "Second-order Sensitivity Analysis of Multimodal Eigenvalues and Related Optimization Techniques," *J. of Structural Mechanics*, Vol. 14, pp. 421~436.
- (8) Bernard, M. L. and Bronowicki, A. J., 1994, "Modal Expansion Method for Eigensensitivity with Repeated Roots," *AIAA J.*, Vol. 32, pp. 1500~1506.
- (9) Lim, K. B., Juang, J.-N. and Ghaemmaghami, P., 1989, "Eigenvector Derivatives of Repeated Eigenvalues Using Singular Value Decomposition," *J. Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, pp. 282~283.
- (10) Fox, R. L. and Kapoor, M. P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA J.*, Vol. 6, pp. 2426~2429.
- (11) Juang, J. N., Chaemmaghami, P. and Lim, K. B., 1989, "Eigenvalue and Eigenvector Derivatives of a Nondefective Matrix," *J. Guidance, Control Dynamics*, Vol. 12, pp. 480~486.
- (12) Wang, B. P., 1985, "Improved Approximate Method for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," *AIAA J.*, Vol. 29, pp. 1018~1020.
- (13) Lim, K. B., Junkins, J. L. and Wang, B. P., 1987, "Re-examination of Eigenvector Derivatives," *J. of Guidance*, Vol. 10, pp. 581~587.
- (14) Liu, Z. S., Chen, S. H. and Zhao, Y. Q., 1994, "An Accurate Method for Computing Eigenvector Derivatives for Free-Free Structures," *Computers and Structures*, Vol. 52, pp. 1135~1143.
- (15) Haftka, R. T. and Adelman, H. M., 1989, "Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis," *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 137~151.
- (16) Sutter, T. R., Camarda, C. J., Walsh, J. L. and Adelman, H. M., 1988, "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives," *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 1506~1511.
- (17) Andrew, A. L., 1978, "Convergence of an Iterative Method for Derivatives of Eigensystems," *J. of Comput. Phys.*, Vol. 26, pp. 107~122.
- (18) Tan, R. C. E., 1987, "Computing Derivatives of Eigensystems by the Vector ϵ -algorithm," *IMA J. Num. Analysis*, Vol. 7, pp. 484~495.
- (18) Tan, R. C. E., 1987, "Computing Derivatives of Eigensystems by the Vector ϵ -algorithm," *IMA J. Num. Analysis*, Vol. 7, pp. 484~495.
- (19) Yoon, B. G. and Belegundu A. D., 1988, "Iterative Methods for Design Sensitivity Analysis," In: Barthelemy, J.-F.(ed.) *Proc. 2nd NASA/Air Force Symp. on Recent Experiences on Multidisciplinary analysis and Optimization*, NASA CP-3031, Vol. 2, pp. 713~726.
- (20) Lee, I. W. and Jung, G. H., "Numerical Method for Sensitivity Analysis of Eigensystems with Nonrepeated and Repeated Eigenvalues," *Journal of Sound and Vibration*, (to be published).
- (21) 정길호, 정형조, 이인원, 1995, "고유치 문제의 민감도를 구하기 위한 효율적인 수치해석기법," 대한기계학회 동역학 및 제어부문 학술대회 논문집, pp. 11~16.
- (22) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- (23) Lee, I. W. and Robinson, A. R., 1979, "Solution Techniques for Large Eigenvalue Problems in Structural Dynamics," *Structural Research Series No. 462*, University of Illinois at Urbana Champaign.