

〈논 문〉

유효특성을 고려한 사절경로 발생기구의 기계적 오차해석 및 공차설계

최진호* · 이세정** · 최동훈***

(1996년 8월 14일 접수)

Mechanical Error Analysis and Tolerance Design of A Four-Bar Path Generator With Lubricated Joints

Jin-Ho Choi, S.J. Lee and Dong-Hoon Choi

Key Words : Clearances(틈새), Clearance Vector(틈새벡터), Mechanical Error(기계적 오차), Mobility Method(모빌리티법), Tolerances(공차), Random Variables(확률변수), Tolerance Design(공차 설계)

Abstract

This paper addresses an analytical approach to the mechanical error analysis and tolerance design of a four-bar path generator with lubricated joints. The mobility method is applied to consider lubrication effects and the four-bar path generator is stochastically modeled by using the clearance vector model for methanical error anaysis. To show the validity of the proposed method, the mechanical errors obtained by applying the method to a four-bar path generator are compared with those by Monte Carlo simulation. Based on this analytical method, an optimal tolerance design problem is formulated and solved for the four-bar path generator.

기 호 설 명

b : 최적화를 위한 설계변수 벡터
 b_i : i 번째 설계변수
 c_{ji} : 두 링크 사이의 조인트에서 i 번째 링크에 대한 j 번째 링크의 상대적인 위치를 나타내는 틈새벡터
 C_k : k 번째 조인트에서의 베어링 틈새 반경
 d : 커플러 포인트(coupler point) P 의 기준좌표계로부터의 거리
 D_k : k 번째 조인트에서의 베어링지름
 e_k : k 번째 조인트에서의 저어널의 편심벡터
 e_{kx}, e_{ky} : k 번째 조인트에서의 저어널의 편심벡터

x, y 성분
 F_k : k 번째 조인트에 작용하는 베어링 하중
 L_k : k 번째 조인트에서의 베어링 폭
 M_k : k 번째 조인트에서의 모빌리티벡터
 M_{kx}, M_{ky} : k 번째 조인트에서의 모빌리티 x, y 성분
 P : 커플러 포인트
 r_i : i 번째 링크의 길이
 R_k : k 번째 베어링의 반경
 r_{ji}, r_{ij} : i 링크와 j 링크를 연결하는 조인트에서의 틈새원 반경
 T_{z_i} : i 번째 확률변수의 공차
 $x_{ji}y_{ji}$: 틈새원에서 정의된 극부좌표계
 x_ky_k : k 번째 조인트에서의 모빌리티 해석을 위한 기준좌표계
 x_p, y_p : 사절경로 발생기구에서 커플러 포인트 P 의

*한양대학교 대학원 기계설계공학과

**회원, 서울시립대학교 정밀기계공학과

***회원, 한양대학교 기계설계학과

- 좌표성분
 z_i : i 번째 좌표변수
 z : 좌표변수벡터
 $\sigma_{z_i}^2$: i 번째 좌표변수의 분산
 μ : 유효유의 점도
 $\zeta_k \eta_k$: k 번째 조인트에서의 모빌리티 해석을 위한 지도좌표계
 θ_i : i 번째 링크의 조인트 각
 ω_k^{mean} : k 번째 조인트에서 저어널과 베어링 사이의 평균 각속도

1. 서 론

각 링크와 링크를 연결하는 조인트에서의 틈새는 베어링과 저어널 사이의 상대적인 운동을 위해 적절한 공차가 주어지게 되며, 원활한 상대운동을 위해 유효특성을 가진다. 이러한 조인트에서의 틈새는 주어진 공차 범위안에서 가공 및 조립 등으로 인하여 불확정성을 가지며, 링크길이의 공차와 더불어 기계적 오차(mechanical error)를 유발한다. 따라서 가능한 한 적은 제작 비용으로 설계자가 원하는 기계적 오차의 한계치 안에서 기구를 구성하기 위해서는, 이와 같은 링크길이의 공차 및 조인트에서의 틈새의 불확정성이 기계적 오차에 끼치는 영향을 평가하고, 이를 바탕으로 적절한 공차를 설계하여야 한다.

링크길이의 공차 및 조인트 틈새의 영향을 고려한 기계적 오차해석 및 설계에 관한 연구는 그동안 많은 연구자들에 의해 관심의 대상이 되어져 왔다. Hartengerg와 Denavit⁽¹⁾는 먼저 기구 시스템에서의 각 링크길이의 공차 및 조인트에서의 틈새의 불확정성에 의한 확률적 특성을 배제한 상태에서 최악조건하에서의 기계적 오차를 논의하였다. Garret와 Hall⁽²⁾은 확률 통계적인 접근방법에 의해 각 링크길이의 공차 및 각 조인트에서의 틈새의 영향을 언급하였으며, 이 연구는 확률 통계적인 방법에 의한 기구의 공차문제를 다루는 길을 제시하였다. Dhande와 Chakraborty⁽³⁾는 사절함수 발생기구(four-bar function generator)를 대상으로 등가 링크지(equivalent linkage) 개념을 사용하여 링크길이의 공차 및 조인트에서의 틈새의 영향을 고려한 기계적 오차해석 및 공차를 설계하였다. 그들이 사용한 등가 링크지 모델은 실제기구를 조인트 틈새의 영향을 포함하는 가상의 등가 링크지를 도입

한 근사적인 방법으로 일반성이 부족하다는 단점을 지니고 있으며, 유효특성을 고려하지 않는다. Mallik와 Dhande⁽⁴⁾는 사절함수 발생기구에 적용된 등가 링크지 개념을 사절경로 발생기구(four-bar path generator)에 적용하였다. Rhyu와 Kwak⁽⁵⁾은 링크길이의 공차 및 조인트에서의 틈새를 가진 평면 사절링크기구에 대한 기계적 오차해석 및 공차 설계를 위하여 변형된 등가링크지 모델을 제시하였다. 그러나 이들은 조인트 틈새의 불확정성을 고려하지 않았으며, 이들이 사용한 모델은 등가 링크지 모델에 기초하고 있으며, 일반성이 부족하다는 단점을 지니고 있다. Lee^(6,7) 등은 유효 링크 모델을 사용하여 평면기구의 공차해석 및 설계를 하였다. 그러나 그들이 제시한 유효 링크 모델은 등가 링크지 모델을 일반화시킨 모델로서, 실제 기구를 조인트 틈새의 영향을 포함하는 가상의 등가 링크지를 도입한 근사적인 방법이다. Choi 등⁽⁸⁾은 기존의 등가 링크지 모델의 단점을 극복하고 효과적으로 틈새의 영향을 고려하기 위한 틈새벡터 모델을 제시하였으나, 조인트에서의 유효특성을 고려하지는 않았다. Rogers와 Andrews⁽⁹⁾는 유효를 고려한 기구 해석을 수행하였으나, 공차에 의한 불확정성을 고려하지 않았다.

위에서 살펴본 바와 같이 기계적 오차해석 및 설계를 위한 기존의 연구들은 공차에 의한 불확정성 및 유효특성을 동시에 고려하지 않았다. 그러나 좀더 정밀하고 경쟁력있는 제품 개발 및 생산을 위해서는 공차특성 및 유효특성을 동시에 고려한 기계적 오차해석 및 설계가 요구된다. 따라서 본 연구에서는 사절경로 발생기구를 대상으로 링크길이의 공차 및 유효특성을 가진 각 조인트에서의 틈새의 불확정성을 고려한 기계적 오차해석을 수행하고, 이를 바탕으로 공차 최적화를 수행함으로써 본 연구의 유효성을 보이고자 한다.

2. 유효를 고려한 조인트 모델링

링크길이의 공차 및 베어링 틈새의 불확정성에 의한 기계적 오차를 해석하기 위해서는 결정론적인 기구를 확률적인 기구로 모델링하여야 한다. 이를 위하여 기존의 대부분의 연구자는 등가 링크지 모델을 근거로 해석을 수행하여 왔으나, 이 모델은 베어링 틈새의 영향을 포함하도록 가상의 링크를 도입한 근사적인 방법으로 일반성이 부족하며, 조

인트에서의 유탈을 고려한 기구해석에는 부적합한 모델이다. 이에 반해 틸새벡터 모델⁽⁸⁾은 기존의 모델에 비해 효율적이며 정확하고 일반적인 기구에 쉽게 적용할 수 있을 뿐 아니라 조인트에서의 유탈을 고려하고자 하는 경우에 적합한 모델이다. 따라서 본 연구에서는 유탈을 고려한 기계적 오차해석을 위하여 조인트부를 틸새벡터 모델에 의해 모델링하고자 한다.

2.1 틸새벡터 모델

Fig. 1은 조인트에서의 틸새벡터를 정의하기 위한 틸새벡터 모델을 나타내는 그림으로, 확률적 특성을 가지는 틸새원 안에서의 국부좌표계(local coordinate system)를 다음과 같이 정의한다. (1) 두 인접하는 링크중 임의의 한 링크를 중심으로 링크 사이의 상대적인 위치를 나타내기 위한 틸새원(clearance circle)을 형성한다. (2) 정의된 틸새원의 중심에 기준좌표계 XY 와 같은 방향을 가지는 국부좌표계 x_jy_j 를 정의한다. 위와 같이 정의된 틸새원에서 r_{ji} 는 i 번째 링크의 끝을 중심으로 형성된 틸새원의 반경을 나타내며, r_{ij} 는 j 번째 링크의 끝을 중심으로 형성된 틸새원의 반경을 나타낸다. 이와 같은 틸새원 반경 r_{ji} 와 r_{ij} 의 크기는 서로 같으며, 이들은 제작 및 조립과정 등에서의 불확정성에 의존하는 확률변수이다. 위와 같이 정의된 틸새원 안에서 두 링크의 상대적인 위치를 나타내는 틸새벡터 c_{ij} 및 c_{ji} 가 Fig. 1과 같이 정의된다. Fig. 1(a)에서 정의된 c_{ji} 는 i 번째 링크의 끝을 중심으로 형성된 틸새원 안에서 정의된 틸새벡터이며, Fig. 1(b)에서 c_{ij} 는 j 번째 링크의 끝을 중심으로 형성된 틸새원 안에서 정의된 틸새벡터이다. c_{ji} 와 c_{ij} 는 인접한 두 링크 사이의 상대적인 위치

를 나타내는 벡터이므로 그들은 크기는 같고, 방향이 서로 반대인 성질을 가지고 있다. 이와 같이 정의된 틸새벡터는 유탈을 고려하는 경우, 저어널의 편심벡터와 같은 성질을 가진다.

위와 같은 틸새벡터 모델은 틸새원 안에서의 편 중심의 위치가 확률적인 분포를 갖는다고 가정할 때, 편 중심의 확률적 특성을 완전히 고려할 수 있다. 따라서 틸새벡터 모델에 의한 기계적 오차해석은 기존의 등가 링크지 모델에 의한 해석보다 정확한 해를 주며, 임의의 평면기구에 쉽게 적용할 수 있는 일반성을 가지고 있다. 또한 본 모델은 틸새원 안에서의 편 중심의 위치가 확률적인 분포가 아닌 유탈특성에 의하여 결정되는 경우, 틸새 벡터를 저어널의 편심벡터로 대체함으로써 적용이 용이하다는 장점을 가지고 있다.

2.2 조인트부의 유탈해석

사절경로 발생기구와 같은 평면기구를 구성하는 조인트는 대부분 실린더 형태의 핀 조인트로 가정할 수 있다. 본 연구에서는 모빌리티법(mobility method)을 이용하여 유탈해석을 효율적으로 수행하기 위하여, 각 조인트부를 원형실린더 형태의 저어널 베어링으로 가정하였다.

모빌리티법은 Booker⁽¹⁰⁾가 제안한 이후 많은 연구자의 관심 속에 발전되어 그 효율성이 입증되었으며, 현재는 Goenka⁽¹¹⁾가 유한요소법을 이용하여 만든 모빌리티 지도가 널리 이용되고 있으며, 이것이 현재는 모빌리티법의 활용성과 유용성을 입증하는 중요한 자료로 사용되고 있다. 따라서 본 연구에서는 Goenka⁽¹¹⁾가 제안한 모빌리티 지도를 이용하였다.

저어널 또는 베어링이 회전하며 동하중을 받는

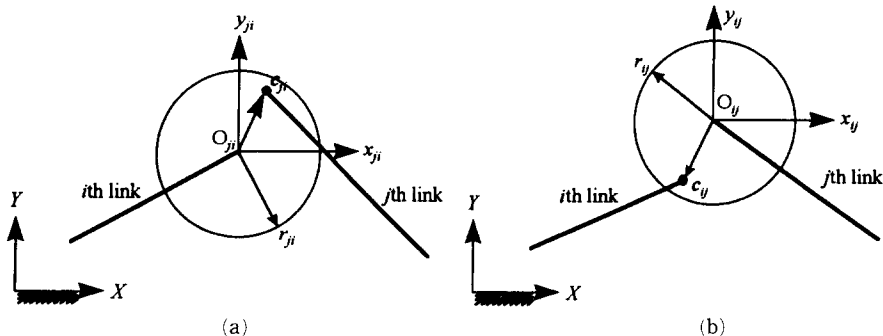


Fig. 1 Clearance vector model

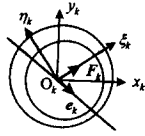


Fig. 2 Coordinate systems in the k-th joint

일반적인 저어널 베어링의 중심케적은, 회전이 없다고 가정한 경우의 모빌리티 식에 저어널의 속도 변화항을 포함시킨 모빌리티 방정식으로부터 계산된다. k번째 조인트에서의 모빌리티 방정식을 수학적으로 표현하면 식 (1)과 같이 나타내어진다.

$$\frac{de_k}{dt} = A_k M_k + \omega_k^{mean} \times e_k \quad (1)$$

여기서, $A_k = \frac{F_k}{L_k D_k (\mu / C_k)^2}$

여기서, F_k 는 k번째 조인트의 베어링에 작용하는 힘을 나타내며, R_k 와 D_k 는 각각 베어링의 반경과 직경을 나타내고, L_k 는 베어링 폭을 나타낸다. 또한 μ 는 윤활유의 점도를 의미하며, e_k 는 저어널의 편심벡터이며, C_k 는 베어링의 틈새반경이다. 그리고 ω_k^{mean} 은 저어널과 베어링 사이의 평균 각속도를 의미하며, M_k 은 모빌리티 지도를 형성하는 모빌리티 성분으로 Goenka⁽¹¹⁾가 제안한 식을 이용하였다.

식 (1)의 모빌리티 방정식을 풀기 위하여 일반적인 저어널 베어링의 해석에 사용되는 두 개의 직각 좌표계를 Fig. 2와 같이 선정하였다. 이때 $x_k y_k$ 는 k번째 조인트에서 O_k 를 중심으로 설정한 기준좌표계이며, $\xi_k \eta_k$ 는 k번째를 조인트에서 모빌리티 계산을 손쉽게 하기 위하여 하중의 방향에 따라 설정한 지도좌표계(map frame)이다. 이와 같이 설정된 기준좌표계와 지도좌표계 사이의 좌표변환을 통하여 모빌리티 성분 M_k 가 계산되어지며,⁽¹⁰⁾ 기구해석을 통하여 각 조인트에 작용하는 베어링 하중 및 상대 각속도가 계산된다.

이제 식 (1)과 같이 표현되는 각 조인트에서의 모빌리티 방정식을 시간에 대하여 수치적분하여 속심을 구한 후, 이를 기구학적 구속조건 식에 포함시킴으로써, 윤활을 고려한 기구해석 및 기계적 오차해석을 수행하게 된다.

3. 사절경로 발생기구의 기계적 오차해석

본 연구에서는 사절경로 발생기구를 틈새 벡터

모델을 적용한 확률적 기구로 모델링한 후, 이에 대하여 윤활을 고려한 기구해석 및 기계적 오차해석을 수행하였다.

3.1 윤활을 고려한 기구해석

Fig. 3의 사절경로 발생기구에서 θ_2 는 입력변수, θ_3 , θ_4 는 종속변수(joint variables)를 의미하며, P는 경로를 나타내는 커플러 포인트(coupler point)를 나타낸다.

윤활을 고려한 기구해석을 위해 먼저 식 (2)와 같이 표현되는 기구학적 구속조건식을 고려하자.

$$f = r_2 + r_3 - r_1 - r_4 + c_{21} + c_{32} - c_{34} - c_{41} = 0 \quad (2)$$

윤활을 고려한 경우에 각 조인트에서 정의된 틈새 벡터 c_{21} , c_{32} , c_{34} , c_{41} 는 각각 윤활에 의해 결정되는 저어널의 편심벡터 e_1 , e_2 , e_3 , e_4 를 의미한다. 따라서 식 (2)의 벡터 방정식을 스칼라 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$f_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 - r_4 \cos \theta_4 + e_{1x} + e_{2x} - e_{3x} - e_{4x} = 0 \quad (3)$$

$$f_2 = r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 + e_{1y} + e_{2y} - e_{3y} - e_{4y} = 0 \quad (4)$$

윤활을 고려한 식 (3)과 식 (4)의 구속조건 식으로부터 윤활을 고려한 경우의 θ_4 가 식 (5)와 같이 계산된다.

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left[\frac{A \pm D}{B + C} \right] \quad (5)$$

여기서,

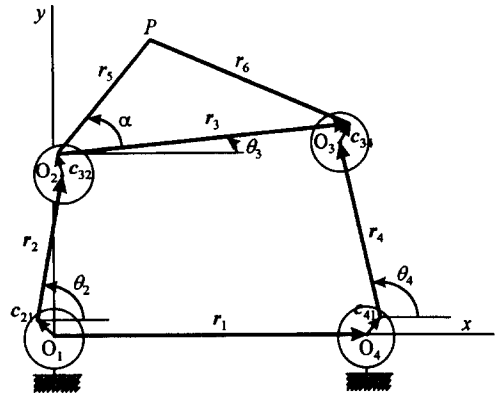


Fig. 3 Four-bar path generator with lubricated joints modeled by using the clearance vector

$$A = \sin \theta_2 + \frac{E_y}{r_2}$$

$$B = \cos \theta_2 + \frac{E_x - r_1}{r_2}$$

$$C = \frac{(r_1 - E_x)^2 + E_y^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} - \frac{(r_1 - E_x)}{r_4} \cos \theta_2 + \frac{E_y}{r_4} \sin \theta_2$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}$$

$$E_x = e_{1x} + e_{2x} - e_{3x} - e_{4x}$$

$$E_y = e_{1y} + e_{2y} - e_{3y} - e_{4y}$$

위의 식에서 e_{kx} , e_{ky} 는 k 번째 조인트에서의 핀 중심의 위치를 나타낸다. 또한 θ_3 는 계산된 θ 를 식 (3) 또는 식 (4)에 대입함으로써 계산되어지며, 커플러 포인트 P 의 좌표 x_P 및 y_P 는 각각 아래와 같이 계산된다.

$$x_P = r_2 \cos \theta_2 + r_5 \cos (\theta_3 + \alpha) + e_{1x} + e_{2x} \quad (6)$$

$$y_P = r_2 \sin \theta_2 + r_5 \sin (\theta_3 + \alpha) + e_{1y} + e_{2y} \quad (7)$$

이와 같이 유효를 고려한 기구해석을 위해서는 크랭크가 회전하는 동안 유효특성에 의한 핀 중심의 위치를 결정하여야 한다. 이를 위해서는 식 (1)과 같이 표현되는 모빌리티 방정식을 수치적분하여야 한다. 이를 위하여 식 (3)과 식 (4)를 시간에 대하여 이분하면 다음과 같다.

$$\dot{f}_1 = -r_2\omega_2 \sin \theta_2 - r_3\omega_3 \sin \theta_3 + r_4\omega_4 \sin \theta_4 + \dot{e}_{1x} + \dot{e}_{2x} - \dot{e}_{3x} - \dot{e}_{4x} = 0 \quad (8)$$

$$\dot{f}_2 = -r_2\omega_2 \cos \theta_2 - r_3\omega_3 \cos \theta_3 - r_4\omega_4 \cos \theta_4 + \dot{e}_{1y} + \dot{e}_{2y} - \dot{e}_{3y} - \dot{e}_{4y} = 0 \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)에서 \dot{e}_{kx} , \dot{e}_{ky} 는 조인트 k 에서의 편심량의 시간에 대한 변화율로, 식 (1)에 의하여 편심량의 함수로 표현된다. 이제 식 (8)과 식 (9)에서 편심량의 변화율을 편심량의 함수로 표현한 후 정리하면, 커플러링크(coupler link) 및 출력링크의 각속도가 각각 식 (10)과 식 (11)로 표현된다.

$$\omega_3 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{D_e} \quad (10)$$

$$\omega_4 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{D_e} \quad (11)$$

여기서, $D_e = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$a_{11} = -r_3 \sin \theta_3 - 0.5e_{2y} + 0.5e_{3y}$$

$$a_{12} = r_4 \sin \theta_4 - 0.5e_{3y} + e_{4y}$$

$$a_{21} = r_3 \cos \theta_3 + 0.5e_{2x} - 0.5e_{3x}$$

$$a_{22} = -r_4 \cos \theta_4 + 0.5e_{3x} - e_{4x}$$

$$b_1 = (r_2 \sin \theta_2 + e_{1y} - 0.5e_{2y}) \omega_2$$

$$-A_1M_{1x} - A_2M_{2x} + A_3M_{3x} + A_4M_{4x}$$

$$b_2 = -(r_2 \cos \theta_2 + e_{1x} - 0.5e_{2x}) \omega_2$$

$$-A_1M_{1y} - A_2M_{2y} + A_3M_{3y} + A_4M_{4y}$$

이제 식 (10)과 식 (11)를 식 (1)의 모빌리티 방정식에 대입하고, 시간에 대하여 수치적분함으로써 핀 중심의 위치해석을 수행할 수 있다. 이때 각 조인트에서 작용하는 베어링 하중은 공칭기구의 힘/토크 해석으로부터 계산된다. 또한 식 (1)은 미분방정식으로 이를 해석하기 위해서는 핀 중심의 위치를 나타내는 편심량의 초기치가 주어져야 한다. 그러나 편심량의 초기치는 알 수 없기 때문에 본 연구에서는 편심량의 초기치를 0으로 가정하여 핀 중심의 위치가 정상상태에 도달할 때까지 해석하도록 하였다. Fig. 4는 위와 같은 유효특성을 고려한 기구해석의 계산 절차를 나타내는 그림이다. Fig. 4에서 N 은 핀 중심의 위치가 정상상태에 도달할 때까지 해석을 반복 수행하기 위한 사이클 수를 의미하며, T 는 한 사이클에 해당하는 시간을 의미한다. 또한 편심량의 위치가 정상상태에 도달했는지의 수렴성 판정은 아래와 같다.

$$\max_t \|e^{N+1}(t) - e^N(t)\| \leq \epsilon, \quad t \in [0, T] \quad (12)$$

식 (12)는 N 번째 사이클과 $N+1$ 번째 사이클에

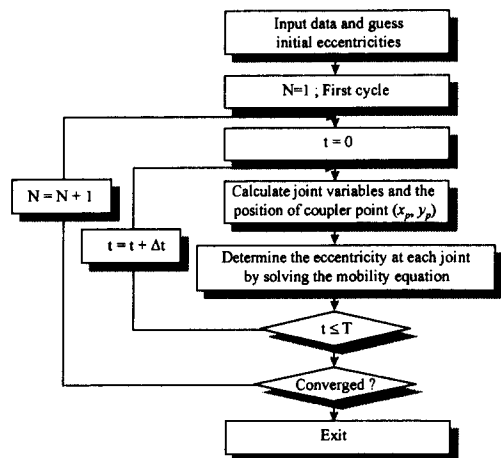


Fig. 4 Computational procedure for the kinematic analysis of a four-bar path generator with lubricated joints

서 편심량 차이의 최대치가 ϵ 미만일 때 수렴한 것으로 판정함을 의미한다. 여기서, ϵ 은 상대 오차의 한계치를 의미한다.

3.2 기계적 오차 해석

Fig. 3과 같은 사절경로 발생기구의 기계적 오차 해석을 위하여 각 링크길이 및 각 조인트에서의 틈새원 반경을 확률변수로 아래와 같이 고려하였다.

$$z = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5 \ r_6 \ r_{21} \ r_{23} \ r_{34} \ r_{41}]^T \quad (13)$$

여기서, r_i 는 i 번째 링크길이를 의미하며, r_{ji} 는 i 링크와 j 링크를 연결하는 조인트에서 i 번째 링크를 중심으로 형성된 틈새원의 반경을 나타내며, 이는 각 조인트에서의 베어링 틈새를 의미한다.

운환을 고려한 사절경로 발생기구에서 출력변수를 의미하는 x_p 및 y_p 의 분산은 식 (6)과 식 (7)을 각 확률변수의 평균값에 대하여 Talyor 급수 전개한 후, 정리함으로써 각각 식 (14) 및 식 (15)와 같이 표현된다. (4~8)

$$\sigma_{x_p}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_p}{\partial z_i} \Big|_{\mu_z} \right)^2 \sigma_{z_i}^2 \quad (14)$$

$$\sigma_{y_p}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y_p}{\partial z_i} \Big|_{\mu_z} \right)^2 \sigma_{z_i}^2 \quad (15)$$

식 (14) 및 식 (15)에서 하첨자 μ_z 는 확률변수에 대한 x_p 및 y_p 의 민감도가 확률변수의 평균치에서 평가됨을 의미한다. 또한 식 (14) 및 식 (15)에서 $\sigma_{z_i}^2$ 는 i 번째 확률변수의 분산으로 각 확률변수에 대한 분포함수가 주어지면 쉽게 계산되어지는 값이다. 식 (16)은 정규 분포함수로 정의된 확률변수가 99.73%의 신뢰구간을 가지는 경우의 평균과 분산을 나타내며, 식 (17)은 등분포함수로 정의된 확률변수에 대한 평균과 분산을 수학적으로 표현한 것이다.

$$\sigma_{z_i}^2 = T_{z_i}^2/9 \quad (16)$$

$$\sigma_{z_i}^2 = T_{z_i}^2/3 \quad (17)$$

식 (16)에서 T_{z_i} 는 링크길이나 조인트 틈새 반경을 나타내는 확률변수 z_i 의 3σ 에 해당하는 공차를 의미하며, 식 (17)에서 T_{z_i} 는 확률변수 z_i 가 가질 수 있는 최대값과 평균값 사이의 차이에 해당하는 공차를 의미한다.

이제 식 (6) 및 식 (7)과 같이 표현되는 점 P 의 좌표 x_p 및 y_p 에 대한 민감도를 계산하자. 이를 위

하여 먼저 각 확률변수에 대한 종속변수 θ_3, θ_4 의 민감도를 계산하여야 하며, 이는 식 (3)과 식 (4)를 각 확률변수에 대하여 미분을 취함으로써 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_3}{dz_i} \\ \frac{d\theta_4}{dz_i} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \frac{dc_{3x}}{dz_i} + \frac{de_{1x}}{dz_i} - \frac{de_{1x}}{dz_i} - \frac{de_{2x}}{dz_i} \\ -\frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \frac{de_{3y}}{dz_i} + \frac{de_{4y}}{dz_i} - \frac{de_{1y}}{dz_i} - \frac{de_{2y}}{dz_i} \end{bmatrix} \quad (18)$$

식 (18)에서 $[J] = \begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix}$ 를 나타내며, $\frac{\partial f_1}{\partial z_i}, \frac{\partial f_2}{\partial z_i}$ 는 식 (3)과 식 (4)를 각 확률변수에 대하여 편미분함으로써 쉽게 계산되는 값이다. 또한 $\frac{de_{kx}}{dz_i}, \frac{de_{ky}}{dz_i}$ 는 윤환특성에 의해 결정되는 k 번째 조인트에서의 핀중심의 i 번째 확률변수에 대한 민감도를 의미하며, 본 연구에서는 식 (19)과 같이 표현되는 유한차분법을 통하여 이를 결정하였고, 이를 식 (18)식에 대입함으로써 각 확률변수에 대한 종속변수 θ_3, θ_4 의 민감도를 계산하였다.

$$\frac{df}{dz_i} \approx \frac{f(z_1, \dots, z_i + \Delta z_i, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)}{\Delta z_i} \quad (19)$$

이제 식 (18)과 같이 계산된 민감도를 근거로, 식 (6) 및 식 (7)과 같이 표현되는 점 P 의 좌표 x_p 및 y_p 를 각 확률변수에 대하여 미분을 취함으로써 식 (14)과 식 (15)의 분산해석을 위한 민감도를 해석적으로 계산할 수 있다.

3.3 예제 및 결과 토의

본 연구에서는 사절경로 발생기구의 기계적 오차 해석의 유효성 검증을 위하여 Fig. 5와 같은 기구를 고려하였다. 기구해석 및 베어링 하중의 계산을

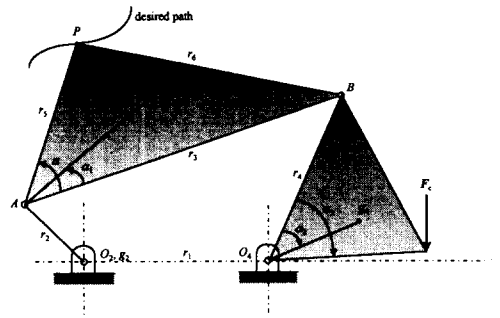


Fig. 5 A four-bar path generator

위한 공칭기구의 사양을 $r_1=100$ mm, $r_2=60$ mm, $r_3=220$ mm, $r_4=150$ mm, $r_5=100$ mm, $r_6=150$ mm, $\overline{Ag_3}=90$ mm, $\overline{O_4g_4}=90$ mm, $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=36.4^\circ$, $\alpha_3=56.4^\circ$, $m_3=1.5$ kg, $m_4=5$ kg, $I_{g_2}=0.025$ kg·m², $I_{g_3}=0.012$ kg·m², $I_{g_4}=0.012$ kg·m² 그리고 $F_c=0.8$ kN와 같이 고려하였으며, 크랭크속도는 30 rad/sec로 반시계방향으로 일정하게 하였다. 또한 운할해석을 위하여 각 조인트 O_2 , A , B , O_4 에서의 베어링 직경 및 폭 그리고 틈새를 각각 $D_1=40.02$ mm, $L_1=40.0$ mm, $C_1=0.0295$ mm, $D_2=30.0$ mm, $L_2=20.0$ mm, $C_2=0.0240$ mm, $D_3=60.0$ mm, $L_3=40.0$ mm, $C_3=0.0345$ mm, $D_4=40.02$ mm, $L_4=40.0$ mm, $C_4=0.0295$ mm와 같이

고려하였으며, 윤활유의 점도 $\mu=0.15$ Pa·s로 하였다. 각 조인트에 작용하는 베어링 힘은 Fig. 5의 공칭기구에 대한 힘/토크 해석을 통하여 계산하였고, 확률변수와 무관한 것으로 가정하였다. 이제 고려된 기구의 기계적 오차해석을 위하여, 링크길이 및 조인트 틈새로 정의된 모든 확률변수의 확률 밀도함수를 정규분포로 가정하였고, 공차 T_z 를 0.02 mm로 하여 기계적 오차해석을 수행하였다. 또한 수행된 해석의 타당성 검증을 위하여 몬테칼로 시뮬레이션을 동시에 수행하여 그 결과를 비교하였다. 몬테칼로 시뮬레이션의 적절한 해를 위하여 20,000개의 표본이 사용되었다.

Fig. 6과 Fig. 7은 본 연구에서 제안한 방법에 의한 해석결과와 몬테칼로 시뮬레이션 결과를 비교한 그림이다. Fig. 6과 Fig. 7은 각각 출력변수 x_p , y_p 의 기계적 오차를 나타낸 그림이다. 이들 그림에서 본 연구에 의한 결과와 몬테칼로 시뮬레이션의 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있으며, 이로부터 해석적으로 수행한 본 연구에 의한 기계적 오차해석이 타당함을 알 수 있다. 몬테칼로 시뮬레이션은 수 많은 표본에 대하여 해석을 수행하기 때문에 비효율적인 반면, 본 연구에서 수행한 해석적 방법은 공칭기구에서 한번의 민감도 해석을 통하여 해를 얻으므로 매우 효율적인 방법이다. 따라서 본 연구에서는 반복적인 계산을 요하는 최적화를 위한 해석 모듈로 본 연구에서 수행한 기계적 오차해석을 사용하였다.

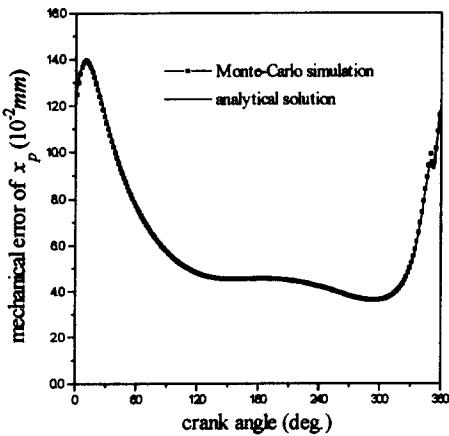


Fig. 6 Comparison of mechanical errors of coupler point x_p obtained by analytic and Monte-Carlo methods

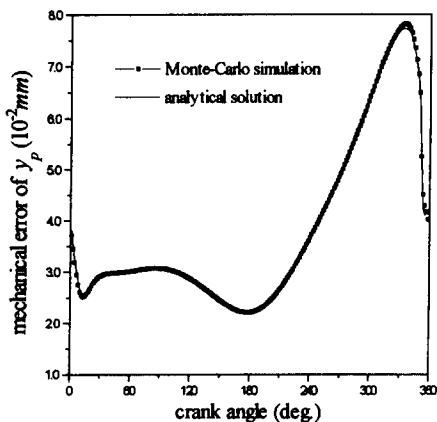


Fig. 7 Comparison for mechanical errors of coupler point y_p obtained by analytic and Monte-Carlo methods

4. 사절경로 발생기구의 공차 최적설계

공차가 작으면 작을수록 기계적 오차는 작아지지만, 제작비용이 커지는 경향이 있다. 따라서 제작비용의 절감을 통한 경쟁력 있는 제품을 만들기 위해서는, 설계자는 기구의 특성과 기타 운전상태 등을 고려하여 원하는 기계적 오차범위 안에서 각 부품에 가능한 한 커다란 공차를 할당하는 것이 바람직하다.

4.1 최적화 문제 수식화

본 연구에서는 윤활을 고려한 사절경로 발생기구의 공차 최적화를 위하여 각 확률변수에 대한 공차를 설계변수로 하여, 주어진 기계적 오차의 허용치를 만족하면서 가능한 한 커다란 공차를 할당하도록 하는 최적화 문제를 아래와 같이 구성하였다.

$$\text{Minimize } F(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i} \quad (20)$$

$$\text{subject to } \max_{\theta_2} 3\sigma_d \leq \varepsilon, \theta_2 \in [0, 2\pi] \quad (21)$$

$$b_i^l \leq b_i \leq b_i^u, i = 1, \dots, 10 \quad (22)$$

여기서,

$$\mathbf{b} = [T_{z1}, T_{z2}, T_{z3}, T_{z4}, T_{z5}, T_{z6}, T_{z7}, T_{z8}, T_{z9}, T_{z10}]^T \quad (23)$$

식 (20)은 공차 최적화를 위한 목적함수로 제작비가 공차의 크기에 반비례한다는 가정하에 공차의 역수의 합을 고려하였다. 또한 식 (21)은 3σ로 표현되는 기계적 오차의 최대치가 항상 원하는 범위 안에 있도록 하는 설계 고려사항을 의미한다. 식 (22)는 정의된 설계변수에 대한 상하한치 구속조건을 나타내며, 식 (23)은 최적화를 위한 설계변수를 나타낸다. 식 (23)에서 T_{zi} 는 i 번째 확률변수에 대한 공차를 의미한다. 식 (21)의 공차 최적화를 위한 설계 고려사항은, 사절경로 발생기구에서 점 P 의 위치에 대한 기계적 오차의 최대치가 설계자가 원하는 범위 안에 있도록 하는 조건을 의미한다. 식 (21)에서 d 는 기준좌표계의 원점에서 점 P 까지의 거리로 다음과 같이 정의된다.

$$d = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (24)$$

또한 $3\sigma_d$ 는 식 (24)에서 정의된 d 의 기계적 오차를 3σ 의 형태로 표현한 것으로 다음과 같이 계산된다.

$$3\sigma_d = 3.0 \times \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{\partial d}{\partial z_i} \mu_z \right)^2 \sigma_{z_i}^2} \quad (25)$$

식 (25)에서 각 확률변수에 대한 d 의 민감도는 정의된 확률변수의 평균치에서 결정되며, 아래의 식 (26)과 같이 계산된다.

$$\frac{dd}{dz_i} = \frac{\partial d}{\partial x_p} \frac{dx_p}{\partial z_i} + \frac{\partial d}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial z_i} \quad (26)$$

식 (26)에서 점 P 위 좌표 x_p 및 y_p 의 각 확률변수에 대한 민감도 계산은 앞의 3.2절에서 설명한 바와 같으며, d 의 x_p 및 y_p 에 대한 편미분값은 식 (24)로부터 계산된다.

조인트에서의 상대적인 운동을 위해서는 틈새의 공차는 틈새의 평균치보다 클 수 없다. 본 연구에서는 이와 같은 조건을 고려하기 위하여, 최적화를 수행하는 동안 틈새의 공차에 대한 설계변수가 틈

새의 평균치보다 크게 되면 틈새의 평균치를 틈새의 공차로 대체하고, 그렇지 않을 경우 설계자가 초기에 준 틈새의 평균치를 그대로 사용하는 기법을 도입하여 최적화를 수행하였다. 따라서 틈새의 공차가 틈새의 평균치보다 큰 경우에는 식 (25)에서의 평균값에서의 확률변수에 대한 d 의 민감도를 새로 평가하였다.

4.2 예제 및 결과 토의

사절경로 발생기구의 공차 최적화를 위하여, 먼저 기계적 오차해석을 위한 해석 모듈을 작성하였고, 작성된 해석 모듈과 최적화 모듈을 결합한 공

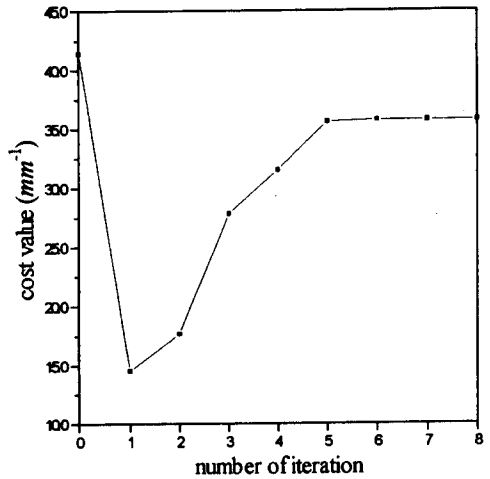


Fig. 8 Convergence history

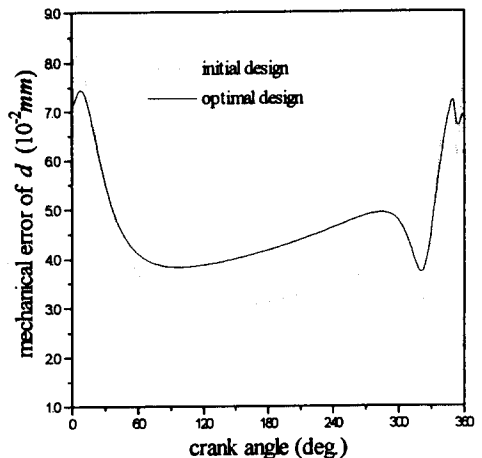


Fig. 9 Comparison of mechanical errors of the distance to coupler point P between initial and optimal designs

차 최적 설계 프로그램을 작성하였다. 최적화 모듈로는 Augmented Lagrangian Method (ALM) 기법을 이용한 IDOL⁽¹²⁾을 사용하였다.

본 연구를 통하여 개발된 공차 최적설계 프로그램을 Fig. 5의 기구에 적용하여 공차 최적화를 수행하였다. 이때 기계적 오차에 대한 한계치 ϵ 은 0.075로 하였고, 모든 공차의 초기값은 0.02로 하였다. Fig. 8은 위와 같은 최적화 수행과정을 나타내는 그림으로, 가로축은 ALM 반복횟수를 나타내며, 세로축은 최적화 문제에서 정의된 목적함수의 값을 나타낸다. 수행된 최적화를 통하여 목적 함수가 초기의 41.42에서 35.74로 13.7% 향상되었음을 알 수 있었다.

수행된 최적화 결과 각 링크길이 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ 에 대한 공차는 각각 $b_1=0.03119, b_2=0.01988, b_3=0.1806, b_4=0.02165, b_5=0.03049, b_6=0.03981$ 이며, 각 조인트 O_2, A, B, O_4 에서의 베어링 틈새 C_1, C_2, C_3, C_4 에 대한 공차는 각각 $b_7=0.01809, b_8=0.01072, b_9=0.03284, b_{10}=0.03281$ 이다. 최적화 결과에서 링크길이의 측면에서는 링크 2와 3의 공차가 초기값으로부터 줄어든 반면, 나머지 링크길이의 공차는 증가하였음을 알 수 있다. 또한 틈새 반경에서는 조인트 O_2 와 조인트 A 에서의 틈새 반경의 공차는 줄어든 반면, 나머지 조인트에서의 공차는 증가하였음을 알 수 있다. 위의 결과에서 링크 2와 링크 3 그리고 조인트 O_2 와 조인트 A 에서의 틈새 반경의 공차는 다른 확률변수들의 공차에 비해 상대적으로 기계적 오차에 영향을 많이 주는 변수들로 엄격한 공차관리가 필요하며, 나머지 공차들은 적절한 공차관리로 제작비를 절감할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 본 연구에서 수행된 최적화 결과를 바탕으로 기계적 오차해석을 수행한 결과를 그래프로 나타낸 그림이다. Fig. 9는 사절경로 발생기구에 커플러 포인트 P 의 기준점으로부터의 거리 d 에 대한 초기설계와 최적설계에서의 기계적 오차를 비교한 그림이다. 초기설계에서는 기준치 이상의 기계적 오차가 발생하였으나, 최적화를 통하여 구성된 기구는 설계 기준치 이하로 설계 사양을 만족하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 사절경로 발생기구를 대상으로 운

환을 고려한 기계적 오차해석 및 공차 최적화를 수행하였다. 운환특성을 고려한 기계적 오차해석을 위하여, 기구를 확률적으로 모델링하였으며, 이를 위하여 틈새벡터 모델을 사용하였다. 기존의 등가 링크지 모델은 틈새 반경의 확률적 특성을 충분히 고려하지 못한 반면, 사용된 틈새벡터 모델은 틈새 반경의 확률적 특성을 충분히 고려하였다. 또한 운환특성을 고려하기 위하여 조인트부를 실린더 형태의 핀 조인트로 가정하여 기존의 많은 연구자에 의해 효율성이 입증된 모빌리티법에 의하여 조인트부의 운환해석을 수행하였다. 모빌리티 법에 의한 운환해석을 사절경로 발생기구에 적용하였고, 이를 근거로 운환특성을 고려한 사절경로 발생기구를 위한 기계적 오차해석 프로그램을 개발하였다. 개발된 해석 프로그램을 사절경로 발생기구에 적용하여 기계적 오차해석을 수행하였고, 동시에 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여 그 결과들을 비교하였다. 비교결과 두 결과가 일치함을 알 수 있었고, 이를 통하여 본 연구에서 수행한 해석의 유효성을 입증하였다. 또한 개발된 해석 프로그램을 근거로 주어진 기계적 오차의 허용치를 만족하면서 가능한 커다란 공차를 할당하기 위한 공차 최적화를 문제를 구성하였으며, 공차 최적설계 프로그램을 개발하여 하나의 사절경로 발생기구에 적용함으로써 그 유효성을 보였다.

후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술 연구 조성비(기계공학: ME95-A-31)에 의하여 연구되었으며, 이에 관계 제위에서 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Hartenberg, R. S. and Denavit, J., 1964, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGrawHill, New York, pp. 316~319.
- (2) Garrett, R. E. and Hall, A. S., Jr., 1969, "Effect of Tolerance and Clearance in Linkage Design," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Feb. pp. 198~202.
- (3) Dhande, S. G. and Chakraborty, J., 1973, "Analysis and Synthesis of Mechanical Error in Linkages-A Stochastic Approach," *ASME Jour-*

- nal of Engineering for Industry*, Vol. 95, pp. 672~676.
- (4) Mallik, A. K. and Dhande, S. G., 1987, "Analysis and Synthesis of Mechanical Error in Parth-Generating Linkages Using a Stochastic Approach," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 22, No. 2, pp. 115~123.
- (5) Rhyu, J. H. and Kwak, B. M., 1988, "Optimal Stochastic Design of Four-Bar Mechanisms for Tolerance and Clearance," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 110, pp. 255~262.
- (6) Lee, S. J. and Gilmore, B. J., 1991, "The Determination of the Probabilistic Properties of Velocities and Acceleration in Kinematic Chains With Uncertainty," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 113, pp. 84~90.
- (7) Lee, S. J., Gilmore, B. J. and Ogot, M. M., 1993, "Dimensional Tolerance Allocation of Stochastic Dynamic Mechanical Systems Through Performance and Sensitivity Analysis," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 392~402.
- (8) Choi, J. H., Lee, S. J. and Choi, D. H., 1996, "Clearance Vector Model for Mechanical Error Analysis of Planar Linkages," *Technical Report No. AMOD-96-01*.
- (9) Rogers, R. J. and Andrews, G. C., 1977, "Dynamic Simulation of Planar Mechanical Systems With Lubricated Bearing Clearances Using Vector-Network Methods," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 99, pp. 131~137.
- (10) Booker, J. F., 1965, "Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution," *ASME Journal of Basic Engineering*, Sept, pp. 537~546.
- (11) Goenka, P. K., 1984, "Analytical Curve Fits for Solution Parameters of Dynamically Loaded Journal Bearings," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 106, pp. 421~426.
- (12) Kim, M. S. and Choi, D. H., 1993, "IDOL Version 2.0 User's Guide," *Technical Report No. AMOD-93-01*.