

〈논 문〉

# 탄성 다물체계에 대한 조인트좌표 공간에서의 역동역학 해석

이 병 훈\*

(1996년 10월 1일 접수)

## Inverse Dynamic Analysis of Flexible Multibody System in the Joint Coordinate Space

Byung Hoon Lee

**Key Words:** Flexible Multibody System(탄성 다물체계), Inverse Dynamics(역동역학), Inverse Velocity Transformation(역속도변환), Actuating Force(구동력), Joint Reaction Force(조인트 반력)

### Abstract

An inverse dynamic procedure for spatial multibody systems containing flexible bodies is developed in the relative joint coordinate space. Constraint acceleration equations are derived in terms of relative coordinates using the velocity transformation technique. An inverse velocity transformation operator, which transforms the Cartesian velocities to the relative velocities, is derived systematically corresponding to the types of kinematic joints connecting the bodies and the system reference matrix. Using the resulting matrix, the joint reaction forces and moments are analyzed in the Cartesian coordinate space. The formulation is illustrated by means of two numerical examples.

### 1. 서 론

다물체계의 운동을 해석하는데 있어서 운동방정식의 유도는 좌표의 선택에 따라 직교좌표(Cartesian coordinates) 또는 상대 조인트좌표(relative joint coordinates)를 사용하는 2가지 경우로 구분할 수 있다. 직교좌표를 사용하는 경우,<sup>(1,2)</sup> 시스템 운동방정식의 유도가 간단하고 각 물체들의 연결관계를 나타내는 기구학적 구속조건을 쉽게 결합시킬 수 있다. 그러나 이 방법으로는 물체들 사이의 상대운동을 직접 구할 수 없으므로 시스템의 제어에 적용하는 데에는 난점이 있다. 또한 시스템을 구성하는 물체의 수가 많아지면 운동방정식과

조인트에 따르는 구속조건식의 수가 많아지므로 시뮬레이션 과정에서 운동방정식의 적분 및 구속조건을 만족시키기 위한 계산량이 많이 요구된다. 반면에 상대좌표를 사용하여 운동방정식을 기술하는 경우,<sup>(3,4)</sup> 최소의 미분방정식 및 대수방정식을 얻게 되므로 효율적인 수치적분을 할 수 있으나 운동방정식의 유도는 직교좌표의 경우보다 복잡하고 구속조건을 포함시키는데 어려움이 있어 일반적이고 체계적인 프로그램을 개발하는 데에 어려움이 있다.

한편 외력에 대한 시스템의 운동을 해석하는 정동역학(forward dynamics) 문제외에 시스템의 제어 또는 부재의 설계를 위하여 주어진 궤적에 대한 구동력 및 조인트에 작용하는 반력을 구하는 역동역학(inverse dynamics) 해석 알고리즘의 개발이 필요하다. 시스템의 기구학적 조인트 또는 특정한 구동을 나타내는 구속조건은 비선형 대수방정식으

\*회원, 부산대학교 기계공학과

로 기술되며, 라그랑지승수법을 이용하여 운동방정식에 결합된다. 이때 라그랑지승수와 구속조건의 야코비안행렬로부터 시스템의 일반좌표에 따른 일반구속력을 얻을 수 있으나 시스템좌표가 직교좌표인 경우 이 힘들은 실제 조인트 반력 또는 구동력은 아니다. Shabana<sup>(6)</sup>는 탄성체를 포함하는 다물체계에서 직교좌표 공간에서의 구속력 벡터로부터 실제 조인트 반력(모멘트)을 구하는 과정을 유도하였다. 상대 조인트좌표를 일반좌표로 사용하는 경우 구동조건에 대한 각 조인트의 실제 구동력(토크)은 구속조건식을 결합한 운동방정식으로부터 직접 구할 수 있는 잇점이 있으므로 시스템의 운동제어에 효과적이다. 그러나 폐쇄계(closed-loop systems)의 절단조인트를 제외한 모든 조인트의 기구학적 구속조건이 운동방정식에 결합되지 않으므로 조인트 반력은 시스템의 운동을 해석한 후 직교좌표 공간에서 말단물체(tree-end body)로부터 내향경로(inward path)를 따라 순차적으로 구하여야 하며 이러한 과정에 대한 연구는 아직 수행된 바 없다.

그러므로 본 연구에서는 탄성체를 포함하는 공간 운동 다물체계에 부가되는 구동조건에 대한 실제 구동력을 상대 조인트좌표 공간에서 해석하는 역동역학 해석 알고리즘을 개발한다. 직교좌표로 표현된 구속조건식의 가속도식을 속도변환기법(velocity transformation technique)<sup>(6)</sup>을 이용하여 상대좌표 공간에서 유도한 후 운동방정식과 결합하여 구동력을 해석한다. 그리고 시스템의 직교속도벡터를 상대속도벡터로 변환하는 역속도변환행렬(inverse velocity transformation matrix)을 물체들을 연결하는 기구학적 조인트 유형 및 시스템의 기준행렬<sup>(4)</sup>에 따라 체계적으로 구성하는 방법을 제시하고, 이 행렬을 이용하여 각 조인트에 작용하는 반력을 직교좌표 공간에서 해석한다. 제시된 역동역학 해석 방법의 타당성을 평면 및 공간운동 매니플레이터의 해석을 통하여 확인한다.

## 2. 운동방정식

탄성체  $i$ 상의 임의점의 관성좌표계에 대한 위치는 이 물체에 설정한 이동좌표계 원점의 관성좌표계에 대한 위치좌표  $r^i$ , 이동좌표계의 자세를 나타내는 오일러 매개변수  $p^i (= [p_0^i \ p_1^i \ p_2^i \ p_3^i]^T)$  및 이동좌표계에 대한 탄성체의 변형모드좌표  $a^i$ 로 나타

낼 수 있다. 따라서 물체  $i$ 의 직교좌표벡터  $x^i$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$x^i = [r^{iT} \ p^{iT} \ a^{iT}]^T \quad (1)$$

물체수가  $N_0$ 인 시스템의 직교좌표벡터  $x$ 는 다음과 같다.

$$x = [x^{1T}, x^{2T}, \dots, x^{N_0 T}]^T \quad (2)$$

물체  $i$ 의 상대좌표  $q^i$ 는 그 물체의 기준물체(reference body)와의 조인트에서의 상대적 회전각 및 병진거리로 정의되며, 조인트 유형에 따라 운동형태 및 자유도수가 결정된다. 그리고 기초물체(base body)의 상대좌표는 그 물체의 직교좌표로서 정의한다. 본 연구에서는 탄성체  $i$ 의 일반좌표(generalized coordinates)  $q^{i*}$ 를 이와같이 정의되는 상대좌표  $q^i$  및 모드좌표  $a^i$ 의 집합으로서 다음과 같이 정의한다.

$$q^{i*} = [q^{iT} \ a^{iT}]^T \quad (3)$$

시스템의 일반좌표벡터  $q^*$ 는 다음과 같다.

$$q^* = [q^{1*T}, q^{2*T}, \dots, q^{N_0 * T}]^T \quad (4)$$

일반적으로 직교속도(Cartesian velocities)는 다음과 같이 일반좌표 및 일반속도(generalized velocities)의 항으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x} = S(q^*) \dot{q}^* \quad (5)$$

여기서,  $S$ 는 시스템의 일반속도벡터를 직교속도벡터로 변환시키는 속도변환행렬<sup>(7)</sup>이며,  $(\cdot)$ 는 시간에 대한 미분을 뜻한다. 위의 식 (5)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 가속도 변환식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x} = S \ddot{q}^* + \dot{S} \dot{q}^* \quad (6)$$

여기서,  $(\dot{\cdot})$ 은 시간에 대한 2차 미분을 뜻한다. 라그랑지방정식과 속도 및 가속도변환식 (5), (6)을 이용하여 탄성체를 포함하는 다물체계의 운동방정식을 일반좌표로 유도한 결과<sup>(7)</sup>는 다음과 같다.

$$M^* \ddot{q}^* = Q^* - \Phi_q^T \lambda \quad (7)$$

여기서,

$$M^* = S^T M S \quad (8)$$

$$Q^* = S^T [F - M \dot{S} \dot{q}^* - Kx - M \dot{x} + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)^T] \quad (9)$$

여기서,  $M$ 과  $K$ 는 각각 시스템의 질량 및 강성 행렬,  $T$ 는 운동에너지,  $F$ 는 직교좌표 공간에서의 외력벡터,  $\Phi_{,q}$ 는 구속조건식( $\Phi=0$ )의 야코비안행렬,  $\lambda$ 는 구속조건에 따른 라그랑지승수이다.

구속조건식의 2차 시간미분과 운동방정식 (7)을 결합하면, 다음과 같은 행렬형이 된다.

$$\begin{bmatrix} M^* & \Phi_{,q}^T \\ \Phi_{,q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^* \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$\gamma = -\dot{\Phi}_{,q} \dot{q}^* - \dot{\Phi}_t \quad (11)$$

이며,  $\Phi_t \equiv \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$ 이다.

식 (10)으로부터 시스템의 일반좌표 공간에서의 운동 및 구속력을 구할 수 있으며, 속도 및 가속도 변환식을 이용하여 절대운동으로 변환시킬 수 있다.

### 3. 직교력 및 일반력

Fig. 1에 보인 바와 같이 물체  $i$ 상의 임의의 점  $P^{ki}$ 에 작용하는 힘  $f^{ki}$ 와 모멘트  $n^{ki}$ 를 직교좌표 공간에서의 힘벡터  $F^i$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$F^i = \begin{bmatrix} f^{ki} \\ 2E^{iT} s^{ki} f^{ki} + 2E^{iT} n^{ki} \\ (A^i \phi_t^{ki})^T f^{ki} + (A^i \phi_r^{ki})^T n^{ki} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,  $s^{ki}$ 는  $x^i y^i z^i$  좌표계 원점에서 점  $P^{ki}$ 의 위치벡터,  $\phi_t^{ki}$  및  $\phi_r^{ki}$ 는 각각 물체  $i$ 의 모드행렬로부터 점  $P^{ki}$ 의 병진변위와 회전변위 성분을 뽑아낸 행렬,  $A^i$ 는  $x^i y^i z^i$  좌표계로부터 관성좌표계로의 좌표변환행렬이며,  $E^i$ 는 다음과 같이 오일러 배개 변수  $\beta^i$ 의 요소로 정의되는  $(3 \times 4)$  행렬이다.

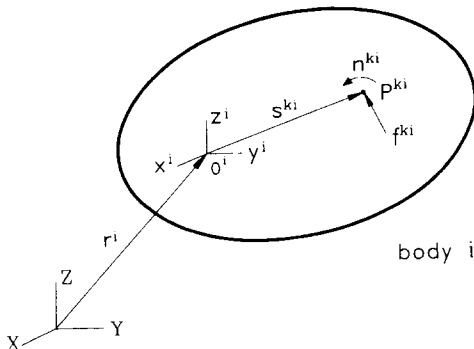


Fig. 1 External forces acting on body  $i$

$$E^i = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ -\beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

시스템에 작용하는 모든 힘과 모멘트의 직교력 (Cartesian force) 벡터  $F$ 는 다음과 같다.

$$F = [F^{1T} \ F^{2T} \ \dots \ F^{NbT}]^T \quad (14)$$

이 힘벡터로부터 조인트의 상대자유도에 따른 일반좌표 공간에서의 힘, 즉 일반력 (generalized force) 벡터  $Q$ 는 속도변환행렬  $S$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>(7)</sup>

$$Q = S^T F \quad (15)$$

한편 일반력은 다음의 과정을 통하여 직교좌표 공간에서의 힘으로 변환될 수 있다. 일반력  $Q$ 의 시스템에 대한 가상일  $\delta W$ 는 다음과 같다.

$$\delta W = Q^T \delta q^* \quad (16)$$

여기서,  $\delta q^*$ 는 일반좌표의 가상변위이며, 직교좌표 가상변위  $\delta x$ 와 다음과 같은 관계를 가진다.<sup>(4)</sup>

$$\delta q^* = \frac{\partial q^*}{\partial x} \delta x = \frac{\partial q^*}{\partial \dot{x}} \dot{\delta x} = R \delta \dot{x} \quad (17)$$

여기서,  $R$ 를 역속도변환행렬 (inverse velocity transformation matrix)로 정의하며, 다음 절에서 유도한다.

식 (17)을 이용하면, 식 (16)은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W = Q^T R \delta \dot{x} = (R^T Q)^T \delta \dot{x} = F_{eq}^T \delta \dot{x} \quad (18)$$

여기서,

$$F_{eq} = R^T Q \quad (19)$$

로 주어지며, 일반력에 대한 등가직교력 (equivalent Cartesian force)으로 정의한다.

### 4. 역속도변환

기구학적 조인트로 연결된 두 물체사이의 상대운동은 그 물체들의 절대운동으로부터 구할 수 있다. Fig. 2에서 탄성체  $i$ 의 이동좌표계 원점의 절대속도  $v^i$  및 좌표계의 각속도  $\omega^i$ 는 그 기준물체  $j$ 의 속도와 다음과 같은 관계를 가진다.<sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} v^i &= v^j + \tilde{\omega}^j s^{ij} + A^i \phi_t^{ij} \dot{a}^j + \sum_k \in_{kqk}^i \dot{q}_k^i c_k^i + \tilde{\omega}^i d^{ii} \\ &\quad - A^i \phi_t^{ij} \dot{a}^j - \sum_k \in_{kqk}^i \dot{q}_k^i c_k^i A^i \phi_r^{ij} \dot{a}^j \end{aligned} \quad (20)$$

$$\omega^i = \omega^j + A^j \phi_r^j \dot{a}^j + \sum_k (1 - \in_k^i) \dot{q}_k^i e_k^i - A^i \phi_r^i \dot{a}^i \quad (21)$$

여기서,  $e_k^i$ 는 조인트축 방향의 단위벡터,  $k$ 는 다자유도 조인트에 대한 지칭,  $\tilde{\omega}^i$ 는  $\omega^i = [\omega_x^i, \omega_y^i, \omega_z^i]^T$ 의 요소로 정의되는  $(3 \times 3)$  행렬<sup>(8)</sup>이며,  $d^{ii}$  및  $\in_k^i$ 는 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{\omega}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^i & \omega_y^i \\ \omega_z^i & 0 & -\omega_x^i \\ -\omega_y^i & \omega_x^i & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$d^{ii} = -s^{ji} + \sum_k \in_k^i q_k^i e_k^i \quad (23)$$

$$\in_k^i = \begin{cases} 0, & \text{if } q_k^i \text{ is a rotational joint coordinate} \\ 1, & \text{if } q_k^i \text{ is a translational joint coordinate} \end{cases} \quad (24)$$

물체  $i$ 의 기준물체에 대한 상대속도  $\dot{q}_k^i$ 는 식 (20)과 (21)로부터 연결된 조인트에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{q}_k^i = \begin{cases} (\omega^i - \omega^j + A^j \phi_r^j \dot{a}^j - A^i \phi_r^i \dot{a}^i)^T e_k^i & \text{for rotational joint} \\ (v^i - v^j - \tilde{\omega}^j d^{ij} + A^j \phi_r^j \dot{a}^j + q_k^i \tilde{e}_k^i A^i \phi_r^i \dot{a}^i - \tilde{\omega}^j s^{ij} - A^j \phi_r^j \dot{a}^j)^T e_k^i & \text{for translational joint} \end{cases} \quad (25)$$

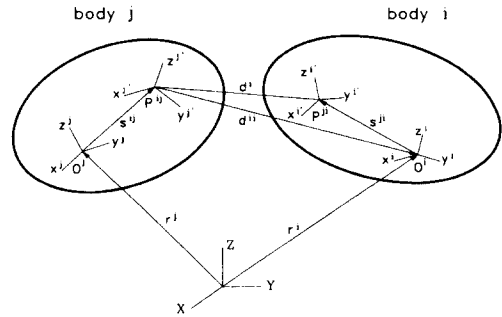


Fig. 2 Two contiguous bodies connected by a joint

그러므로 물체  $i$ 의 일반속도벡터  $\dot{q}^{i*}$ 는 다음과 같은 행렬형으로 표현될 수 있다.

$$\dot{q}^{i*} = \begin{bmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{a}^i \end{bmatrix} = R_{ij} \dot{x}^j + R_{ii} \dot{x}^i \quad (26)$$

여기서,  $R_{ij}$ 와  $R_{ii}$ 는 블록행렬로서 물체  $i$ 가 기준물체  $j$ 에 연결된 조인트 유형에 따라 Table 1과 같이 정리할 수 있다.

Table 1에서  $I_m$ 은 크기가  $(m \times m)$ 인 단위행렬이며  $m$ 은 모드좌표수를 뜻한다.

$i=1, 2, \dots, N_b$ 에 대한 식 (26)을 모두 결합하면 다음과 같은 형태의 역속도변환식을 얻을 수 있다.

$$\dot{q}^* = R \dot{x} \quad (27)$$

여기서,  $R$ 은 시스템의 직교속도벡터  $\dot{x}$ 를 일반속도벡터  $\dot{q}^*$ 로 변환하는 역속도변환행렬로서 시스

Table 1 Block matrix  $R_{ij}$  and  $R_{ii}$  corresponding to the connection type of the  $i$ -th body

Joint	$R_{ij}$	$R_{ii}$
Base body		$\begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$
Revolute joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2e_1^T E^j & -e_1^T A^j \phi_r^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e_1^T E^i & e_1^T A^i \phi_r^i \end{bmatrix}$
Universal joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2e_1^T E^j & -e_1^T A^j \phi_r^j \\ 0 & -2e_2^T E^j & -e_2^T A^j \phi_r^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e_1^T E^i & e_1^T A^i \phi_r^i \\ 0 & 2e_2^T E^i & e_2^T A^i \phi_r^i \end{bmatrix}$
Spherical joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2e_1^T E^j & -e_1^T A^j \phi_r^j \\ 0 & -2e_2^T E^j & -e_2^T A^j \phi_r^j \\ 0 & -2e_3^T E^j & -e_3^T A^j \phi_r^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e_1^T E^i & e_1^T A^i \phi_r^i \\ 0 & 2e_2^T E^i & e_2^T A^i \phi_r^i \\ 0 & 2e_3^T E^i & e_3^T A^i \phi_r^i \end{bmatrix}$
Translational joint	$\begin{bmatrix} -e^{iT} & 2e^{iT} \tilde{s}^{ij} E^j & -e^{iT} A^j \phi_r^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{iT} & 2e^{iT} \tilde{d}^{ii} E^i & e^{iT} A^i \phi_r^i \end{bmatrix}$
Cylindrical joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2e^{iT} E^j & -e^{iT} A^j \phi_r^j \\ -e^{iT} & 2e^{iT} \tilde{s}^{ij} E^j & -e^{iT} A^j \phi_r^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e^{iT} E^i & e^{iT} A^i \phi_r^i \\ e^{iT} & 2e^{iT} \tilde{d}^{ii} E^i & e^{iT} A^i \phi_r^i \end{bmatrix}$

템의 기준행렬(reference matrix)<sup>(4)</sup>에 따라 체계적으로 구성할 수 있다.

### 5. 구동력 및 조인트반력

구속조건에는 폐쇄계의 조인트 절단에 따르는 기구학적 구속 및 조인트 구동, 물체상의 임의점의 위치구동 또는 물체의 자세구동 등의 구동구속조건이 있다. 이러한 구속조건은 상대좌표 또는 직교좌표의 함수로 기술되는 두가지 형태로 구분할 수 있는데 상대좌표로 기술된 경우에는 앞에서 정의한 일반좌표 공간에서 구속조건을 가속도식 유도가 간단하므로 본 논문에서는 다음과 같이 직교좌표로 기술된 구속조건에 대하여 구동력 및 조인트 반력을 해석한다.

$$\Phi = \Phi(x, t) = 0 \tag{28}$$

구속조건을 만족시키는 시스템의 운동을 해석하기 위하여 구속조건에 대한 가속도식을 구하여 식(7)의 운동방정식과 결합하여 풀게 된다.

이때 구속조건을 가속도식은 운동방정식과 마찬가지로 일반좌표 공간에서 기술되어야 하며 속도변환행렬 S와 그 시간미분행렬  $\dot{S}$ 를 이용하면 각각 다음과 같이 유도된다.

$$\Phi_{,q} \ddot{q}^* = \gamma \tag{29}$$

여기서,

$$\Phi_{,q} = \Phi_x S \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -\dot{\Phi}_x \dot{x} - \dot{\Phi}_t + \Phi_x \dot{S} \dot{q}^* \\ &= -(\Phi_x \dot{x})_x \dot{x} - 2\Phi_{xt} \dot{x} - \Phi_{tt} - \Phi_x \dot{S} \dot{q}^* \end{aligned} \tag{31}$$

한편 주어진 운동을 일으키는 구동력은 구속조건이 부가되는 물체나 물체들을 연결하는 조인트에 가해질 수 있다. 이때 구동력을 작용시키는 위치에 따라 그 형태와 크기가 다르며 따라서 조인트에 작용하는 반력도 다르게 된다.

구동력이 물체에 작용하는 경우, 이 힘의 직교력 벡터는  $\Phi_{,i}^T \lambda$ 로서 정동역학 해석과정에서 구할 수 있으며 다음 식으로부터 물체 i의 임의점 P<sup>ki</sup>에 작용하는 실제 구동력 f<sub>a</sub><sup>i</sup> 및 구동토크 n<sub>a</sub><sup>i</sup>를 구할 수 있다.

$$\Phi_{,i}^T \lambda = \begin{bmatrix} f_a^i \\ 2E^{iT} \bar{s}^{ki} f_a^i + 2E^{iT} n_a^i \\ (A^i \phi^{ki})^T f_a^i + (A^i \phi^{ki})^T n_a^i \end{bmatrix} \tag{32}$$

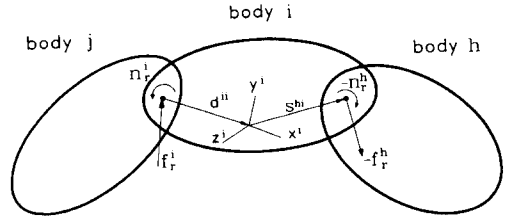


Fig. 3 Joint reaction forces acting on body i

그리고 조인트에 작용하는 구동력의 일반력벡터는  $\Phi_{,i}^T \lambda$ 로 주어지며, 이 힘은 각 조인트에 걸리는 실제 구동력을 의미한다. 물체 i의 조인트에는 그 조인트의 자유도에 따라서 크기가  $\Phi_{,i}^T \lambda$ 인 구동력 또는 구동토크가 작용하게 된다. 이 조인트 구동력을 직교좌표 공간에서의 등가직교력으로 변환시키면 식(19)에 따라  $R^T \Phi_{,i}^T \lambda$ 가 된다.

조인트반력을 해석하기 위하여 Fig. 3과 같이 조인트로 연결되어 이웃하는 세물체를 고려한다. 물체 j와 h는 각각 물체 i의 내향경로 및 외향경로(outward path)상의 물체들이다. 직교좌표 공간에서 물체 i의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M^i \ddot{x}^i = F_a^i + F_r^j + F_r^h - K^i x^i - \dot{M}^i \dot{x}^i + \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{x}^i} \right)^T \tag{33}$$

여기서, M<sup>i</sup>는 질량행렬, T<sup>i</sup>는 운동에너지, F<sub>a</sub><sup>i</sup>는 구동력의 직교력벡터, F<sub>r</sub><sup>j</sup>는 물체 h 및 j와의 조인트에 작용하는 조인트 반력의 직교력벡터, F<sub>r</sub><sup>h</sup>는 그 외의 외력에 대한 직교력벡터이며 조인트 반력벡터는 다음과 같다.

$$F_r^i = \begin{bmatrix} (1 - \delta_{ji}) f_r^j - (1 - \delta_{Ni}) f_r^h \\ (1 - \delta_{ji}) [2E^{iT} (-\bar{d}^{ji} f_r^j) + 2E^{iT} n_r^j] \\ - (1 - \delta_{Ni}) [2E^{iT} \bar{s}^{hi} f_r^h + 2E^{iT} n_r^h] \\ (1 - \delta_{ji}) [(A^i \phi^{ji})^T f_r^j + (A^i \phi^{ji})^T n_r^j] \\ - (1 - \delta_{Ni}) [(A^i \phi^{hi})^T f_r^h + (A^i \phi^{hi})^T n_r^h] \end{bmatrix} \tag{34}$$

여기서, f<sub>r</sub><sup>j</sup>, n<sub>r</sub><sup>j</sup>는 기준물체 j와의 조인트에서 물체 i에 작용하는 반력 및 반작용모멘트이다. 또한  $\delta_{ji}$  및  $\delta_{Ni}$ 의 하첨자 1과 N<sub>0</sub>는 각각 기초물체(base body)와 말단물체 번호이며,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta이다.

시스템의 절대운동을 해석한 후 각 조인트에 걸리는 조인트 반력을 말단물체로부터 내향경로를 따라 순차적으로 계산하게 되며, 물체 i에 작용하는

반력(모멘트)  $f_i^j$  및  $n_i^j$ 는 식 (33), (34)로부터 구할 수 있다.

앞에서 구한 조인트 반력 및 모멘트의 조인트에 설정한 좌표계에서의 성분  $f_i^{j''}$ ,  $n_i^{j''}$ 은 각각 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_i^{j''} = B^{jiT} A^{iT} f_i^j \quad (35)$$

$$n_i^{j''} = B^{jiT} A^{iT} n_i^j \quad (36)$$

여기서,  $B^{ji}$ 는  $x^i y^i z^i$  좌표계에서  $x^i y^i z^i$  좌표계의 좌표변환행렬로서 다음과 같이 표현된다.

$$B^{ji} = I_3 + \bar{\epsilon}^{ji'} \quad (37)$$

여기서,  $\bar{\epsilon}^{ji'}$ 은  $x^i y^i z^i$  좌표계의  $x^i y^i z^i$  좌표계 주위의 미소 회전각벡터로서 모드행렬과 모드좌표로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\epsilon}^{ji'} = [\epsilon_x^{ji'} \quad \epsilon_y^{ji'} \quad \epsilon_z^{ji'}]^T = (\phi_i^j a^i) \quad (38)$$

이때 조인트 반력(모멘트)은 조인트 자유도 방향의 성분은 없으므로 다음의 관계가 성립한다.

$$e_k^{i''T} n_i^{j''} = 0 \quad \text{for rotational joint} \quad (39)$$

$$e^{i''T} f_i^{j''} = 0 \quad \text{for translational joint} \quad (40)$$

여기서,  $e_k^{i''}$ 은 조인트 좌표계상에서의 조인트축 방향의 단위벡터이다.

## 6. 수치예제

앞에서 제시된 탄성 다물체계에 대한 조인트좌표 공간에서의 역동역학 해석방법의 타당성을 보이기 위하여 구동조건을 가지는 두개의 매니플레이터 운동을 해석하였다.

### 6.1 평면운동 매니플레이터

Fig. 4는 두개의 아암이 회전조인트로 연결된 평면 매니플레이터이다. 각 물체의 질량은 100 kg, 길이는 2 m이며, 탄성체로 가정한 물체 2의 강성  $EI_z = 1.63 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 이다. 탄성체의 변형모드로 8개의 보요소 (beam element)로 등분한 유한요소모델로부터 처음 두개의 외팔보 모드를 취하였다. 이

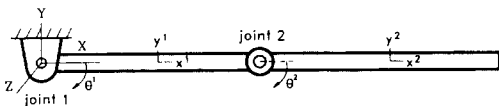


Fig. 4 A double link system with a joint constraint

시스템의 일반좌표는 각 조인트의 상대회전각  $\theta^1$ ,  $\theta^2$  및 탄성체의 모드좌표이다. 초기 수평위치 ( $\theta^1 = 0$ )에서 정지상태로부터 놓으면 시스템은 아래쪽으로 작용하는 중력에 의하여 조인트 1의 축주위로 회전하게 된다. 이때 조인트 2에 두 물체의 상대회전이 없도록 구속조건 ( $\theta^2 = 0$ )을 주어 시뮬레이션하였다.

역동역학 해석을 통하여 이러한 구속조건을 만족

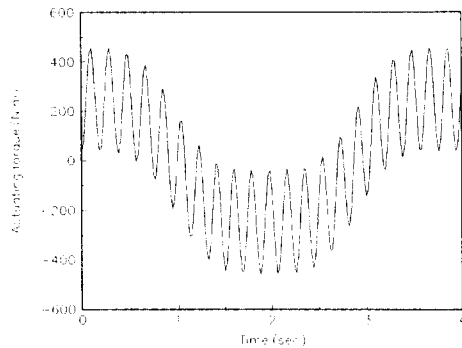


Fig. 5 Actuating torque at joint 2

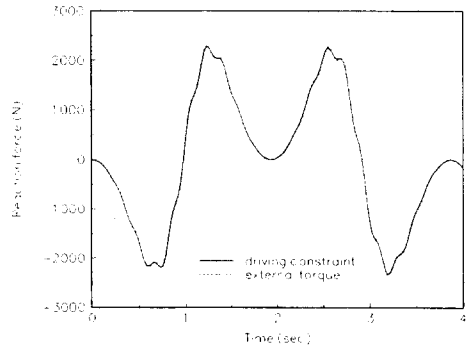


Fig. 6 Joint reaction force in X-direction

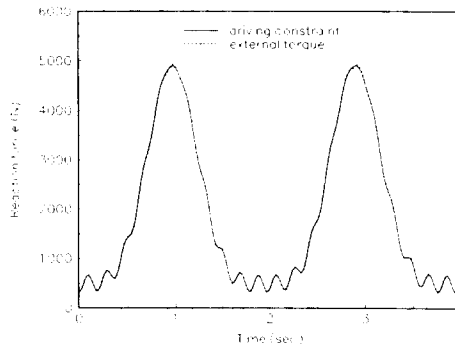


Fig. 7 Joint reaction force in Y-direction

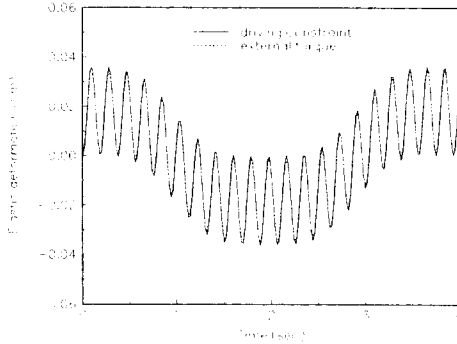


Fig. 8 Tip deflection of the system

하기 위해 조인트 2에 필요한 구동토크는 Fig. 5와 같이 나타났다. Fig. 6~Fig. 8에서는 조인트 2에 구속조건을 부가했을 경우 조인트 1에 걸리는 반력의 X, Y방향 성분 및 물체 2의 끝점의 탄성 변형량이 Fig. 5와 같이 구한 구동토크를 외력으로 조인트 2에 가하여 해석한 결과들과 잘 일치하고 있음을 보여준다. 또한 물체 2도 강체로 취급하면 단진자 운동을 하는 이 시스템의 조인트 반력이 엄밀해와 일치함을 확인하였다.

6.2 공간운동 매니퓰레이터

다섯개의 아암이 회전조인트로 연결되어 있고, 위치구동조건이 주어지는 매니퓰레이터에 대한 역동역학 해석을 수행하였다. Fig. 9에서 물체 4는 내경 4 cm, 외경 6 cm인 탄성을 가진 관형보이며 탄성계수는  $2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 이다. 그리고 나머지 물체는 모두 강체로 가정하였으며, 각 물체의 치수와 변형전 물성치는 Table 2에 있다. 탄성보의 변형을 해석하기 위하여 8개의 보요소로 구성된 유한요소 모델에 경계조건으로 왼쪽 끝 절점에서는 y축

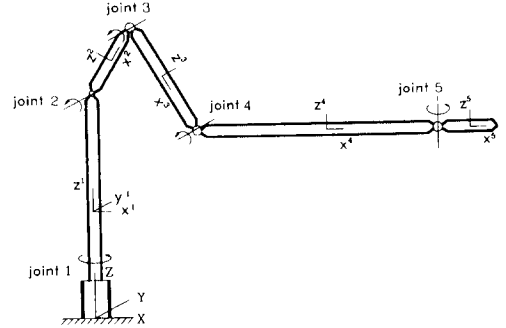


Fig. 9 A spatial manipulator with position drivers

주위의 회전을 제외한 나머지 변위 및 회전을 0으로 하고 오른쪽 끝 절점에서는 z방향의 변위만을 0으로 하였다. 보의 변형은 처음 두 모드, 즉 xy면에서의 외팔보 모드와 xz면에서의 단순지지 굽힘 모드를 취하여 표현하였다. 이 시스템에는 물체 5의 자세를 일정하게 유지하면서 끝점이 일정한 속도( $0.6 \pi \text{ m/sec}$ )로 반경 0.3 m의 원운동을 하도록 직교좌표로 표현되는 5개의 위치구동조건을 주어 시뮬레이션하였다.

Fig. 10은 식 (10)으로부터 얻어지는 구동력의 일반력벡터  $\Phi_{q_i}^T \lambda$ 에서 조인트 2, 3 및 4에 걸리는 구동토크를 보여준다. 이것은 물체 5의 수평자세를 유지시켜 주기 위한 토크로서 물체 4의 xz면에서의 탄성변형 및 중력의 영향에 의하여 상당히 큰 폭으로 변화하고 있다. Fig. 11에서는 물체 5의 끝점의 궤적이 시스템에 위치구속조건을 가하여 해석한 경우와 역동역학 해석을 통하여 구한 조인트 구동토크를 각 조인트에 외력으로 가하여 해석한 경우가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 일반좌표 공간에서의 조인트 구동

Table 2 Inertia properties and dimensions of manipulator arms

Body no.	Mass(kg)	Length(m)	Principal moment of inertia (kg·m <sup>2</sup> )		
			I <sub>xx</sub>	I <sub>yy</sub>	I <sub>zz</sub>
1	100.0	2.0	33.46	33.46	0.26
2	7.5	0.6	0.00	0.23	0.23
3	12.5	1.0	0.01	1.05	1.05
4	25.0	2.0	0.02	8.34	8.34
5	5.0	0.4	0.00	0.07	0.07

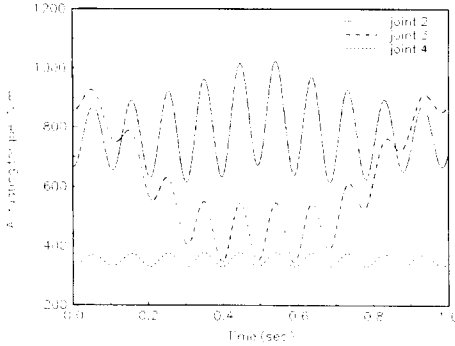


Fig. 10 Actuating torque at joints 2, 3 and 4

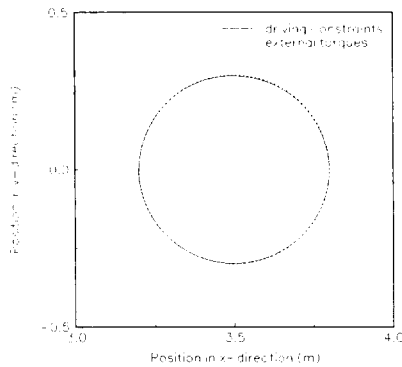


Fig. 11 Tip position of the system

력 및 반력을 계산하는 역동역학 해석 알고리즘이 타당하다고 사료된다.

## 7. 결 론

탄성체를 포함하는 다물체계에 부가되는 구동조건에 대한 실제 구동력을 상대 조인트좌표 공간에서 해석하는 역동역학 해석 알고리즘을 개발하였다. 직교좌표로 표현된 구속조건식의 가속도식을 운동방정식과 결합하기 위하여 속도변환기법을 이용하여 상대좌표 공간에서 유도하였다. 그리고 시스템의 직교속도벡터를 상대속도벡터로 변환하는 역속도변환행렬을 물체들을 연결하는 기구학적 조인트의 유형 및 시스템의 기준행렬에 따라 체계적으로 구성하는 방법을 제시하고, 이 행렬을 이용하여 각 조인트에 작용하는 반력을 직교좌표 공간에서 해석하였다. 이 알고리즘에 따라 탄성체계의 3차원 역동역학 해석 전산 프로그램을 개발하여 조인트 구속조건이 있는 평면운동 기구 및 위치구동

조건이 가해지는 공간운동 기구의 해석에 적용하였다. 구속조건을 부가했을 경우 각 조인트에 걸리는 반력 및 각 물체의 임의점의 위치 또는 탄성 변형량이 역동역학 해석에서 구한 구동토크를 외력으로 각 조인트에 가하여 해석한 결과들과 잘 일치하여 본 해석방법이 타당함을 알 수 있었다.

그러므로 일반적인 다물체계에 대하여 상대 조인트좌표 공간에서의 동역학 및 역동역학 해석을 위한 응용 소프트웨어 개발에 본 해석방법은 유용하게 이용될 수 있으리라 본다.

## 후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 : ME95-D-03)에 의하여 연구되었다.

## 참고문헌

- (1) Orlandea, N., Chace, M. A. and Calahan, D. A., 1977, "A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems-Part I & II," *Trans. of ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 773~784.
- (2) Nikravesh, P. E. and Chung, I. S., 1982, "Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three Dimensional Constrained Mechanical Systems," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 104, pp. 785~791.
- (3) Kim, S. S. and Haug, E. J., 1988, "A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics, Part I: Open-loop Systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 293~314.
- (4) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems using Velocity Transformations," *Trans. of ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 176~182.
- (5) Chen, D. C. and Shabana, A. A., 1991, "Generalized and Actual Constraint Forces in the Inverse Dynamic Analysis of Spatial Flexible Mechanical Systems," *ASME Advances in Design Automation*, Vol. 2, pp. 469~476.



- (6) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 173~182.
- (7) Lee, B. H., Yoo, W. S., Kwak, B. M., 1993, "A Systematic Formulation for Dynamics of Flexible Multibody Systems Using the Velocity Transformation Technique," *Journal of Mechanical Engineering Science, IMechE*, Vol. 207, No. c4, pp. 231~238.
- (8) Nikravesh, P., 1988, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, Inc..