

<논 문>

## VOF 방법에 의한 이동하는 자유 표면이 존재하는 유동의 유한 요소 해석

신 수 호\* · 이 우 일\*\*

(1997년 3월 26일 접수)

### Finite Element Analysis of Flow with Moving Free Surface by Volume of Fluid Method

Suho Shin and Woo Il Lee

**Key Words :** Moving Free Surface(이동 자유 표면), Volume of Fluid Method(VOF 방법), Finite Element Method(유한 요소법), Mold Filling(금형 충전 과정)

#### Abstract

A numerical technique for simulating incompressible viscous flow with free surface is presented. The flow field is obtained by penalty finite element formulation. In this work, a modified volume of fluid(VOF) method which is compatible with 4-node element is proposed to track the moving free surface. This scheme can be applied to irregular mesh system, and can be easily extended to three dimensional geometries. Numerical analyses were done for two benchmark examples, namely the broken dam problem and the solitary wave propagation problem. The numerical results were in close agreement with the existing data. Illustrative examples were studied to show the effectiveness of the proposed numerical scheme.

#### 1. 서 론

이동하는 자유 표면을 갖는 비압축성 점성 유동 현상은 금속 재료의 주조, 고분자 수지의 사출 성형, 수지나 유리의 압축 성형 등 광범위한 공학 적용 분야를 갖는 흥미있는 문제 중의 하나이다. 재료 성형 공정에 있어서의 이동 경계를 갖는 유동 현상은 용융된 재료가 금형 내로 주입되는 충전 과정에서 발생하는데, 원재료의 물성과 금형의 형상, 성형 조건 등 많은 요인들이 현상에 영향을 준다.

금형 충전 과정의 해석에서 가장 중요한 문제는 매 시간 이동하는 자유 표면의 위치를 결정하는 것

이다. 이동하는 자유 표면을 추적하는 방법으로는, 계산 영역의 변화에 따라 매시각 격자를 이동하거나 변형시키는 이동 격자계(moving grid or Lagrangian grid)를 이용하는 방법과 금형 내부와 같은 관심을 두는 영역에 미리 격자를 나누어 두고 이를 바탕으로 경계의 이동을 처리하는 고정 격자계(fixed grid or Eulerian grid)를 이용하는 방법으로 크게 나눌 수 있다.<sup>(1)</sup> 두 방법은 나름대로의 장단점을 지니고 있기 때문에 해석하려는 문제의 특성에 따라 적절한 방법을 선택하여야 한다.

이동 격자계를 이용하는 Lagrangian 방법<sup>(2)</sup>은 시간 진행에 따른 계산 영역의 변화에 따라 계산 격자를 변형시키는 방법으로, 계산 영역의 경계의 일부가 자유 표면이 되므로 선분으로 자유 표면의 위치를 표현할 수 있다. 그러나, 충전 과정과 같이

\*서울대학교 대학원 기계공학과

\*\*회원, 서울대학교 기계공학과

계산 영역이 계속 확대되는 경우에는 격자의 변형이 심하게 발생할 수 있고, 또한 자유 표면이 벽면과 접촉하는 지점의 결정시에 어려움이 생긴다. 임의로 격자의 이동이 가능한 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 방법<sup>(3~5)</sup>도 유사한 특성을 갖는다.

고정 격자계를 이용하는 방법으로는 대표적으로 MAC(Marker and Cell) 방법과 VOF(Volume of Fluid) 방법이 있는데, 계산 초기에 미리 나누어 놓은 격자를 계산이 진행되어도 고정시켜 놓은 체 계산을 수행한다. 따라서 격자의 이동 및 변형 등의 문제는 발생하지 않으나, 자유 표면의 위치가 계산 격자와 일치하지는 않기 때문에 자유 표면의 이동을 처리하기 위한 별도의 기법이 요구된다. MAC 방법<sup>(6~8)</sup>은 고정 격자 상에서 가상적인 표시자(marker)들의 이동을 추적함으로써 계산 영역의 변화와 자유 표면의 위치를 표현하는 방법이다. Hirt와 Nichols<sup>(9)</sup>가 제안한 VOF 방법은 임의의 셀(혹은 검사 체적, 요소)에서의 유체가 차지하는 체적 비율을 정의하고, 다음과 같은 체적 비율  $F$ 에 대한 전달 방정식을 풀어서 시간에 따른 영역의 변화를 표현하는 방법이다.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}F) = 0 \quad (1)$$

이 방법은 Lagrangian 방법에서의 격자의 변형(혹은 이동)이나 MAC 방법에서의 표시자의 이동이 식 (1)의 해를 구하는 것으로 대체되므로, 자유 표면 형상의 변화가 많아도 표현이 가능하다는 고정 격자계를 이용하는 방법의 장점과 아울러 유한 요소법, 유한 체적법 등의 수치 해석 방법에 관계없이 기존의 코드에 쉽게 적용 가능하다는 점 때문에 이동하는 자유 표면을 갖는 유동 문제의 해석에 있어서 광범위하게 적용되고 있다.<sup>(10~17)</sup>

본 연구에서는 비압축성 점성 유동의 해법으로 유한 요소법을 기반으로 하고, VOF 방법을 적용하여, 이동하는 자유 표면이 있는 유동에 대한 해석 기법을 제시하고자 한다. 이를 위해 VOF 방법에 따라 정의된 요소의 체적 비율의 시간에 따른 변화를 기술하는 기존의 donor acceptor scheme을 유한 요소법에도 일반적으로 적용될 수 있도록 수정한 선택적인 VOF(selective VOF) 방법을 제안하였다. 이와 같은 기법을 이용하여 급형의 충전 과정을 수치 해석하여, 주입구나 배출구 결정 등의

급형 설계와 성형 조건 결정 등의 재료 성형 공정의 기초 자료를 제공함을 연구 목적으로 한다.

## 2. 지배 방정식과 유한 요소법

해석 대상을 물성이 일정한 뉴턴 유체로 하고 층류 유동을 가정하면, 비압축성 점성 유동의 지배 방정식인 연속 방정식, 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{u}$ 는 유체의 속도,  $\boldsymbol{\tau}$ 는 점성 응력(viscous stress),  $\mu$ 는 점도,  $P$ 는 압력,  $\mathbf{f}$ 는 체적력을 나타낸다.

또한 초기 조건과 경계 조건은 다음과 같다. (Fig. 1)

$$\text{초기 조건: } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \quad (5)$$

$$\text{경계 조건: } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \text{ on } \Gamma_1 \quad (6a)$$

$$(-P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \text{ on } \Gamma_2 \quad (6b)$$

본 연구에서는 유동 해석을 위한 수치 기법으로 유한 요소법을 채택하였고, 연속 방정식의 처리를 위해 운동량 방정식의 입력을 식 (7)과 같이 근사적으로 표현하는 penalty formulation을 적용하였다.<sup>(18~20)</sup>

$$P = -\gamma \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (7)$$

여기서,  $\gamma$ 는 아주 큰 값( $O(10^4 - 10^{13})$ )을 갖는 penalty parameter로써 Reynolds 수와 점도에 의존한다.<sup>(18)</sup>

운동량 방정식의 시간에 대한 차분은 내재적 기

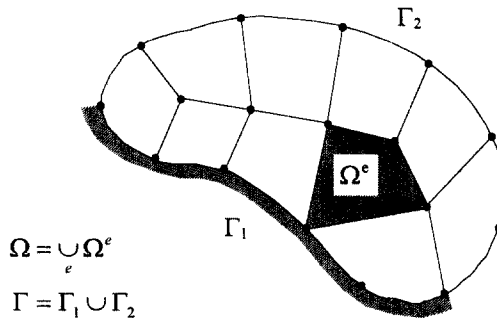


Fig. 1 Finite element discretization of a domain

법을 사용하였고, 비선형항의 처리는 이전 단계의 값을 반복적으로 대입하여 선형화하는 Picard iteration을 사용하였다. 또한 Galerkin 근사할 때 나타나는 수치적인 진동(wiggle)을 막기 위하여 Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin(SU/PG) 방법<sup>(21)</sup>을 적용하면, 완화된 형태의 적분식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \{ \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \gamma (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{w}) \} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $\hat{\mathbf{u}}$ 는 전단계 반복 계산의 결과를 나타내며,  $\mathbf{w}$ 는 Galerkin 가중 함수이고,  $\hat{\mathbf{w}}$ 는 SU/PG 방법에 의해 속도 방향으로 작용하는 항이 추가되어 있는 가중 함수로서 관성항에만 적용하였다.

본 연구에서는 해석 대상을 2차원 평면 혹은 축대칭 형상으로 하였으며, 유한 요소는 VOF 방법과의 효율적인 연계를 위해 4노드 사각형 요소만을 사용하였다. 적분은 Gauss quadrature를 사용하였고, 과도한 constraint의 적용에 따른 해의 수치적인 잠김 현상을 막기 위해 penalty 항의 적분에는 1차 낮은 수치 적분을 행하였는데 이를 reduced integration이라 한다.<sup>(18-20)</sup> 또한 운동량 방정식의 반복 계산에 있어서 절대 오차가  $10^{-6}$ 보다 작으면 ( $|\mathbf{u}_i - \hat{\mathbf{u}}_i| < 10^{-6}$ ) 수렴한 것으로 판정하였다.

### 3. VOF 방법

VOF (Volume of Fluid) 방법을 사용한 기존의 연구들은 대부분 유한 차분법 혹은 유한 체적법을 기반으로 하고 있는데, 계산 영역의 형상이 복잡한 경우에는 격자의 생성이 어려워진다. 본 연구에서는 계산 영역의 기하학적인 형상에 크게 구애받지 않는 유한 요소법을 수치 해석 기법으로 채택하였고, 이에 적합하게 VOF 방법을 적용하였다.

Fig. 2는 금형 내로 유체가 주입되는 과정에서 임의의 시각에 유체가 차지하고 있는 영역을 도식적으로 나타낸 그림이다. 물리적으로 관심있는 유체와 공기는 자유 표면을 경계면으로 하여 step function과 같이 영역이 명확하게 구분되며, 자유 표면은 말 그대로 변(2차원의 경우는 선)으로 표현

된다. 그런데, VOF 방법에서는 다음과 같은 임의의 요소에서의 유체가 차지하는 체적 비율을 정의하여 영역을 구분한다.

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{\text{volume of fluid}}{\text{volume of element}} = \begin{cases} 1 & : \text{filled} \\ >0 \text{ and } <1 & : \text{partially filled} \\ 0 & : \text{empty} \end{cases} \quad (9)$$

위의 정의에 의하면  $F$ 의 값이 0과 1 사이에 있는 요소 내에 자유 표면이 위치하게 된다. 비압축성 유동이고 유체의 질량은 보존되므로 시간 진행에 따른 계산 영역의 변화와 자유 표면의 이동은 앞서 언급한 바와 같이 식 (1)의 해를 구하는 것으로 대체된다. 식 (1)과 같이 주어진 유체의 체적 비율 전달 방정식을 임의의 요소에 대하여 적분을 취한 후, 시간에 대해 전방 차분하면 다음과 같은 형태의 식이 유도된다.

$$F_i^{new} = F_i^{old} + \frac{\Delta t}{\int_{\Omega_i} d\Omega} \times \left[ - \int_{\Gamma_i} (\mathbf{F} \mathbf{r} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \right] \quad (10)$$

여기서,  $F_i^{new}$ 와  $F_i^{old}$ 는 각각 이전 시간과 새로이 계산된 유체의 체적 비율,  $\Delta t$ 는 계산 시간의 증분,  $\Gamma_i$ 와  $\mathbf{n}$ 은 각각 요소  $i$ 의 경계면과 그의 법선 방향의 단위 벡터를 나타낸다.

한편, 임의의 요소 경계면에서의 체적 플럭스는 속도 벡터뿐 아니라 요소의 특성에 따라서도 그 값이 다르게 나타나는데, 몇 가지 전형적인 경우에 대해 경계면을 공유하는 두 요소 간의 체적 플럭스에 대해 살펴 보기로 한다. Fig. 2(a)와 같이 인접한 두 요소가 모두 유체 영역의 내부에 있는 경우에는 공유하고 있는 경계면을 통한 유체의 체적 플

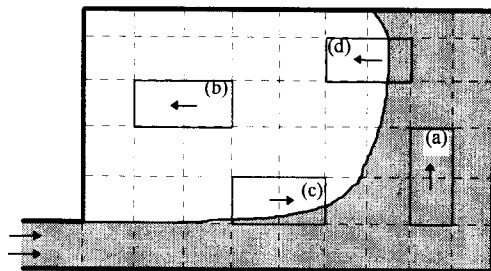


Fig. 2 Computational domain and Eulerian mesh in mold filling process

력스는  $\int_{r_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma$ 이다. 반면 Fig. 2(b)와 같이 인접한 두 요소가 모두 유체 영역 외부에 있는 경우에는 요소 내에는 유체가 전혀 없으므로 경계면을 통해 전달되는 유체의 체적 플럭스는 0이다.

이상의 두 가지 경우는 쉽게 결정할 수 있는 반면, Fig. 2(c), (d)와 같이 두 요소가 자유 표면에 걸쳐있는 경우에는 체적 플럭스의 값이 앞서의 두 경우의 값 사이에 있음은 분명하지만, 요소 내의 자유 표면의 기울기에 따라 달라진다. 이와 같은 현상을 반영하기 위해 도입된 계수가 식 (10)의 두 번째 항에 있는  $F_R$ 이다. 이를 임의의 요소의 경계면에 대한 체적 전달률이라 하고, 다음과 같이 정의한다.

$$F_{Rik} = \frac{\text{fluid volume transferred}}{\text{total volume transferred through } \Gamma_{ik}} \quad (11)$$

여기서, 하첨자  $i$ 는 요소를,  $k$ 는  $i$ 번째 요소의  $k$ 번째 경계를 나타낸다.

VOF 방법에서는 앞서 언급한 바와 같이 체적 비율이 0과 1 사이의 값을 갖는 경계 영역이 존재하는데, 이러한 영역은 가끔적이면 적은 수의 요소 내에 있어야 정확한 자유 표면의 형상을 나타낼 수 있다. 그런데, 대류항만이 존재하는 식 (1)의 단순한 이산화 과정을 통해서는 체적 비율의 수치적인 확산이 발생한다.<sup>(9,15)</sup> 이는 체적 비율이 0과 1 사이의 값을 갖는 요소의 수가 점점 증가함을 의미하고, 이렇게 되면 계산이 진행될수록 정확한 자유 표면의 위치를 결정하기가 점점 곤란해진다.

그런데, Fig. 2(c), (d)와 같이 자유 표면이 걸쳐있다고 간주되는 요소에서는 주위 요소들과 체적 비율의 차이가 존재한다. 이러한 경계면에 걸쳐있는 요소와 주위 요소 간의 체적 비율의 차이에는 자유 표면의 기울기에 대한 정보가 내포되어 있다. 이와 같이 주위 요소들을 통해 알 수 있는 각 요소에서의 자유 표면의 기울기와 체적 비율을 통해 경계면에서의 체적 전달율을 합리적으로 결정하면, 체적 비율의 수치적인 확산 현상이 억제된다.

VOF 방법의 적용시 수치적인 확산을 억제하기 위한 대표적인 기법으로는 SOLA-VOF 코드<sup>(10)</sup>에서 사용된 donor acceptor scheme이 있으며, 그 외에도 SLIC,<sup>(22)</sup> Youngs<sup>(23)</sup>의 방법, FLAIR,<sup>(24-26)</sup> pattern filling technique,<sup>(27)</sup> net inflow method<sup>(28)</sup> 등이 있다. 구체적으로는 다소의 차이는 있지만 경

계면의 수치 확산을 방지하기 위해 주변의 요소의 체적 비율을 고려하여 고정 격자 상에서 가상 자유 표면을 구성하여 이를 토대로 체적 전달율의 값을 결정하는 기본적인 개념은 유사하다고 볼 수 있다.

일반적으로 자유 표면의 전진 기법의 선정에 있어서는 다음과 같은 점이 고려되어야 한다.<sup>(15)</sup>

- 경계면에서 발생하는 수치 확산의 억제
- 불규칙한 격자에의 적용 가능성
- 간단한 방법으로도 자유 표면의 형상을 효과적으로 표현 가능(3차원으로의 확장 고려)

본 연구에서는 인접한 두 요소 간의 체적 전달율 결정을 위한 기법으로 기존의 donor acceptor scheme을 수정한 선택적인 VOF(selective VOF) 방법을 제안하였다. 제안된 기법은 2차원 형상에 적용되는 4 노드 사각형 요소를 기반으로 하며, 유동 해석의 수치 기법으로 택한 유한 요소법과 원만히 결합될 수 있도록 수정하였다.

Fig. 3에서는 대표적인 몇 가지 경우에 대한 예를 나타내었는데, 경계면을 끼고 있는 두 요소 중 속도를 기준으로 상류쪽의 요소를 donor, 하류쪽의 요소를 acceptor로 정의한다.  $F_R$ 의 값은 그림에서 보는 바와 같이 수치 확산을 방지하기 위하여 자유 표면의 기울기의 경향에 따라 donor 혹은 acceptor의 충전 비율 중의 하나로 정하였다. Donor 요소를 중심으로 주변의 요소들의 충전 비율을 통해 유추되는 자유 표면의 기울기 경향이 donor와 acceptor 요소에 의해 공유되어 있는 경계면과 대체로 수직이면 donor 요소의 충전 비율을, 수평이거나 혹은 45° 정도의 각도를 갖는다고 간주되면 acceptor 요소의 충전 비율을 채택한다. 여기서 말하는 기울기의 경향은 체적 전달율을 결정하기 위해 가상적으로 설정한 자유 표면의 형상을 가리키는 것으로, 주위 요소들의 체적 비율에 따라 여러 가지 경우가 발생하는데, 이를 다음과 같은 알고리즘으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{if } (F_D=1 \text{ or } F_D=0) \text{ then } F_R=F_D \\ & \text{else} \\ & \quad \text{if } ((F_{DD}=1 \text{ and } F_A=0) \text{ or} \\ & \quad (F_{DD}=0 \text{ and } F_A=1) \text{ then } F_R=F_A \\ & \quad \text{else if } ((F_{DD}=F_A=1) \text{ or} \\ & \quad (F_{DD}=F_A=0)) \text{ then } F_R=F_D \\ & \quad \text{else if } (F_A=1) \text{ then } F_R=F_A \\ & \quad \text{else if } ((0 < F_{DD} < 1 \text{ and } 0 < F_A < 1) \\ & \quad \text{and } (F_{DS1}=1 \text{ and } F_{DS2}=0)) \text{ then} \end{aligned}$$

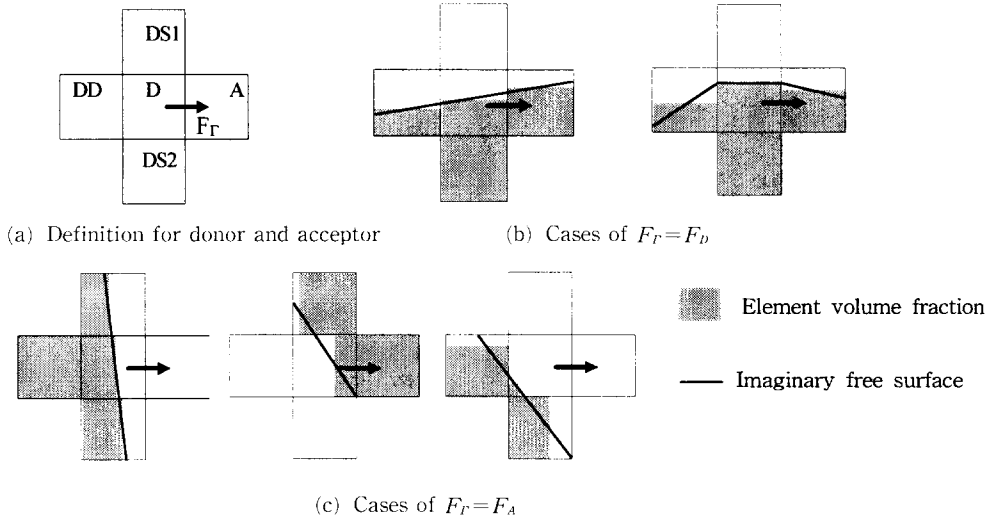


Fig. 3 Determination of the ratio of fluid volume transferred between donor and acceptor elements

$F_r = F_D$   
 else if  $(F_{Dn} > F_n > F_A$  or  
 $F_{Dn} < F_n < F_A)$  then  $F_r = F_A$   
 else  $F_r = F_D$   
 end if

여기서,  $F_D$ 와  $F_A$ 는 각각 donor와 acceptor 요소의 체적 비율을 나타낸다.

이상의 과정은 요소 내에서 자유 표면의 형상을 결정하기 위한 함수를 구하는 등의 별도의 계산 없이 사각형 요소를 기반으로 주위의 체적 비율을 이용하여 donor 요소의 기울기 경향만을 반영하였으며, 경계면에서의 체적 전달율의 결정 과정을 donor나 acceptor 요소의 체적 비율을 사용하는 것으로 단순화하였으므로 비정규 격자로의 확장이 가능하다.

요소의 경계면이 벽 혹은 중심선인 경우는 측면을 공유하는 요소가 존재하지 않는다. 이런 경우는 경계면을 제외한 나머지 면을 공유하는 요소들의 경향으로 기울기 경향을 결정해 준다. 하지만 내부 영역의 경우와의 일관성을 위하여 Fig. 4와 같이 벽 혹은 중심선인 경계를 공유하는 가상적인 요소를 설정하고, 주변 요소들의 충전 비율의 경향에 따라 가상 요소의 충전 비율을 1, 0 혹은  $F_D$  중 하나로 정해주면 위의 알고리즘이 동일하게 적용된다.

이러한 과정을 거치면 전 영역에서 요소 경계를 통한 체적 유입량이 결정되고, 계산 시간 간격이

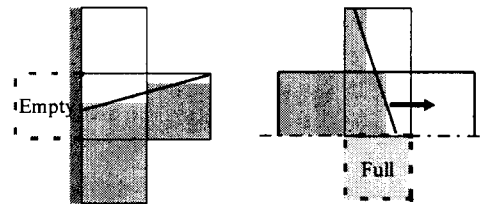


Fig. 4 Illustration of special treatments for wall or symmetric boundaries

주어지면 식 (10)에 의해 체적 비율이 결정된다. 그런데, 주어진 계산 시간 증분이 어느 정도 이상이면 요소내에 유체가 과도하게 차거나 비는 경우가 생길 수 있다. 본 연구에서는 요소의 경계면에 대한 체적 전달율을 먼저 결정하였기 때문에 이에 따라 계산 시간 증분은 임의의 요소에 대해 다음과 같은 제한을 둔다.

Volume flux of element  $> 0$ 인 경우

$$\Delta t \times \left[ - \int_r (F_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \right] = (1 - F_i^{old}) \int_{\Omega_i} d\Omega \quad (12a)$$

Volume flux of element  $< 0$ 인 경우

$$\Delta t \times \left[ - \int_r (F_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \right] = (0 - F_i^{old}) \int_{\Omega_i} d\Omega \quad (12b)$$

체적 비율의 변화를 계산하기 위한 시간 증분은 모든 요소에서 위의 제한에 의해 결정된 것 중 최

소값을 취한다. 이렇게 결정된 시간 간격은 외재적 기법에서 요소의 Courant 수 ( $u_i \Delta t / \Delta x_i$ )가 1보다 작아야 한다는 제한을 자동적으로 만족한다.

유체의 체적 비율을 유한 요소를 바탕으로 진행 하였으므로, 매 시각 진행되는 자유 표면의 위치를 나타내기 위하여 요소 내에 Fig. 5와 같이 보조 요소로 구성된 검사 체적에 대한 체적 비율을 정의한다.

$$F_{cv} = \frac{\sum F_k^i V_k^i}{\sum V_k^i} \quad (13)$$

여기서,  $i$ 는 검사 체적,  $k$ 는 검사 체적  $i$ 에 포함된 보조 요소,  $V_k^i$ 는 보조 요소의 체적,  $F_k^i$ 는 보조 요소가 속해있는 본래의 요소의 체적 비율을 나타낸다. 이렇게 정의한 검사 체적의 체적 비율은 각 노드에 대응되므로, 요소 내에서 보관하여 자유 표면의 위치를 나타낸다.

대개의 경우 주입되는 유체의 운동에 관심이 있으므로, 계산에 드는 노력을 덜기 위하여 본 연구에서는 계산 영역을, 주입되는 공기의 영역은 제외하고 주입되는 유체가 차지하고 있는 영역만으로 한정하였다. 일반적으로, 미리 구성해 놓은 고정 격자는 매 시각 진행되는 자유 표면과는 일치하지 않으므로 요소의 체적 비율이 0.5 이상인 요소를 계산 영역으로 정하였다. 경계 영역에 있는 요소 ( $0 < F < 1$ )의 물성은 혼합 법칙(rule of mixture)을 써서 구하였고, 계산에 사용된 공기의 물성은  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 로 주었다. 자유 표면에서는 접선 방향, 법선 방향의 응력이 작용하지 않는 조건을 주었다.

이상과 같은 계산 과정을 간단하게 정리하면 다음과 같은 흐름을 따른다.

- 1) 관심 영역에 고정 격자계를 구성한다.
- 2) 유한 요소법에 의해 연속 방정식, 운동량 방정식을 푼다.
- 3) 주위 요소들의 체적 비율에 따른 기울기의 경

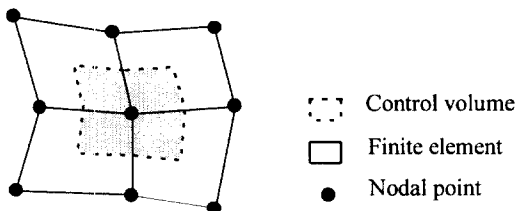


Fig. 5 Definition of a control volume

향을 고려하여 경계면에서의 체적 전달율을 결정한다.

4) 계산된 속도를 기반으로 경계를 통한 체적 플럭스를 계산한다.

5) 전진 알고리즘에 따라 시간 간격을 결정하고, 새로운 충전 비율을 구한다.

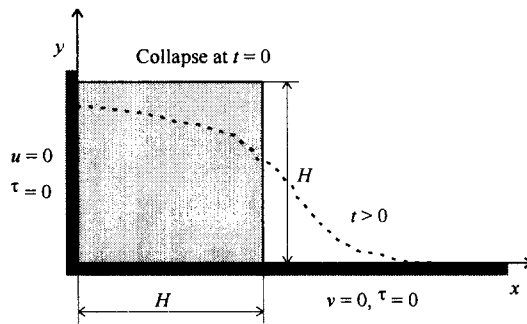
6) 마지막 시간까지 2)~5)의 과정을 반복한다.

#### 4. 제안된 기법의 검증

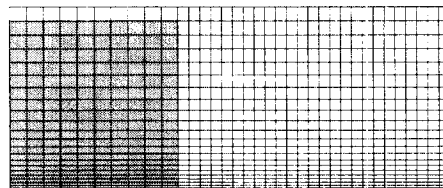
본 연구의 자유 표면 전진 기법의 검증을 위하여 댐 붕괴 문제와 solitary wave 전파 문제를 해석하여 기존의 연구 결과들과 비교하였다.

먼저, 댐 붕괴 문제는 Fig. 6(a)와 같이 순간적으로 물막이를 제거한 후 붕괴되는 물 기둥의 진행을 고찰하는 문제로서, 초기 형상이 간단하고, 자유 표면의 전진과 후퇴가 함께 있으며, Martin과 Moyce<sup>(29)</sup>의 실험 결과와 비교할 수 있어서 Harlow와 Welch,<sup>(6)</sup> Hirt와 Nichols,<sup>(9)</sup> Huerta와 Liu,<sup>(4)</sup> Wang과 Wang<sup>(28)</sup> 등 각기 다른 수치 해석 방법을 적용한 연구자들이 공통적으로 인용한 대표적인 검증 문제이다.

Martin과 Moyce의 실험 결과와 비교하기 위하여 붕괴되는 댐에 가두어져 있는 유체는 물( $\rho =$



(a) Definition sketch



(b) Finite element mesh

Fig. 6 Definition sketch and finite element mesh of broken dam problem

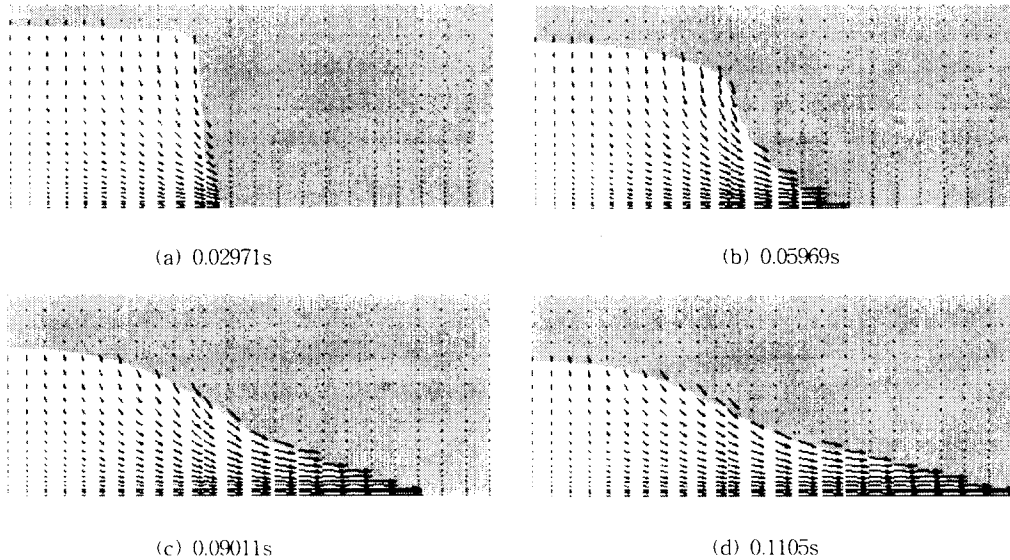


Fig. 7 Velocity vectors and free surface positions of broken dam problem at different times

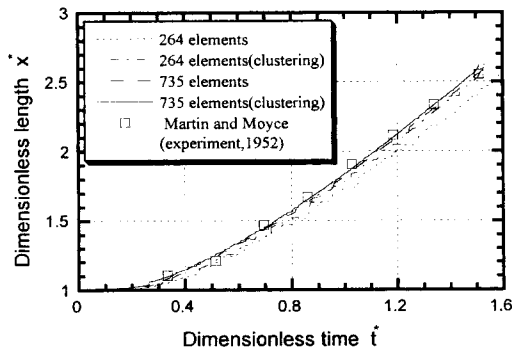


Fig. 8 Comparison of front tip position by numerical calculation with experimental result

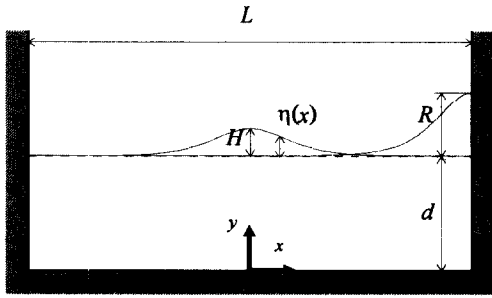
$1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ )로 하였고, 초기 형상은  $H=0.05715 \text{ m}$ 인 정사각형으로, 중력 가속도는  $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 로 주고 계산하였다. Fig. 6(b)는 격자의 전형적인 형상이다. 고정 격자를 기반으로 한 전진 기법의 정확도는 기본적으로 격자의 양과 질에 의존하는데, 그 영향을 살펴보기 위해 요소의 갯수를 264( $24 \times 11$ )개와 735( $35 \times 21$ )개 두 가지로 계산하였고, 균일한 요소 배열과 바닥면에서 보다 조밀하게 나눈 요소 배열에 대해 계산하였다. Fig. 7은 요소 갯수 735개 비균일 요소 배열일때, 시간에 따른 자유 표면의 진행과 계산 영역에서의 속도를 그린 그림이다.

Martin과 Moyce의 실험에서는 쏟아진 물이 바

닥면에 접촉한 선단의 위치를 측정하였는데, 결과 비교를 위해 무차원 길이와 시간을 각각  $x^*=x/H$ ,  $t^*=t\sqrt{g/H}$ 로 정의하였다. Fig. 8은 실험 결과와 본 연구의 계산 결과를 비교한 그림인데, 네 가지 계산 결과는 실험 결과와 그 경향이 부합됨을 볼 수 있다. 격자의 영향을 살펴보면 역시 요소 수가 많고, 바닥면의 요소가 조밀할 때 실험 결과와 잘 일치한다. 요소 수가 적더라도 변화가 급격한 부분에 요소를 조밀하게 배열하면 결과의 정확도를 향상시킬 수 있었다.

두 번째 검증 문제는 solitary wave 전파 문제의 해석으로 그 개략적인 그림이 Fig. 9(a)이다. 비점성 유동의 경우 무한 길이의 영역에 대해 Laitone,<sup>(30)</sup> Byatt-Smith<sup>(31)</sup> 등이 해석해를 구하였고, Maxworthy,<sup>(32)</sup> Chan과 Street<sup>(8)</sup>의 실험 결과와도 비교할 수 있다. 또한 수치 해석적인 연구로는 Ramaswamy와 Kawahara,<sup>(3)</sup> 최형권,<sup>(5)</sup> Baek과 Chung<sup>(33)</sup> 등 여러 연구가 수행된 바 있다.

계산 격자의 전형적인 형상은 Fig. 9(b)와 같이, 요소의 배열은 정규 배열이나 그 형태는 파의 초기 형상에 따라 부분적으로 요소의 형상이 변형되어 있다. 물성은 앞서의 문제와 동일하고, 경계 조건은 바닥면과 옆의 벽면에서 미끄럼 조건을 주었다. 기하학적인 조건은  $d=1 \text{ m}$ ,  $L=16 \text{ m}$ 이고, 자유 표면의 초기 형상과 유동장의 초기 조건은 Laitone의 연구에 따라 다음과 같이 주었다.

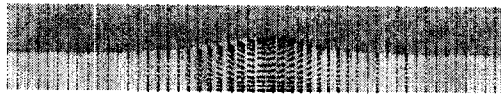


(a) Definition sketch

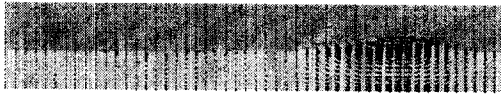


(b) Finite element mesh

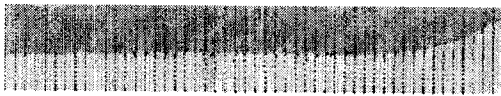
Fig. 9 Definition sketch and finite element mesh of solitary wave propagation problem



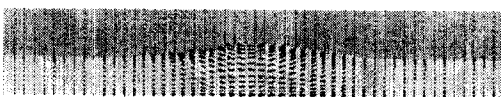
(a) 0.000s



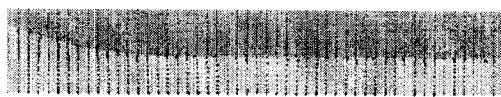
(b) 1.151s



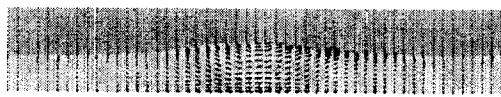
(c) 2.313s



(d) 4.523s



(e) 6.916s



(f) 9.134s

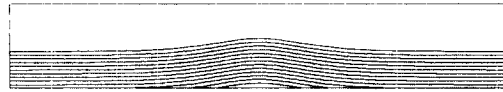
Fig. 10 Velocity vector and free surface position of solitary wave propagation problem at different times

$$u = \sqrt{gd} \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right) \quad (14a)$$

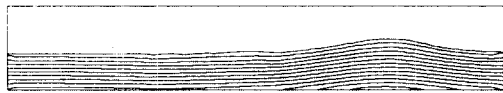
$$v = \sqrt{3gd} \left(\frac{H}{d}\right)^{3/2} \left(\frac{y}{d}\right) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right) \operatorname{tanh}\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right) \quad (14b)$$

$$y = d + \eta = d + H \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}x\right) \quad (14c)$$

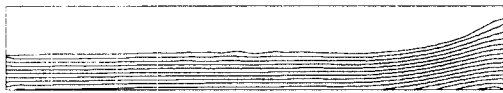
본 연구에서  $H/d$ 의 값을 0.2~0.5로 변화시키면서 계산하였는데,  $H/d=0.4$ 일 때 계산한 1주기 동안의 자유 표면의 형상과 속도 분포를 Fig. 10에 나타내었다. 파의 최대 지점이 각각 우, 좌 측 벽에 도달하는 1/4, 3/4주기에서는 파의 진행이 벽에 의해 제한되므로 운동 에너지가 포텐셜 에너지로 변환되고, 반 주기 또는 1주기 때에는 다시 운동 에너지로 복원됨을 볼 수 있다. Laitone의 연구에 따르면, 파의 평균 진행 속도와 압력 분포는 다음



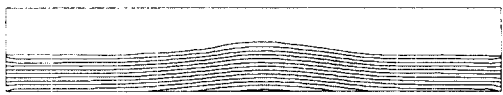
(a) 0.000s



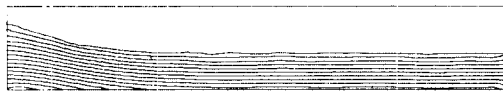
(b) 1.151s



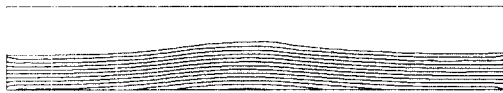
(c) 2.313s



(d) 4.523s



(e) 6.916s



(f) 9.134s

Fig. 11 Pressure contours of solitary wave propagation problem at different times



과 같다.

$$\sqrt{\frac{c}{gd}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{d} + O\left(\frac{H}{d}\right)^2 \quad (15a)$$

$$P = \rho g(d + \eta - y) + O\left(\frac{H}{d}\right)^2 \quad (15b)$$

매 시각의 압력 분포를 그린 결과 그림이 Fig. 11인데, Laitone의 해석해의 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

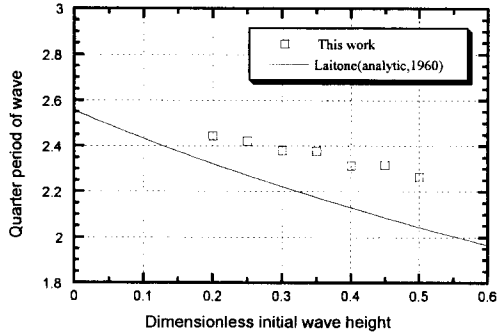


Fig. 12 Comparison of quarter period by numerical method with analytic solution

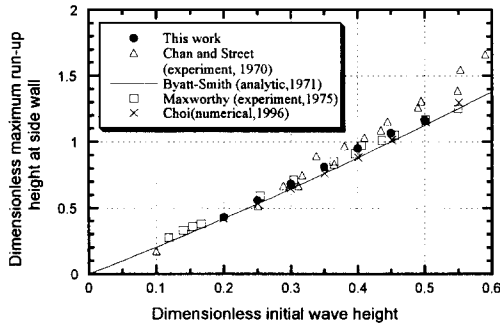


Fig. 13 Comparison between the numerical results with existing data

파의 최대 높이가 우측 벽에 도달하는 1/4주기를 식 (15a)에서 계산하여 수치 해석 결과와 비교한 그림이 Fig. 12인데, 경향은 일치하나 수치 해석 결과가 약간 큰 값을 갖는다. 이런 경향은 다른 수치 해석 연구 결과들도 마찬가지인데, 해석하는 무한 길이의 영역에서 구한 결과이나 수치 해석에서는 유한한 길이의 양단에 벽면을 두기 때문이라 생각된다.

또한, 벽면에서의 최대 높이를 기존의 연구들과 비교해 보면, Byatt-Smith<sup>(31)</sup>는 반대 방향으로 진행되는 동일한 두 파동을 중첩하여 파동의 진행과 최대 높이를 구하였는데, 최대 높이는 다음과 같다.

$$\frac{R_{\max}}{d} = 2\left(\frac{H}{d}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{d}\right)^2 + O\left(\frac{H}{d}\right)^3 \quad (16)$$

$H/d$ 의 값을 0.2~0.5로 변화시키면서 계산한 본 연구의 결과를 Byatt Smith의 해석해와 Maxworthy, Chan과 Street 등의 실험 결과, 최형권의 수치 해석 결과와 비교한 그림이 Fig. 13인데, 기존의 연구 결과들과 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

### 5. 금형 충전 과정의 해석

위와 같이 검증된 프로그램을 가지고 사각 단면의 금형에 주입되는 유체가 충전되어 가는 과정을 해석하였다. 계산 격자와 경계 조건은 Fig. 14에 나타내었고, 평균 주입 속도는 1 m/s이다. 주입되는 유체의 물성은  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 로 주었다.

동일한 형상의 금형에 대해 다음과 같이 세 가지 경우에 대하여 계산하였다.

- 1) 평면 2차원, 수평면에 놓여있어 중력이 작용

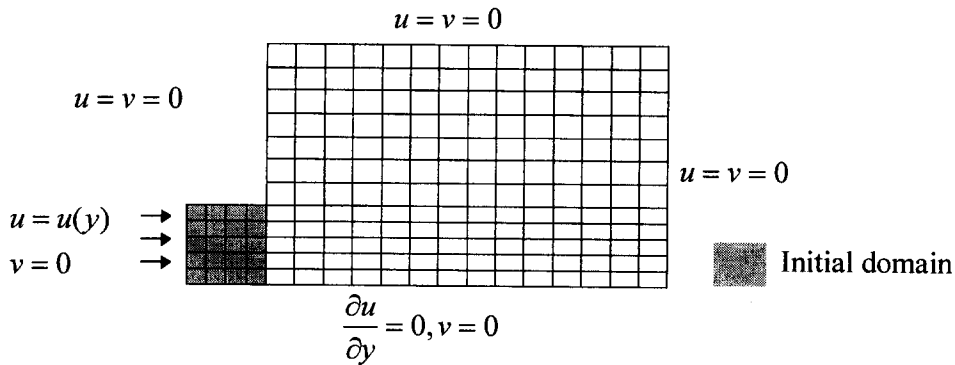


Fig. 14 Finite element mesh and boundary conditions for mold filling

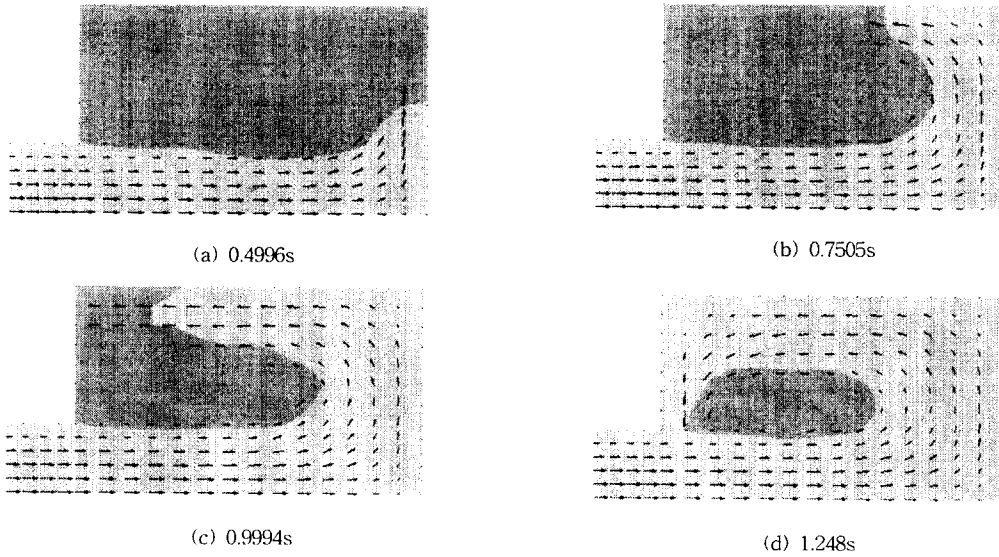


Fig. 15 Flow patterns of filling into horizontal mold cavity at different times

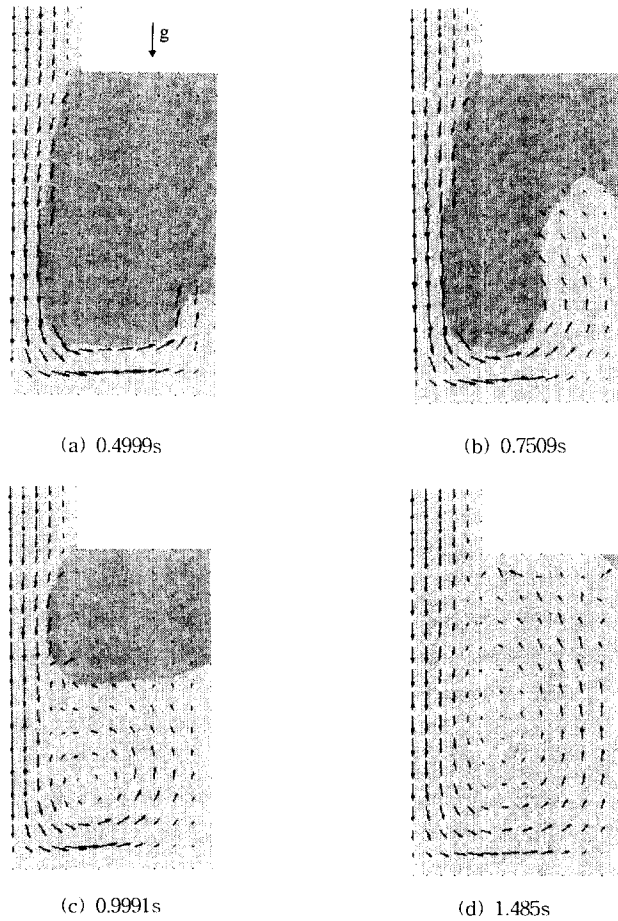


Fig. 16 Flow patterns of filling into vertical mold cavity in the presence of gravity at different times

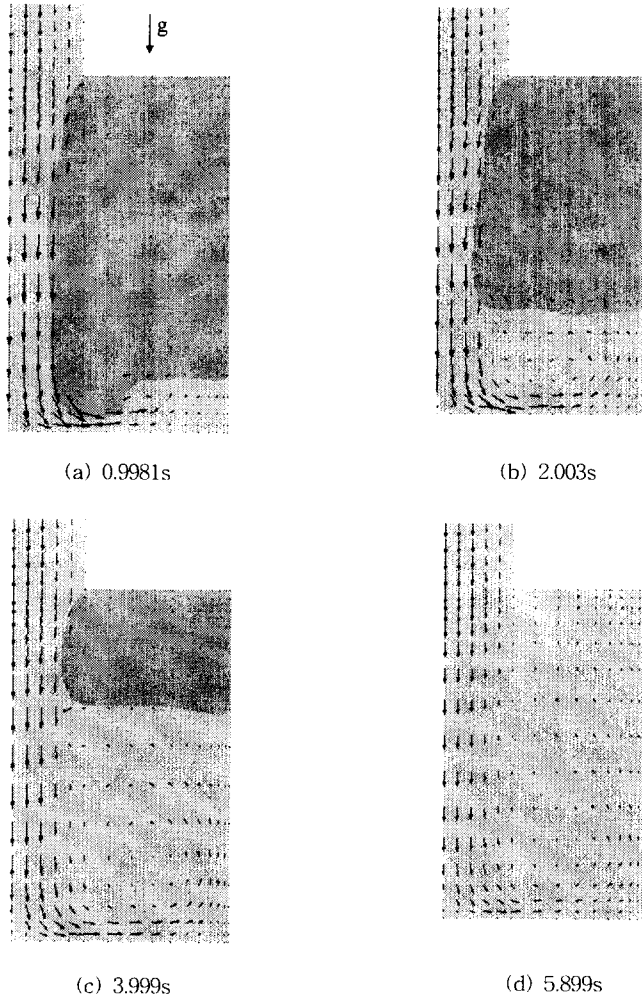


Fig. 17 Flow patterns of filling into vertical axisymmetric mold cavity in the presence of gravity at different times

하지 않음

2) 평면 2차원, 주입구가 상단에 있고 중력이 작용함

3) 축대칭, 주입구가 상단에 있고 중력이 작용함 위의 세 가지 경우에 대하여 주어진 시각에서의 자유 표면의 형상과 속도 분포를 그린 그림이 Fig. 15~17이다.

1)의 경우는 주입구에서 주입된 유체가 맞은 편 벽면에 부딪혀 진행 방향을 바꾸어 계속적으로 벽면을 타고 진행하며, 충전이 완료될 무렵에는 자유 표면은 금형의 중심부에 형성된다. 2)와 3)의 경우는 중력이 작용하므로 주입구 맞은편 바닥에 차례로 쌓여가는 진행을 보인다. 2)의 경우는 일정 시

간 동안은 관성력에 의해 수평면의 유동과 같이 벽을 타고 진행하지만, 중력이 반대 방향으로 작용하여 유동이 바닥면으로 무너져 내리고, 이후 형성되는 자유 표면은 비교적 평평하게 상승하게 된다. 금형 충전이 완료될 무렵에는 금형 상단의 모서리에 자유 표면이 형성되므로 금형을 설계할 때 이 부분에 공기 배출구를 설치해야 한다. 3)의 경우는 주입구에서 유체가 쏟아져 내린 후 바닥면에서부터 계속 평평하게 상승하는데, 이는 축대칭 형상에서는 중심축에서 멀어질수록 요소의 체적이 증가하므로 속도가 감소하기 때문이다. 충전이 완료될 무렵에는 자유 표면이 금형 상단의 중앙 부분에 형성된다.

충전 알고리즘의 정확도를 판단할 수 있는 주요 결과인 금형의 충전 시간을 살펴보면, 주입구의 평균 속도로 계산한 충전 시간은 평면 유동의 경우는 1.5s, 축대칭 유동의 경우는 6s이다. 그런데, 위의 세 가지 경우에 대한 수치 해석에서의 충전 시간은 각각 1.50613s, 1.52396s, 5.94371s이다. 충전 시간의 오차가 2% 이내로 계산 오차의 누적에 의한 유동 손실이 거의 없이 자유 표면의 이동을 예측할 수 있음을 간접적으로 확인할 수 있다.

## 6. 결 론

재료 성형 공정에서 나타나는 이동하는 자유 표면이 있는 유동을 해석할 수 있는 수치적인 해석 기법을 개발하기 위한 연구를 수행하였다. 매시각 변화하는 자유 표면의 형상을 추적하기 위해 고정 격자계를 기반으로 한 VOF 방법을 사용하였다. VOF 방법을 적용할 때 나타날 수 있는 체적 비율의 수치적인 확산을 방지하는 기법으로는, 기존의 donor acceptor scheme을 기반으로 하여 유한 요소법에서 사용되는 비정규 격자계에도 일반적으로 적용될 수 있도록 수정한 선택적인 VOF(selective VOF) 방법을 제안하였다. 또한 기존의 대표적인 예제의 해석을 통하여 제시된 기법의 타당성을 검증하였다. 이를 토대로 공학적인 응용 분야로서 금형 충전 과정을 해석하였다.

델 붕괴 문제와 solitary wave 전파 문제의 결과는 기존의 연구 결과들과 일치함을 확인하였다. 또한, 격자 재생성에 따른 복잡성이 없는 VOF 방법의 특징을 살려, 금형 내부에서 자유 표면 형상의 변화가 많은 충전 과정의 해석에 있어서도 효과적으로 적용할 수 있었다. 이러한 해석 결과는 금형 설계시 주입구와 배출구의 위치 결정의 기초 자료로 활용될 수 있다. 본 연구의 유동 해석을 바탕으로 온도 해석과 난류 모델링을 첨가하여, 금형 설계와 공정 조건의 결정에 보다 전반적인 자료를 제공할 수 있는 프로그램의 개발이 향후 과제이다.

## 후 기

본 연구는 교육부 기계공학 학술 연구 조성비(과제번호 : ME94-A-03) 지원에 의하여 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Floryan, J. M. and Rasmussen, H., 1989, "Numerical Methods for Viscous Flows with Moving Boundaries," *Appl. Mech. Rev.*, 42, pp. 323~341.
- (2) Bellet, M. and Chenot, J. L. 1993, "A Lagrangian Approach to Fluid Flow in Metal Casting Processes," L. C. Wrobel and C. A. Brebbia (eds.), *Computational Methods for Free and Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow*, Elsevier, London, pp. 287~316.
- (3) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., 1987, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7, pp. 1053~1075.
- (4) Huerta, A. and Liu, W. K., 1988, "Viscous Flow With Large Free Surface Motion," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 69, pp. 277~324.
- (5) 최형권, 1996, "분리 유한 요소법을 이용한 Navier-Stokes 방정식의 해법에 대한 연구," 공학박사 학위논문, 서울대학교.
- (6) Harlow, F. H. and Welch, J. E., 1965, "Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Phys. Fluids*, 8, pp. 2182~2189.
- (7) Vieceili, J. A., 1969, "A Method for Including Arbitrary External Boundaries in the MAC Incompressible Fluid Computing Technique," *J. Comp. Phys.*, 4, pp. 543~551.
- (8) Chan, R. K. -C. and Street, R. L. 1970, "A Computer Study of Finite-amplitude Water Waves," *J. Comp. Phys.*, 6, pp. 68~94.
- (9) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comp. Phys.*, 39, pp. 201~225.
- (10) Nichols, B. D., Hirt, C. W. and Hotchkiss, R. S., 1980, "SOLA-VOF: A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries," *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, LA-8355.

- (11) Partom, I. S., 1987, "Application of the VOF Method to the Sloshing of a Fluid in a Partially Filled Cylindrical Container," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7, pp. 535-550.
- (12) Lin, H. J. and Hwang, W. -S., 1988, "Combined Fluid Flow and Heat Transfer Analysis for the Filling of Castings," *AFS Trans.*, 96, pp. 447-458.
- (13) Dhatt, G., Gao, D. M. and Cheikh, A. B., 1990, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30, pp. 821-831.
- (14) Usmani, A. S., Cross, J. T. and Lewis, R. W., 1992, "A Finite Element Model for the Simulation of Mould Filling in Metal Casting and the Associated Heat Transfer," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 35, pp. 787-806.
- (15) Swaminathan, C. R. and Voller, V. R., 1994, "A Time-Implicit Filling Algorithm," *Appl. Math. Modelling*, 18, pp. 101-108.
- (16) Rice, A. B., 1993, "Numerical Simulation of Mold Filling Processes," Ph. D. Theses, Purdue University.
- (17) Lewis, R. W., Usmani, A. S. and Cross, J. T., 1995, "Efficient Mould Filling Simulation in Castings by an Explicit Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 20, pp. 493-506.
- (18) Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Brooks, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *J. Comp. Phys.*, 30, pp. 1-60.
- (19) Reddy, J. N. and Gartling, D. K., 1994, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, USA.
- (20) Carey, G. F. and Oden, J. T., 1986, *Finite Elements*, Volume VI, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA.
- (21) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32, pp. 199-259.
- (22) Noh, W. F. and Woodward, P., 1976, "SLIC (Simple Line Interface Calculation)," van de Vooren, A. I. and Zandbergen P. J. (eds), *Lecture Notes in Physics*, 59, *Proc. Fifth Int. Conf. Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, pp. 330-340.
- (23) Youngs, D. L., 1982, "Time-Dependent Multi-material Flow with Large Fluid Distortion," Morton, K. W. and Baines M. J. (eds), *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic, New York, pp. 273-285.
- (24) Ashgriz, N. and Poo, J. Y., 1991, "FLAIR : Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction," *J. Comp. Phys.*, 93, pp. 449-468.
- (25) Mashayek, F. and Ashgriz, N., 1995, "Advection of Axisymmetric Interfaces by the Volume-of-fluid Method," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 20, pp. 1337-1361.
- (26) Mashayek, F. and Ashgriz, N., 1995, "A Hybrid Finite-Element-Volume-of-Fluid Method for Simulating Free Surface Flows and Interfaces," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 20, pp. 1363-1380.
- (27) 정준호, 양동열, 1995, "패턴 충전 기법과 세분화된 유동장 재생성 기법을 이용한 자유 표면을 가진 비압축성 점성 유동의 수치적 모사," 대한기계학회 95년도 추계학술대회 논문집(I), pp. 903-908.
- (28) Wang, S. P. and Wang, K. K., 1994, "A Net Inflow Method for Incompressible Viscous Flow with Moving Free Surface," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 18, pp. 669-694.
- (29) Martin, J. C. and Moyce, W. J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans., Ser. A, Math. Phys. Sci.*, 244, pp. 312-324.
- (30) Laitone, E. V., 1960, "The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, 9 pp. 430-444.
- (31) Byatt-Smith, J. G. B., 1971, "An Integral Equation for Unsteady Surface Waves and a Comment on the Boussinesq Equation," *J. Fluid Mech.*, 49, pp. 625-633.

(32) Maxworthy, T., 1976, "Experiments on Collisions Between Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, 76, pp. 177~185.

(33) Baek, J. H. and Chung, H. Y., 1996, "Numerical Analysis of Incompressible Viscous Fluid Flow with Free Surface," *CFD J.*, 5, pp. 71~88.