〈논 문〉

회전하고 있는 바깥쪽 실린더를 갖고 있는 수평 원주형 환형 내에서의 공기의 혼합 대류

유 주 식*

(1996년 11월 5일 접수)

Mixed Convection of Air in a Horizontal Cylindrical Annulus with Rotating Outer Cylinder

Joo-Sik Yoo

Key Words: Mixed Convection(혼합대류), Natural Convection(자연대류), Rotation of Cylinder(실린더의 회전), Flow Pattern(유동형태), Eddy(소용돌이), Heat Transfer(열전달).

Abstract

Mixed convection of air in a horizontal concentric cylindrical annulus is investigated numerically. Isothermal boundary conditions are prescribed at the inner and outer cylinders, with the inner cylinder being warmer. The forced flow is induced by the outer cylinder which is rotating slowly with constant angular velocity with its axis at the center of the annulus. The effect of the forced flow on the flow pattern and heat transfer of natural convection is investigated for the annulus of (inner-cylinder radius/gap width) =1. There appear two eddies, one eddy or no eddy according to the Rayleigh and Reynolds numbers. Map of the three flow regimes is constructed on the Ra-Re plane.

기호설명

D_i	: 안쪽 실린더의 지름
$\vec{e_r}$, $\vec{e_\phi}$	: 반경방향과 원주 방향의 단위 벡터
g	: 중력 가속도
J	: Jacobian
L	: 환형의 폭, R_o-R_i
Nu	: Nusselt 수
Nu_{cond}	: 전도 상태의 Nusselt 수
Nu_i, Nu_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에서의 국소 Nusselt 수
$\overline{Nu_i}$, $\overline{Nu_o}$	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에서의 평균 Nusselt 수
Pr	: Prandtl 수, ν/χ
p	: 압력
Q	: 원주 방향의 유체의 순환량, $\lvert\psi_2-\psi_1\rvert$
R_i, R_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
Ra	: Rayleigh 수, $\alpha g(T_i-T_o)L^3/\chi\nu$
Re	: Reynolds 수, $R_o\Omega L/\nu$
r	: 반경 방향의 좌표
r_i, r_o	: 무차원화 된 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
t	: 시간
T_i, T_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도
TQ	: 바깥쪽 실린더에 걸리는 토크(torque)를 Couette 속도 분포에서의 토크로 나눈 값

*회원, 안동대학교, 기계공학 교육과

$\vec{u}$: 속도 벡터
u : 반경 방향의 속도 성분
v : 원주 방향의 속도 성분

그리스문자

α : 열 팽창 계수
η : 확장된 반경 방향의 좌표
θ : 무차원화 된 온도
κ : 열 확산 계수
ν : 동점성 계수
ρ_o : 밀도
τ : 원주 방향의 무차원 전단력
ϕ : 원주 방향의 좌표
ψ : 흐름 함수
ψ_1, ψ_2 : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 흐름 함수 값
Ω : 바깥 쪽 실린더의 각속도
ω : 와도

기타기호

∇ : Divergence, $\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{r\partial\phi}$

∇^2 : Laplacian, $\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}$

I. 서 론

고정된 상태에서 서로 다른 일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 내에서의 자연대류 현상은, 흥미로운 유동의 형태와 넓은 응용분야로 인해 많은 관심을 받아 왔다. 이 시스템에 대한 기존의 연구들은 Gebhart 등[1]에 의해 포괄적으로 조사되어 있으며 이 시스템에 있어서의 유동 형태에 대한 일반적인 특성은 Powe 등[2]에 의해 실험적으로 규명되었다. Powe 등[2]은 공기의 유동 형태를 Grashof 수 (혹은 Rayleigh 수)와 두 실린더 사이의 상대적인 간격(D_i/L=안쪽 실린더의 지름/실린더 사이의 간격)을 변수로 하여 4가지의 기본적인 유동 형태들로 분류하였는데 그 특성들은 다음과 같다 : 충분히 작은 Rayleigh 수에서는 D_i/L에 상관없이 두 개의 초승달 모양의 정상상태의 2차원 유동을 보인다. 그리고 Rayleigh 수가 증가하여 어떤 임계치(critical value)를 넘어서면 D_i/L에 따라 다음과 같은 유동의 양상을 보인다 : (1) $D_i/L<2.8$일 때에는 2차원적인 진동하는 대류 (oscillatory convection), (2) $2.8<D_i/L<8.5$ 일 때에는 3차원적인 와선 유동 (spiral flow), (3) $D_i/L>8.5$ 일 때에는 2차원적인 다중 셀의 유동(multicellular flow). Rao 등[3]도 수치적인 방법과 실험을 통하여 유동 형태에 대한 도표를 작성하였는데 전체적인 경향은 Powe 등[2]의 결과와 일치하였다.

액체 금속과 같은 낮은 Prandtl 수의 유체는 조금 더 복잡한 유동의 형태를 보이는데[4~6] 이에 대한 연구는 최근 Fant 등[7]과 Yoo 등[8]에 의해 새롭게 수행되었다. 그들은 Prandtl 수가 0 혹은 0.02인 경우에 대해 주기적으로 혹은 비주기적으로 진동하는 다중 셀의 유동 (oscillatory multicellular flow) 을 보였다. 그 외의 여러 가지 형태의 문제들로써, 불균일하게 가열되는 유체층,[9] 안쪽 실린더에서의 균일한 열유속,[10] 차가운 물,[11] 열전도와 대류의 결합 문제[12] 등에 대한 연구들도 역시 수행되었다. 그리고 최근 Yoo[13]는 서로 다른 두 가지 현상의 존재를 수치적으로 규명하였다.

본 연구에서는 하나의 혼합 대류 문제를 고려하여 강제 대류가 환형 내의 자연 대류에 있어서의 유동장과 열전달에 어떤 영향을 미치는가를 조사한다. 환형의 안쪽 실린더는 바깥쪽 실린더보다 따뜻하며, 환형의 중심을 축으로 하여 일정 속도로 회전하고 있는 바깥 쪽 실린더에 의해 강제 대류가 일어난다. 지금까지 회전 시스템에서의 두 개의 실린더 사이의 혼합 대류 문제는 대부분 수직 환형에 대해 수행되었다.[14~16] 수평 환형에서의 혼합대류 문제는 상대적으로 많은 연구가 수행되지 않았는데 비교적 근래에 몇몇 연구자들에 의해 따뜻한 안쪽 실린더가 회전하고 있을 때의 혼합대류 문제에 대한 연구가 수행되었다.[17~19] Fusegi 등[17]과 Lee[18,19]는 2차원 정상 상태의 혼합대류 문제를 연구하였다. 그런데 안쪽 실린더가 회전할 때에는 실린더의 회전에 의해 일어나는 원심력은 Taylor vorticity를 갖는 3차원 유동을 생성할 수 있다.[20] 따라서 Fusegi 등과 Lee는 이러한 가능성을 배제할 수 있도록 의도적으로 변수들의 범위를 제한하였다. 이와는 달리 안쪽 실린더가 정지해 있고 바깥쪽 실린더가 일정한 각속도(Ω)로 회전하고 있을 때 일어나는 실린더 사이의 Couette flow는 적어도 선형 안정성 이론(linear stability theory)에 있어서는 모든 Ω의 값에 대해 안정하다고 알려져 있다.[20]

즉, 원심력에 의한 유체 유동의 불안정 현상은 일어나지 않는다. 따라서 수평 환형 내에서의 자연 대류에 대한 강제 대류의 영향을 조사하기 위해서는 안쪽 실린더를 정지시켜 놓고 바깥쪽 실린더를 회전시키는 시스템에서의 혼합대류 문제를 고려하는 것이 더 적합하다. 혼합대류 문제에 있어서는, 강제유동은 부력에 의해 일어나는 흐름을 도와 줄 수도 있고 억제시킬 수도 있는데 본 문제에 있어서는 두 가지의 영향이 동시에 존재한다(Fig. 1). 지금까지 동심 실린더 내의 유체유동에 대한 많은 연구(natural convection, Taylor problem 등)가 수행되었지만 본 연구에서 고려하고 있는 시스템에서의 혼합대류 문제에 대한 연구는 아직 어디에서도 수행되지 않았었다. 본 연구의 목적은 회전하고 있는 바깥쪽 실린더에 의해 일어나는 강제 유동이 수평 환형 내의 자연 대류에 있어서의 유동장과 열전달에 어떤 영향을 미치는가를 조사하는 것이다. $R_i/L=1$인 환형에 대해 $Ra\leq 10^4$, $Re\leq 500$의 범위에서 $Pr=0.7$인 공기의 혼합대류를 조사하였다. Rayleigh 수와 Reynolds 수의 조합에 따라 두 개의 소용돌이(eddy), 한 개의 소용돌이 혹은 소용돌이가 없는 유동장이 형성된다. 정상 상태의 흐름 영역에 대한 지도를 $Ra-Re$ 평면 상에 구성하였다. 실린더의 회전 속도에 따른 벽면에서의 총 열전달은 유동 형태와 밀접하게 관련되어 있다는 것을 보였다. 두 개의 소용돌이가 나타나는 영역의 작은 Rayleigh 수에서는 실린더의 회전에 의해 국부 Nusselt 수의 분포가 자연 대류의 것으로부터 크게 변형이 되지만 총 열전달률은 거의 자연 대류의 것과 같다. 그러나 한 개의 소용돌이가 나타나는 영역에서는, 실린더의 회전은 벽면에서의 총열전달률을 급격히 감소시킨다.

2. 해 석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 유체는 서로 다른 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o이며 $T_i>T_o$이다. 안쪽 실린더는 고정되어 있으며 바깥쪽 실린더는 환형의 축을 중심으로 하여 일정한 각속도 Ω를 갖고 반시계 방향으로 회전하고 있다. 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시한다. 그리고 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다(Boussinesq approximation). 에너지 방정식에서 점성소산(viscous dissipation)도 역시 무시한다. 문제를 해석하기 위하여 실린더 좌표계(r, ϕ)를 사용한다. 여기에서 ϕ는 Fig. 1과 같이 실린더의 꼭대기에서 반시계 방향으로 측정되어지는 각도이다. 방정식을 무차원화 시키기 위한 특성 길이는 두 실린더 사이의 간격 $L=R_o-R_i$로 택한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 L, L/V, $V=R_o\Omega$, $\rho_0 V^2$, (T_i-T_o)로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr=\nu/\alpha$, $Re=R_o\Omega L/\nu$, $Ra=\alpha g(T_i-T_o)L^3/\alpha\nu$를 각각 Prandtl 수, Reynolds 수, Rayleigh 수로 놓는다.

무차원화된 지배방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\nabla p+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}+\frac{Ra}{PrRe^2}\theta\,[\cos(\phi)\,\vec{e}_r-\sin(\phi)\,\vec{e}_\phi] \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\theta=\frac{1}{PrRe}\nabla^2\theta \tag{3}$$

$$u=v=0,\quad \theta=1 \quad \text{at } r=r_i \tag{4}$$

$$u=0,\quad v=1,\quad \theta=0 \quad \text{at } r=r_o \tag{5}$$

본 연구에서의 관심사는 2차원적인 대류 현상이므로 흐름 함수(streamfunction) ψ와 와도(vorticity) ω를 도입한 지배방정식을 사용한다. ψ와 ω로 나타내어지는 지배 방정식은 다음과 같다.

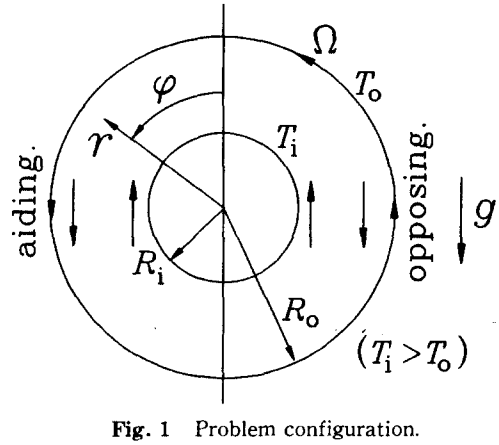

Fig. 1 Problem configuration.

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=J(\psi,\ \omega)+\frac{1}{Re}\nabla^2\omega-\frac{Ra}{p_rRe^2}\left[\sin(\phi)\frac{\partial\theta}{\partial r}+\cos(\phi)\frac{\partial\theta}{r\partial\phi}\right] \quad (6)$$

$$\omega=-\nabla^2\psi \quad (7)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=J(\psi,\theta)+\frac{1}{PrRe}\nabla^2\theta \quad (8)$$

여기에서 와도 ω, 흐름함수 ψ, Jacobian $J(f,g)$, Laplacian ∇^2은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\omega=\frac{\partial}{r\partial r}(rv)-\frac{\partial}{r\partial\phi}(u),\ u=\frac{\partial\psi}{r\partial\phi},\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$J(f,g)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial\phi}-\frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\partial g}{\partial r}\right)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2} \quad (9)$$

그리고 두 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\psi=\psi_1,\ \frac{\partial\psi}{\partial r}=0,\ \omega=-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},\ \theta=1 \text{ at } r=r_i \quad (10)$$

$$\psi=\psi_2,\ \frac{\partial\psi}{\partial r}=-1,\ \omega=-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r_o},\ \theta=0$$

$$\text{at } r=r_o \quad (11)$$

원주 방향으로는 시스템의 2π 주기성(periodicity)이 적용된다.

경계조건 (10), (11)에서 흐름함수(streanfunction) ψ_1과 ψ_2의 값은 주어지지 않고 결정해야 할 양이다. 본 연구에서, 이 양은 벽면에서의 압력의 유일 값 조건으로부터 결정된다.[21] $u=0$이고 $v=constant$인 벽면에서는 원주방향의 운동 방정식으로부터 다음의 관계식이 유도된다.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\phi}=\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{Ra}{PrRe^2}\theta\sin\phi \quad (12)$$

$\theta=constant$ (0 or 1) 인 벽 ($r=r_i,\ r_o$)의 표면을 따라 적분하면 다음 관계식이 성립한다.

$$I_w\equiv p(r,\ 2\pi)-p(r,\ 0)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)rd\phi=0 \quad (13)$$

식 (13) 은 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에 모두 적용된다. 여기에서 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더를 따라 적분한 값을 각각 I_{w1}과 I_{w2}로 나타내면 다음의 조건이 지배방정식 (6)~(11)에 부과된다.

$$I_{w1}=0,\ I_{w2}=0 \quad (14)$$

본 문제에 있어서는 일반성을 잃지 않고 $\psi_1=0$로 놓을 수 있으며 $I_{w2}=0$를 만족하는 ψ_2를 결정한다. 적분값 I_{w1}도 당연히 0이 되어야 하므로

$$I_{w1}'=\int_0^{2\pi}\frac{PrRe}{Ra}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)rd\phi \quad (15)$$

을 계산하여 계산의 정확성을 확인한다.

유체 유동이 없는 경우의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달률은 다음과 같이 된다.

$$Nu_{cond}=\frac{1}{\ln(r_o/r_i)} \quad (16)$$

여기에서는 국부 Nusselt 수(local Nusselt number)를 다음과 같이 실제적인 열플럭스(heat flux)를 Nu_{cond}로 나눈 값으로 정의한다.

$$Nu_i(\phi)=-\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)/Nu_{cond} \text{ at } r=r_i \quad (17)$$

$$Nu_o(\phi)=-\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)/Nu_{cond} \text{ at } r=r_o \quad (18)$$

평균 Nusselt 수 $\overline{Nu_i}$, $\overline{Nu_o}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{Nu_i}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Nu_i(\phi)\,d\phi \quad (19)$$

$$\overline{Nu_o}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Nu_o(\phi)\,d\phi \quad (20)$$

정상상태에서 $\overline{Nu_i}$와 $\overline{Nu_o}$는 같은 값을 가지게 된다.

식 (6)~(14)의 방정식을 푸는데 있어서는 Yoo and Kim[22]의 공간주기적인 시스템의 자연 대류 연구에서 사용한 것과 같은 스킴(scheme)의 유한차분법을 이용한다. 식 (6)과 (8)을 차분화시키는데 있어서는 시간 미분항과 확산(diffusion) 항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog 방법(Roache[23])을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분(central differencing)을 사용한다. 그리고 유선함수에 대한 Poisson 방정식은 다섯 점 공식을 이용하여 유한한 방정식 계로 바꾼다. 차분화된 방정식에서의 계산 영역은 사각형 모양이 된다. 이 차분화된 Poisson 방정식은 Buzbee 등[24]의 순환적인 짝홀 제거방법(cyclic even-odd reduction method)을 사용하여 반복 계산(iteration)을 하지 않고 바로 푼다. 이 알고리즘(algorithm)은 매우 빠르고 정확하다. 원주 방향(azimuthal direction)으로는 균일 격자(uniform grid)를 이용하고 반경 방향으로는 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장(coordinate stretching)을 이용한다.

$$r=r_i+\frac{1}{2}\left[1+\frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)}\right]$$

$$\text{with } C=1.5,\ 0\le\eta<1 \quad (21)$$

시간에 따라 적분해 나가는 과정에서 다음과 같이 두 개의 연속되는 타임스텝(time step) 사이에서의 값들의 상대적인 차이의 최대치가 주어진 값 ε보다 작을 때 해는 정상 상태로 수렴했다고 간주한다.

$$\text{Max}\left|\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{f_{i,j}^{n+1}}\right|<\varepsilon \text{ for } f=\omega,\ \psi \text{ and } \theta \text{ with } \varepsilon<10^{-3}$$

계산에 있어서는 대개 $\varepsilon=10^{-4}$을 수렴 조건으로 하였다. 타임스텝(time step) Δt는 $10^{-4}<\Delta t<10^{-2}$의 범위에서 택하여 사용하였다. 계산의 초기에는 작은 타임스텝 $\Delta t=10^{-4}$을 사용하고 나중에는 $\Delta t=10^{-3}$으로 증가시켜 준다. 본 연구에서는 $R_i/L=1$인 환형을 고려하였는데 계산에 사용된 $(r\times\phi)$ 격자계는 (65×32)이다.

단순하게 연결(simply connected)되는 자연 대류 문제에서는 $\psi_1=\psi_2$의 값을 임의로 줄 수 있다: 대개 $\psi_1=\psi_2=0$로 놓는다. 그러나 본 연구에서 고려하고 있는 시스템은 이중 연결(doubly connected)된 문제이기 때문에 ψ_1과 ψ_2의 값을 임의로 줄 수 없고 어느 하나의 값을 결정해야 한다. 이러한 요인으로 인하여 순수한 자연 대류의 경우보다 20~30배 이상의 긴 계산 시간이 요구되었다.

3. 결과 및 논의

계산은 $R_i/L=1$의 환형(annulus)에 대해 수행되었다. 우선 순수한 강제 대류 문제($Ra=0$)와 순수한 자연 대류 문제를 풀어서 수치적인 방법의 정확성을 조사하였다. 순수한 강제 대류 문제는 $u=0$, $v=V(r)$, $p=P(r)$인 원형의 Couette 유동(circular Couette flow)을 일으킨다. 여기에서 $V(r)$은 운동 방정식의 원주 방향 성분으로부터 결정된다. 해는 다음과 같다.

$$V(r)=Ar+\frac{B}{r} \tag{22}$$

where $A=\frac{r_o}{r_o^2-r_i^2}$, $B=-\frac{r_o r_i^2}{r_o^2-r_i^2}$

이 식으로부터

$$-\psi_2=\int_{r_i}^{r_o}V(r)\,dr$$
$$=A(r_o^2-r_i^2)/2+B\ln(r_o/r_i) \tag{23}$$

를 얻는다.

수치적으로 계산된 ψ_2의 값들을 Table 1에 나타내었다. Table 1로부터 격자점의 갯수가 증가할수록 오차는 영으로 접근해 가며 (35×32)의 $(r\times\phi)$격자계로도 충분히 정확한 결과를 낳는다는 것을 알 수 있다. 본 연구에서는 특히 바깥쪽 실린더 부근의 얇은 경계층을 충분히 분해하기 위해서 거의 두 배 더 큰 (65×32)의 격자계를 사용하였다. 순수한 자연 대류 문제의 경우는 Kuehn and Goldstein[25]의 결과와 비교하였는데 두 결과는 서로 잘 일치하였다. 평균 Nusselt 수에 대한 하나의 예를 Table 2에 제시하였다. 본 연구에서는 (65×32)의 격자계를 사용하였는데 (65×64)의 격자계도 이 격자계와 거의 같은 결과를 낳았다. 따라서 (65×32)의 격자계를 사용하였다.

먼저 작은 Rayleigh 수에서의 해를 살펴본다.

Table 1 Numerically determined values of ψ_2 when $Ra=0$ with 32-grid points to the azimuthal direction.

Number of r-grid points	Calculated $-\psi_2$	Percent error
15	0.5474	1.766
25	0.5413	0.632
35	0.5396	0.316
45	0.5389	0.186
55	0.5386	0.130
Exact	0.5379	

Table 2 Calculated Nusselt numbers for the pure natural convection problem.

Kuehn and Goldstein[25]		Present	
Ra	$(\overline{Nu_i},\ \overline{Nu_o})$	$(r\times\phi)$ mesh	$(\overline{Nu_i},\ \overline{Nu_o})$
10^4	(1.850, 1.853)	(55×32)	(1.828, 1.832)
		(55×64)	(1.834, 1.839)

순수한 부력에 의해 일어나는 유동장은 $\phi=0$의 수직축에 대해 대칭인 두 개의 콩팥 모양의 소용돌이(kidney-shaped eddy)로 구성된다. 그러나 바깥쪽 실린더가 회전하게 되면 그 회전 속도가 아무리 작아도 $\phi=0$에 대한 대칭성은 깨어진다. Reynolds 수에 따른 유동 형태의 변화를 Ra=1000에 대해 Fig. 2에 나타내었다. 작은 Reynolds 수에 있어서는 순수한 부력에 의해 일어나는 두 개의 대칭적인 소용돌이가 강제 대류에 의해 미소하게 변형된다(Fig. 2(a)). 바깥쪽 실린더가 반시계 방향으로 회전하고 있는 경우, $\pi<\phi<2\pi$의 영역에서는 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더 부근에서 회전 방향의 유체의 순환이 있고 $0<\phi<\pi$의 영역에서는 바깥쪽 실린더 부근에서만 회전 방향으로의 유체의 순환이 일어난다. 작은 Rayleigh 수 ($Ra<1000$)에 있어서는 안쪽 실린더를 따른 유체의 순환이 매끄럽게 일어나는데 이것은 Wang and Bau[26]에 의해 편심환형(eccentric annulus)에서 작은 Rayleigh 수의 자연 대류에서 관측된 것과 유사하다. $\pi<\phi<2\pi$의 영역의 바깥쪽 실린더 부근은 부력에 의해 일어나는 유동과 강제대류에 의해 일어나는 유동의 방향이 서로 반대가 된다(Fig. 1). 그러나 강제 대류가 약할 때에는 이 영역의 소용돌이가 계속 유지된다. Reynolds 수가 더 커지면 이 소용돌이는 강제 대류에 의해 억제되며 (Fig. 2(b)), 마침내 어떤 임계 Reynolds 수 이상에서는 완전히 없어진다(Fig. 2(c)). 그리고 더 큰 Reynolds 수에서는 강제 대류가 전 시스템을 휩쓸게 되어 $0<\phi<\pi$ 영역의 소용돌이로 없어지게 된다(Fig. 2(d)).

Fig. 2에 대응되는 $\phi=\pi/2$, $3\pi/2$에서의 원주방향의 속도분포를 Fig. 3의 (a)와 (b)에 각각 도시하였다. Fig. 3(b)에 도시된 속도 분포를 설명하면 다음과 같다. Re=5 일 때에는, 바깥쪽 실린더의 회전에 의해 일어나는 흐름은 부력에 의해 일어나는 유동에 비해 상대적으로 약하다. 따라서 바깥쪽 실린더 부근에 있어서 벽면의 회전과 같은 방향으로 흐르는 영역의 크기는 매우 좁다($Re=5$). Reynolds 수가 커지면 강제 대류가 강하게 일어나고, 벽면의 회전과 같은 방향으로 흐르는 영역의 크기도 점점 넓어진다($Re=10$). 그리고 어떤 임계 Reynolds 수(critical Reynolds number) 이상에서는 $\phi=3\pi/2$ 선상의 모든 유체가 바깥쪽 실린더와 같은 방향으로 흐르게 된다($Re=20$). 즉 $\pi<\phi<2\pi$ 영역의 소용돌이는 완전히 없어진다. 다음 단계에 있어서는 Fig. 3(a)에 도시된 속도 분포에서 알 수 있듯이 $\phi=\pi/2$ 선 상의 유체도 모두 바깥쪽 실린더와 같은 방향으로 흐르게 된다($Re=100$). 즉, 강제 대류가 전 시스템을 휩쓸게 되며 충분히 큰 Reynolds 수에서의 속도 분포는 식 (22)에 있

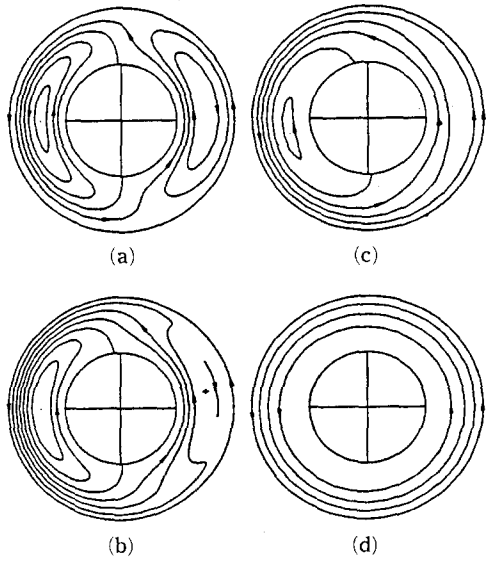

Fig. 2 Streamlines for several Reynolds numbers when Ra=1000: (a) $Re=5$; (b) $Re=10$; (c) $Re=20$; (d) $Re=100$.

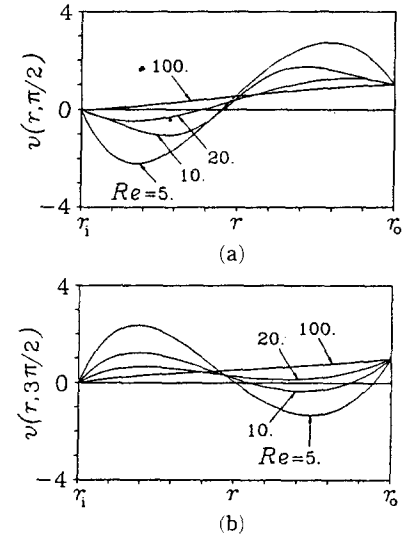

Fig. 3 Distribution of azimuthal velocities at $\phi=\pi/2$(a) and $\phi=3\pi/2$(b) as a function of Reynolds number when $Re=1000$.

는 원형 Couette 속도 분포와 같은 모양을 하게 된다.

Fig. 2와 Fig. 3에서 보인 바와 같이 유동장은 소용돌이의 수에 따라 세 가지의 서로 다른 유동 형태로 분류될 수 있다 : 두 개의 소용돌이(Fig. 2(a)), 한 개의 소용돌이(Fig. 2(c)) 그리고 소용돌이가 없는 유동장(Fig. 2(d)). 세 가지의 유동 영역에 대한 지도를 $Ra-Re$ 평면 상에 작성하여 Fig. 4에 나타내었다. 전도가 지배하는 영역인 $Ra<1000$에서는 두 개의 소용돌이와 하나의 소용돌이 사이의 경계는 $Re=0.008Ra^{1.09}$, 하나의 소용돌이와 소용돌이가 없는 영역 사이의 경계는 $Re=0.187Ra^{0.904}$로 근사적으로 표현된다.

Fig. 4로부터 고정된 Reynolds 수에 있어서는 Rayleigh 수가 증가함에 따라 소용돌이가 없는 유동으로부터 하나의 소용돌이가 있는 흐름, 하나의 소용돌이로부터 두 개의 소용돌이가 있는 흐름으로의 천이가 각각 일어날 수 있음을 알 수 있다. Fig. 5에는 $Re=20$에 있어서의 $Ra=100$, 1000, 2000, 5000, 10000 에 대한 $\phi=\pi/2$, $3\pi/2$에서의 원주 방향의 속도 분포를 도시하였다. $Ra=100$에서는 소용돌이가 없으며, $Ra=1000$에서는 하나의 소용돌이, 그리고 $Ra=2000$, 5000, 10000에서는 두 개의 소용돌이가 나타난다. $Ra=100$에서의 속도 분포는 Couette 유동의 속도 분포와 거의 일치한다. Ra가 증가함에 따라 속도 분포의 형태는 부력에 의해 점진적으로 꼬여지며 벽면 부근에서의 속도 분포의 기울기가 점점 커지게 된다. 그리고 어떤 Rayleigh 수를 넘어서면 따뜻한 안쪽 실린더 부근에서 $\phi=\pi/2$의 속도가 음의 값을 갖게 된다. 더 큰 Rayleigh 수에 있어서는 $\phi=3\pi/2$에서의 속도도 역시 음의 값을 갖게 된다. Fig. 5에 제시된 Rayleigh 수에 따른 속도 분포의 변화는 수직 채널에서의 강제 대류에서 관찰된 특성과 비슷한 특성을 보여 주고 있다. Aung and Worku[27,28]는 수직 채널에서 Fig. 5(a)와 유사한 역흐름(flow reversal)을 보였다. 본 문제에 있어서 강제 유동은 부력에 의해 일어나는 유동을 억제시키는 역할을 하고 있다. 그러나 Rayleigh 수가 증가할수록 부력에 의해 일어나는 유동이 강해지므로 두 유동 사이의 일종의 경쟁력은 점점 커지게 된다. 계산에 있어서, 큰 Rayleigh 수에서는 수렴속도가 매우 느렸는데 이것은 이들 두 힘에 의한 유동 사이의 강한 경쟁 때문이라고 생각된다. $Ra=5000$인 경우 순수한 자연 대류 문제의 경우는 1000 번 정도의 반복 계산(iteration)에 의해 해를 구할 수 있었지만, 강제 대류가 부과된 경우에는 약 $3\times10^4\sim5\times10^4$번의 반복 계산이 요구되었다.

원주 방향의 유체의 순환량($Q=|\psi_2-\psi_1|$)과 바깥쪽 실린더에 작용하는 토크(torque)를 $Re=20$인

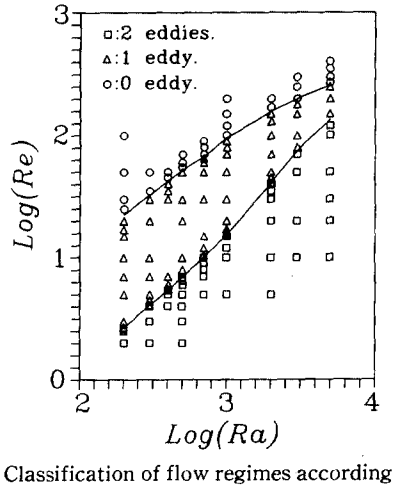

Fig. 4 Classification of flow regimes according to the number of eddies on the Ra-Re plane.

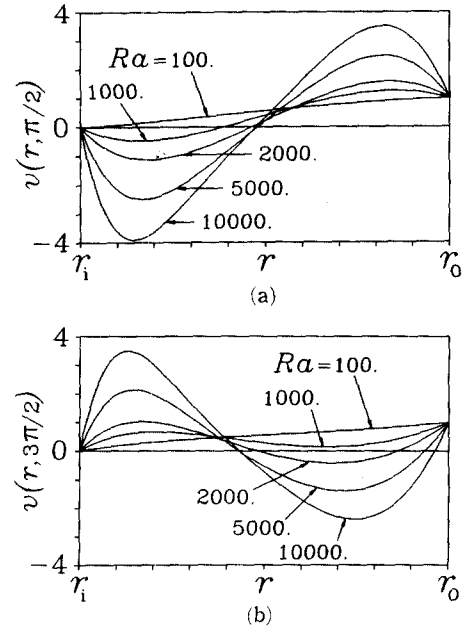

Fig. 5 Distribution of azimuthal velocities at $\phi=\pi/2$(a) and $\phi=3\pi/2$(b) as a function of Rayleigh number when $Re=20$.

경우에 대해 Fig. 6에 도시하였다. 무차원화된 토크는 다음과 같이 주어진다.

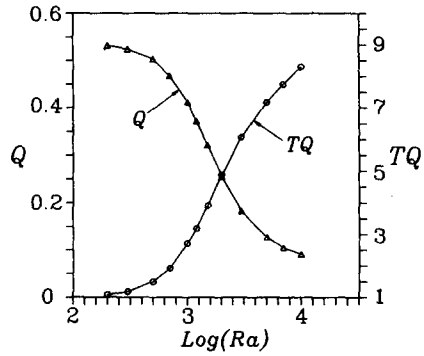

Fig. 6 Net circulation ($Q=|\psi_2-\psi_1|$) and the torque (TQ) acting on the outer cylinder as a function of Rayleigh number when $Re=20$.

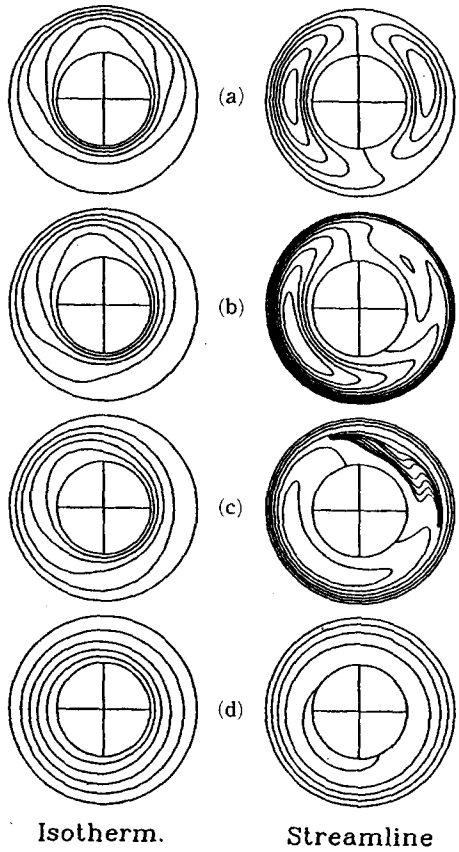

Fig. 7 Isotherms and streamlines for several Reynolds numbers when $Ra=5000$: (a) $Re=20$; (b) $Re=100$; (c) $Re=150$; (d) $Re=200$.

$$Torque=\int_0^{2\pi}(\tau\cdot r^2)\,d\phi,\quad \tau=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) \tag{24}$$

TQ는 바깥쪽 실린더에 작용하는 실제의 토크를 Couette 속도 분포로써 얻어지는 토크로 나눈 값으로 정의한다. Rayleigh 수가 작은 경우에 있어서의 토크와 순환량은 Couette 유동의 것($Q=0.5379$, $TQ=1$)과 거의 같다. Rayleigh 수가 증가하면, 순환량은 감소하며 0으로 접근해 간다. 그러나 $\pi<\phi<2\pi$ 영역의 바깥쪽 실린더 부근에 존재하는 부력에 의한 강한 저항력으로 인해 토크는 점점 커지게 된다. 이러한 경향은 Fig. 5의 속도 분포로써도 역시 알 수 있다.

$Ra=5000$에 있어서의 등온선과 유선을 $Re=20$, 100, 150, 200에 대해 Fig. 7에 도시하였다. 그리고 여러 가지의 Reynolds 수에 대한 $Ra=5000$에서의 Nusselt 수의 분포를 Fig. 8에 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이 강제 유동은 온도장을 반경방향으로 성층화시킨다. 그리고 벽면에서의 최대 혹은 최소 Nusselt 수의 점을 $0\rightarrow\pi$ 혹은 $\pi\rightarrow2\pi$로 이동시킨다. $Ra=5000$ 에서의 유동장에 있어서, Fig. 7(c)의 $Re=150$인 경우, $3\pi/2<\phi<2\pi$ 영역에서 음의 값과 양의 값을 갖는 원주방향 속도

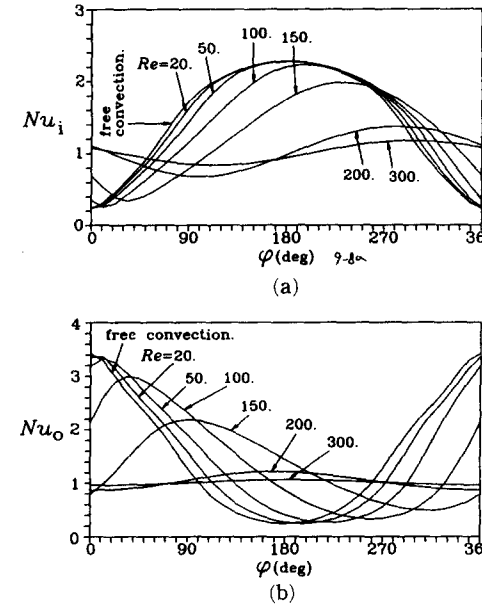

Fig. 8 Variation of local Nusselt number distributions at the inner(a) and outer(b) cylinders with respect to Reynolds number when $Ra=5000$.

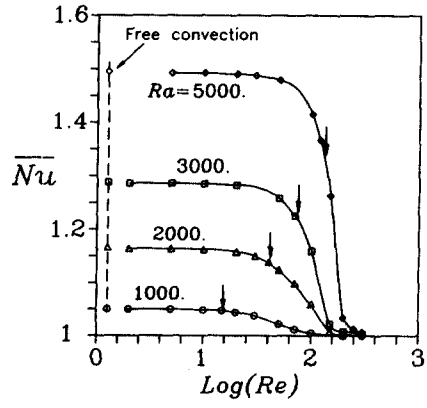

Fig. 9 Average Nusselt numbers as functions of Reynolds number for several Rayleigh numbers (Ra=1000, 2000, 3000 and 5000). The values on the vertical dashed line represent the Nusselt numbers of pure free convection. Arrows on the curves of Nusselt number indicate the transition Reynolds number from two-eddies to one-eddy flow pattern.

(v)가 모두 존재한다. 그러나 하나의 닫힌 소용돌이(closed eddy)는 형성되지 않는다. 이 영역의 유체는 바깥쪽 실린더 부근을 제외하고는 거의 정체되어 있다. Fig. 7과 Fig. 8에서 알 수 있듯이 강제 대류가 있는 경우의 온도 분포는 Reynolds 수가 작더라도 순수한 자연 대류와는 명백하게 다르다. 그러나 Fig. 8을 보면 Re=20, 50에 있어서는 국부 Nusselt 수를 적분한 값, 즉 총 열전달률은 자연 대류의 값과 거의 같다는 보여주고 있다.

벽면에서의 평균 Nusselt 수를 Ra=1000, 2000, 3000, 5000에 대하여 Reynolds 수의 함수로써 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 9에서 수직 방향의 파선(dashed line) 상의 표시들은 각각의 Reyleigh 수에서의 자연 대류의 Nusselt 수를 나타낸다. 그리고 Nusselt 수의 곡선 상의 화살표는 각각의 Rayleigh 수에서의 두 개의 소용돌이로부터 하나의 소용돌이가 있는 유동으로의 천이 Reynolds 수(transition Reynolds number)의 위치를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있듯이 두 개의 소용돌이가 있는 영역의 작은 Reynolds 수에서의 Nusselt 수는 자연 대류의 것과 거의 같다. 그러나 특히 하나의 소용돌이가 있는 영역 부근의 어떤 Reynolds 수 이상에서는 Nusselt 수가 급격히 감소하며 1로 접근해 간다. 그리고 Rayleigh 수가 증가할수록 Reynolds 수에 따른 열전달의 변화가 없는 영역의 크기는 넓어진다.

4. 결 론

서로 다른 일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 사이에서의 공기의 혼합 대류를 수치적으로 조사하였다. 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도 차이에 의해 자연 대류가 일어나며, 강제 대류는 환형의 중심을 축으로 하여 일정한 각속도로 회전하는 차가운 바깥 쪽 실린더에 의해 일어난다. 강제 대류가 수평 환형 내에서의 자연 대류의 열전달과 유동장에 미치는 영향을 $Re \leq 500$, $Ra \leq 10^4$의 범위에서 (안쪽 실린더의 반경/환형의 폭)=1 인 환형에 대해 조사하였다. Rayleigh 수와 Reynolds 수의 조합에 따라 두 개의 소용돌이, 한 개의 소용돌이 혹은 소용돌이가 없는 유동장이 형성된다. 정상 상태의 흐름 형태의 영역에 대한 지도를 $Ra-Re$ 평면 상에 구성하였다. 실린더의 회전 속도에 따른 벽면에서의 총 열전달은 유동 형태와 밀접하게 관련되어 있는 것으로 나타났다. 두 개의 소용돌이가 나타나는 영역의 작은 Reynolds 수에서는 실린더의 회전에 의해 국부 Nusselt 수의 분포가 자연 대류의 것으로부터 크게 변형이 되지만 총 열전달률은 거의 자연 대류의 것과 같다. 그러나 한 개의 소용돌이가 나타나는 영역에서는, 실린더의 회전은 벽면에서의 총열전달률을 급격히 감소시킨다.

참고문헌

(1) Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. and Sammakia, B., 1988, "Buoyancy-induced Flows and Transport," Hemisphere Publishing Corporation, pp. 764~771.

(2) Powe, R. E., Carley, C. T. and Bishop, E. H., 1969, "Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli, *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 310~314.

(3) Rao, Y. F., Miki, Y., Fukuda, K., Takata, Y. and Hasegawa, S., 1985, "Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annuli, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 705~714.

(4) Mack, L. R. and Bishop, E. H., 1968., Natural Convection between Horizontal Concentric Cylinders for Low Rayleigh Numbers, *Q. J. Appl. Mech. Math.*, Vol. 21, pp. 223~241.

(5) Custer, J. R. and Sharghnessy, E. J., 1977., "Thermoconvective Motion of Low Prandtl Number Fluids within a Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 596~602.

(6) Charrier-Mojtabi, M. C., Mojtabi, A. and Caltagirone, J. P., 1979., "Numerical Solution of a Flow Due to Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 101, pp. 171~173.

(7) Fant, D. B., Prusa, J. and Rothamayer, A. P., 1990., "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 379~387.

(8) Yoo, J. S., Choi, J. Y. and Kim, M. U., 1994., "Multicellular Natural Convection of a Low Prandtl Number Fluid between Horizontal Concentric Cylinders," *Numerical Heat Transfer*, Part A, Vol. 25, pp. 103~115.

(9) Prud'homme, M., Robillard, L. and Vasseur, P. 1987, "A Study of Laminar Natural Convection in a Nonuniformly Heated Annular Fluid Layer," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 1209~1222.

(10) Kumar, P., 1988, Study of Natural Convection in Horizontal Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1137~1148.

(11) Ho, C. J. and Lin, Y. H., 1988, Laminar Natural Convection of Cold Water Enclosed in a Horizontal Annulus with Mixed Boundary Conditions," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 2113~2121.

(12) Kolesnikov, P. M. and Bubnovich, V. I., 1988, Non-stationary Conjugate Free-convective Heat Transfer in Horizontal Cylindrical Coaxial channels," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1149~1156.

(13) Yoo, J. S., 1996, "Dual Steady Solutions in Natural Convection between Horizontal Concentric Cylinders," *Int. J. Heat Fluid flow*, Vol. 17, pp. 587~593

(14) Guo, Z. -Y. and Zhang, C. -M., 1992, "Thermal Drive in Centrifugal Fields--mixed Convection in a Vertical Rotating Cylinder," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 1635~1644

(15) Hessami, M. A., Davis, G. D. V., Lenonardi, E. and Reizes, J. A., 1987, "Mixed Convection in Vertical Cylindrical Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 151~164

(16) Shaarawi, M. A. I. Ei and Khamis, M., 1987, Induced Flow in Uniformly Heated Vertical Annuli with Rotating Inner Walls," *Numerical Heat Transfer*, Vol.12, pp. 493~508.

(17) Fusegi, T., Farouk, B. and Ball, K. S., 1986, Mixed-convection Flows within a Horizontal Concentric Annulus with a Heated Rotating Inner Cylinder," *Numer. Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 591~604.

(18) Lee, T. S., 1992a, Laminar Fluid Convection Between Concentric and Eccentric Heated Horizontal Rotating Cylinders for Low-Prandtl-number Fluids," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 14, pp. 1037~1062

(19) Lee, T. S., 1992b, Numerical Computation of Fluid Convection with Air Enclosed between the Annuli of Eccentric Heated Horizontal Rotating Cylinders," *Computers Fluids*, Vol. 21, pp. 355~368.

(20) DiPrima, R. C. and Swinney, H. L., 1981, "Instabilities and Transition in Flow between Concentric Rotating Cylinders", *in Topics in Applied Physics* 45, (ed. H. L. Swinney and J. P. Gollub), *Springer-Verlag*, pp. 139~180.

(21) Adlam, J. H., 1986, "Computation of Two-dimensional Time-dependent Natural Convection in a Cavity where There are Internal Bodies," *Computers and Fluids*, Vol. 14, pp. 141~157.

(22) Yoo, J. S. and Kim, M. U., 1991, "Two-dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 7, pp. 181~200.

(23) Roache, P. J., 1972, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, pp. 53~64.

(24) Buzbee, B. L., Golub, G. H. and Nielson, C.

W., 1970, On Direct Methods for Solving Poissons Equations," *SIAM J. Numer. Anal*, Vol. 7, pp. 627~656.

(25) Kuhen, T. H. and Goldstein, R. J., 1976, "An Experimental and Theortical Study of Natural Convection in the Annulus between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 74, pp. 695~719.

(26) Wang, Y. Z. and Bau, H. H., 1988, "Low Rayleigh Number Convection in Horizontal, Eccentric Annuli," *Phys. Fluids*, Vol. 31, pp. 2467~2473.

(27) Aung, W. and Worku, G., 1986a, "Developing Flow and Flow Reversal in a Vertical Channel with Asymmetric wall Temperature," *J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 299~304.

(28) Aung, W. and Worku, G., 1986b, "Theory of Fully Developed, Combined Convection Including Flow Reversal," *J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 485~488.