

〈논 문〉

진동하는 윗벽면을 가진 정방형 웅덩이 안에서의 흐름

민 병 광* · 장 근 식**

(1996년 5월 8일 접수)

Analysis of Flow in a Square Cavity with an Oscillating Top Wall

Byoung-Kwang Min and Keun-Shik Chang

Key Words : Incompressible Navier-Stokes Equations(비압축성 Navier-Stokes 방정식), Oscillating Cavity Flow(진동하는 웅덩이 흐름), Momentum Coupling Method(모멘텀 방법)

Abstract

The flow induced by the oscillatory motion of a solid body is important in a number of practical problems. As the solid boundary oscillates harmonically, there is steady streaming motion invoked by the Reynolds stresses, which could cause extensive migration of the fluid during a period of fluid motion. We here analyzed the flow in a square cavity with an oscillating top wall for the parameters which make the time derivatives and the convective terms equally important in the entire cavity flow. The full Navier-Stokes equations are solved by the second-order time accurate Momentum Coupling Method which is devised by the authors. The particular numerical scheme does not need subiteration at each time step which is usually a required process to calculate the incompressible Navier-Stokes equations. The effect of two parameters, the Reynolds number and the frequency parameter, on the oscillatory flow has been investigated.

기 호 설 명

R : Reynolds 수

a : 진폭

U_0 : 진폭

\mathbf{q} : 속도벡터

u, v : x, y -방향 속도

\mathbf{A}, \mathbf{B} : jacobian matrices

\mathbf{X} : solution 벡터

A : 유한체적의 면적

Ψ : 유량함수

\bar{v} : 정상 streaming 속도

t : 시간

Re_s : streaming 레이놀즈수

β : 진동매개변수

ϵ : 진폭과 물체 대표길이 비

\mathbf{F}, \mathbf{G} : 벡터함수

p : 압력

\mathbf{C} : 계수행렬

\mathbf{R} : source 벡터

ζ : 와도

\mathbf{I} : 단위행렬

\bar{w} : Lagrangian 평균속도

X_0 : 위치벡터

1. 서 론

적정한 레이놀즈수의 범위에서, 고체 경계면의 강제 진동에 의하여 유동의 속도가 주기적으로 변

*한국과학기술원 항공우주공학과

**회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

하는 실용적인 문제들이 많다. 이런 유동에서 Streaming 레이놀즈수, $Re_s (= \epsilon Re = a\omega d/\nu, \epsilon = a/d, a$ 진폭, d 는 물체의 대표적 크기)의 중요성은 Stuart⁽¹⁾에 의해서 처음으로 부각되었고, 아래에 언급된 연구자들 중 많은 사람이 Re_s 를 무차원변수로 하여 유동을 해석하였다. 매개변수 ϵ 은 지배방정식의 선형화에 중요한 요소로 작용하고, 특히 진동하는 벽면을 가진 사각용당이 내부유동의 경우 $\epsilon \approx O(1)$ 이 되면 선형화가 불가능하여 완전한 Navier-Stokes 방정식을 다루어야 함이 Iwatsu, Hyun, & Kuwahara⁽³⁾에 의하여 밝혀졌다. 본 논문에서 중점을 두고 해석하고자 하는 유동도 수치적 접근 밖에 허용되지 않는 $\epsilon \approx O(1)$ 이고, $Re_s \geq 1$ 인 높은 레이놀즈수 유동이다.

역사적으로 진동하는 물체에 관한 대부분의 연구는 원형실린더에 대하여 수행되었고, 이에 따라 많은 지식이 축적되었다. 예를 들어 Stuart⁽²⁾는 무한 유체장 속에 잠겨진 소폭의 진동을 하는 실린더로 인하여 일어나는 흐름에서, 2중 경계층에 관한 연구를 해석적으로 수행하였다. 그는 정상 streaming 레이놀즈수가 크다면, 정상 streaming 속도가 영으로 다가가는 외층(outer layer)이 존재하고, 그것의 크기는 내층(inner layer)보다는 크지만 물체의 대표 길이보다는 작음을 밝혔다. Bertelsen, Svardal & Tjøtta⁽⁵⁾는 점성유체에서 진동운동과 관련된 비선형 효과를 고찰하기 위하여 두 개의 동축 실린더 사이에 갇힌 비압축성 유체의 유동을, 바깥쪽 한 실린더가 횡방향 진동하는 경우에 대하여 자세히 해석하였다. Bertelsen⁽⁶⁾은 streaming과 관련된 Re_s 가 클 때, 그리고 무한유체 내에서 하나의 실린더가 횡방향 진동하는 경우에, 실린더에 근접한 곳의 유동은 Riley⁽⁷⁾와 Stuart⁽²⁾ 등의 이론적 결과와 잘 일치하지만, 실린더에서 멀어질수록 점점더 불일치 함을 보여주었다. Duck & Smith⁽⁸⁾는 무한히 긴 두 개의 원형실린더에서 안쪽 실린더가 조화 진동할 때, 그 사이에 갇힌 비압축성 유체 유동을 연구하였다. 연구 결과로부터 그들은 Bertelsen⁽⁶⁾에 의해서 지적된 실험과 이론과의 차이는 주로 유동영역의 유한성이 원인을 지적하였다. Yan, Ingham & Morton⁽⁹⁾은 진동하는 원형실린더 배열에 의하여 유도된 streaming 흐름에 관한 연구를 수행하였다. 그들에 의하면, 무한 비압축성 유체에서 Re_s 가 작을 경우에는, 각 실린더 주위의 정상 streaming 흐름은 진동하는 한 원형실린더의

경우와 유사하지만, 그 값이 증가하면 마치 높은 레이놀즈수 흐름에서 불안정성에 의하여 대칭성이 깨지듯이 streaming 흐름도 비대칭 유동이 되는 것을 수치적으로 그리고 실험적으로 확인하였다.

반면에 진동하는 고체 벽면을 가진 내부유동에 관한 연구는 상대적으로 많이 이루어지지 않았다. 정상 흐름의 경우, Kawaguti⁽¹⁰⁾는 $0 \leq Re \leq 64$ 에서 정방형 용당이(square cavity)문제를 다루었다. Burggraf⁽¹¹⁾의 경우에는 $0 \leq Re \leq 400$ 일 때 동일한 문제에 대한 유한차분 해를 제공했다. 좀더 최근엔 Ghia, Ghia, & Shin⁽¹³⁾이 $100 \leq Re \leq 10000$ 의 범위에서 얻은 정밀 격자 해를 제시했다. 한편 한 벽면이 진동하는 정방형 용당이 흐름을 Duck⁽¹⁴⁾이 다루었지만, 그의 해법이 갖는 한계성으로 인하여 낮은 레이놀즈수의 흐름에 대해서만 연구가 이루어졌다. 최근 들어, Soh & Goodrich⁽¹²⁾는 새로운 수치스킵의 검증을 위하여 이 문제를 다루었지만, 단지 한 가지 매개변수 조합에 대해서만 해를 제시했다. Iwatsu 등⁽³⁾은 $Re \leq 1000$ 까지 자세히 연구하였지만, 이런 유동에서 중요한 streaming 운동은 다루지 않았다. Iwatsu 등⁽⁴⁾은 3차원까지 확대하여 해석하였다.

우리는 여기서 진동하는 벽면을 가진 정방형 용당이 흐름을 높은 레이놀즈수까지 연구하되, 특히 한 주기 동안의 유체입자들의 움직임을 관찰함으로써 유동의 특성을 고찰하려 한다. 한 벽면이 조화 진동하는 용당이 문제를 특징짓는 매개변수는 레이놀즈수 Re 와 진동변수 β 로서, streaming 레이놀즈수와와의 관계는 $Re_s = Re^2/\beta$ 이고, 특성길이와 진폭과의 비인 ϵ 에 대한 관계는 $\epsilon = Re/\beta$ 이다. Re 와 β 중 어느 하나를 고정시키고 Re_s 가 증가하면 준정상 상태에 접근하고, Re_s 가 감소할 경우에는 Stokes 흐름에 다가간다. 따라서 본 논문은 Navier-Stokes 방정식에 존재하는 시간항과 관성항의 상호영향이 최대가 되는 $Re \approx \beta$ 유동을 고찰한다.

2. 수치 해법

유동이 2차원이고 비정상 비압축성 유동인 경우에 다음의 비정상 Navier-Stokes 방정식

$$\beta \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

과 연속방정식

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

이 성립한다. 여기서 무차원화는, 길이는 d 로, 시간은 w 로, 속도는 최대 속도 U_0 로, 그리고 압력은 ρU_0^2 으로 이루어졌다(Fig. 1 참조). 이때 주기는 $T=2\pi/w$ 이고, 진폭 a 와 최대 속도 U_0 와의 관계는

$$a = U_0 \int_0^{\pi/2w} \cos(ut) dt = U_0/w$$

가 된다. 경계조건은

$$u = v = 0 \quad (x=0, 1; 0 \leq y \leq 1)$$

$$u = v = 0 \quad (y=0; 0 \leq x \leq 1)$$

$$u = \cos(t), v = 0 \quad (y=1; 0 \leq x \leq 1)$$

으로 주어진다. 식 (1)에서 \mathbf{q} 는 속도벡터이고 \mathbf{F} 와 \mathbf{G} 는 각각

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} Re \cdot u^2 + Re \cdot p - \frac{\partial u}{\partial x} \\ Re \cdot uv - \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

와

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} Re \cdot uv - \frac{\partial u}{\partial y} \\ Re \cdot v^2 + Re \cdot p - \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

으로 주어진 벡터함수이다. 식 (1)과 식 (3)(4)에

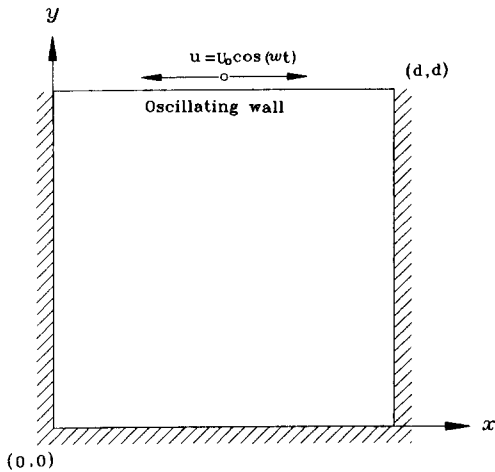


Fig. 1 Geometry of the oscillating cavity flow

나타난 무차원수는 각각 $Re = U_0 d / \nu = awd / \nu$ 로 정의되는 레이놀즈수와 $\beta = wd^2 / \nu$ 로 정의되는 진동 매개변수 (frequency parameter)이다.

식 (1)에 사다리꼴 시간차분공식 (trapezoidal time differencing formula)을 적용하면 속도벡터 \mathbf{q} 에 관한 선형화된 식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} & \left[\beta \cdot \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right\}^n \right] \mathbf{q}^{n+1} \\ &= \left[\beta \cdot \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right\}^n \right] \mathbf{q}^n \\ & \quad - \Delta t \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right\}^n \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{A} 와 \mathbf{B} 는 아래와 같이 정해진 Jacobian 행렬들이고 \mathbf{I} 는 단위행렬이다.

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} \quad (6)$$

식 (5)를 정렬 엇갈림 격자에 적용하고, 공간에 대한 미분은 중앙차분하면, 7개의 대각원소로 구성된 계수행렬 \mathbf{C} 를 갖는 선형시스템을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{R} \quad (7)$$

여기서 \mathbf{C} 는 레이놀즈수나 CFL 수가 증가하면 대각 지배화 (diagonal dominance)가 되지 않는 특성을 가진다. 이런 경우 대부분의 재래적인 반복법들은 적용 불가능하다. 또한 연속방정식으로부터 유도되는 Poisson 방정식의 경우 순전한 타원형이기 때문에 매우 수렴속도가 느리다. 하지만 이러한 조건들에도 불구하고 비정상 문제의 경우에는 각 시간대에서의 해가 매우 중요하기 때문에, Poisson 방정식과 식 (7)들은 높지 않은 경비로 매우 정확하게 풀어야만 한다. 때문에 근래에 들어 많이 연구되고 발표된 CG (conjugate gradient) 계열의 행렬해법을 사용하게 되었다. 원래의 CG method는 행렬 \mathbf{C} 가 positive definite이고 대칭행렬일 때 적용 가능하고, 그럴 경우 수렴성은 보장되었다. 그러나 많은 수치계산에서 생성된 \mathbf{C} 는 sparse, 비대칭, indefinite 행렬이다. 이러한 이유로 수렴 보장성을 희생하면서 적용범위를 넓히고 수렴속도를 증진시킨 방법들이 고안되었다. 본 연구의 경우 PCGS^(16,17) (preconditioned conjugate gradient squared method)로 알려진 방법을 사용하였다. 따라서 식 (7)과 Poisson 방정식의 해를 구하는 도중에 breakdown이나 불안정성이 발생할 가능성은 존재하지만, 우리의 경우 적절한 preconditioning 행렬

을 사용함으로써 만족할만한 수렴성능을 얻을 수 있었다. 식 (7)로부터 구해진 속도는 질량 보존을 만족시키지 못하기 때문에 보조 포텐셜 함수⁽¹⁸⁾를 도입하여 압력을 구하고 속도보정을 했다. 더 자세한 것은 저자들의 논문^(19,20)에 나와 있다.

3. 해법의 정확도

본 논문에서 사용된 수치방법의 정확도를 검증하기 위하여 먼저 정상상태의 정방형 용당이 흐름을 해석하였다. 이 문제는 비압축성 유동에 관한 프로그램 검증용으로 많이 사용되는 것으로, 레이놀즈 수 증가에 따라 주와동(main eddy) 외에 2차 와동(secondary eddy)이 생성되고, 등속도로 움직이는 벽 근처유동의 속도단면분포에 kink가 존재한다. Fig. 2는 Ghia 등⁽¹³⁾이 구한 정밀격자(129×129) 해와의 비교를 보여준다. 현재의 계산결과는 유동의 물리량들의 구배가 큰 사각벽면 근처에 밀집시킨 51×51 격자를 사용해서 얻었다. 유동의 속도단면 분포는 Ghia 등⁽¹³⁾이 사용한 격자수에 비하면 약 7 배 정도의 성근 격자 수로 얻은 것이지만, 낮은 레이놀즈수부터 높은 레이놀즈수까지 속도 단면분포에 있어 좋은 일치성을 보여주고 있다.

다음으로 비정상 유동에 대한 현재의 방법의 정확성을 확인하기 위하여 Duck⁽¹⁴⁾의 해와 비교했다. Duck⁽¹⁴⁾의 방법은 유동이 시간에 대하여 주기적이라는 가정 아래, 시간에 대해서는 푸리에 급수(fourier series)를 사용하였고 공간에 대해서는 중앙차분하였다. Fig. 3은 $Re=\beta=200$ 일 때 현재의 계산과 Duck⁽¹⁴⁾의 수치방법으로 본 저자들이 구한 해 사이에는 매우 좋은 일치가 있음을 보여주고 있다. 하지만 Duck⁽¹⁴⁾의 논문에 발표된 결과와는 약간의 차이가 있음을 지적하지 않을 수 없다. 참고

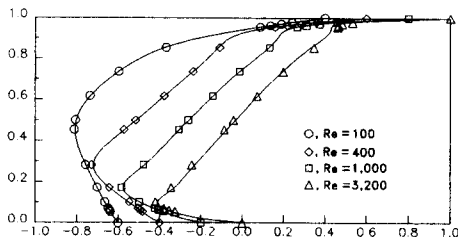


Fig. 2 u -velocity along the central vertical line. — ; present results, ○, ◇, □, △; data from Ghia *et al.* (1982)

문헌⁽¹⁴⁾의 Fig. 4를 보면 $t=\pi/2$ 일 때, 밑 벽면 구석에 존재하던 와동이 왼쪽 벽면 전체 길이까지 확장된다. 그러나 현재의 스킴으로 얻은 해(Fig. 3(a)(b))와 Duck⁽¹⁴⁾의 수치방법으로 본 저자들이 구한 해(Fig. 3(c)(d))는 그런 모양을 보여주지 않을뿐만 아니라, 서로 잘 일치하고 있다. 본 저자들이 Duck⁽¹⁴⁾의 방법으로 해를 얻을 때, 항의 개수는 $N=15$ 을 취했고 격자는 고구배 영역으로 밀집시킨($\Delta x_{min}=\Delta y_{min}=0.01$) 41×41 을 사용하였다. 선형시스템의 해는 PCGS를 사용하여 오차가 10^{-8} 보다 작을 때까지 수렴시켜 얻었다. 에러 척도로서 $\max(\zeta^{new}-\zeta^{old})<10^{-5}$ 을 적용했다. 이때의 $\max \psi_N$ 은 10^{-8} 보다 작았다.

반면에 Duck⁽¹⁴⁾의 경우엔 $N=5$ 와 등간격 격자 $\Delta x=\Delta y=0.025$ 을 사용하였고, 선형시스템의 해는 line Gauss-Seidel iterative 방법을 사용해서 구했다. 하지만 유량함수가 와도보다 상당히 빨리 수렴함에도 불구하고 그는 수렴판정에 대한 명확한 언급 없이 단지 에러가 10^{-5} 까지 내려갈 때까지 계산하였다고 언급하였다.

Fig. 4는 격자와 시간중분 크기에 따른 수치해의 의존도를 보기 위하여 물리량들의 변화가 심하리라고 예상되는 $Re=\beta=5000$ 의 경우에 대한 $x=0.25$ 위치에서의 u -속도 단면분포를 보여준다. 격자 크기에 따른 비교를 위하여는 고정된 시간 중분 $\Delta t=0.01$ 을 사용하였다. 가장 성근 격자 $N_x\times N_y=51$

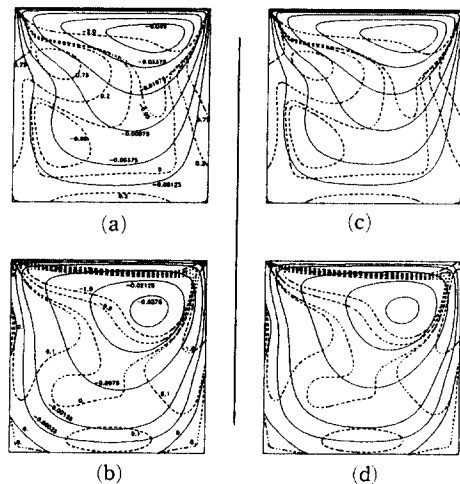


Fig. 3 Streamlines(—) and equi-vorticity lines(---). (a) and (b); present results, (c) and (d); Duck(1982). Phase: (a) and (c) are at $t=0$; (b) and (d) are at $t=\pi/2$

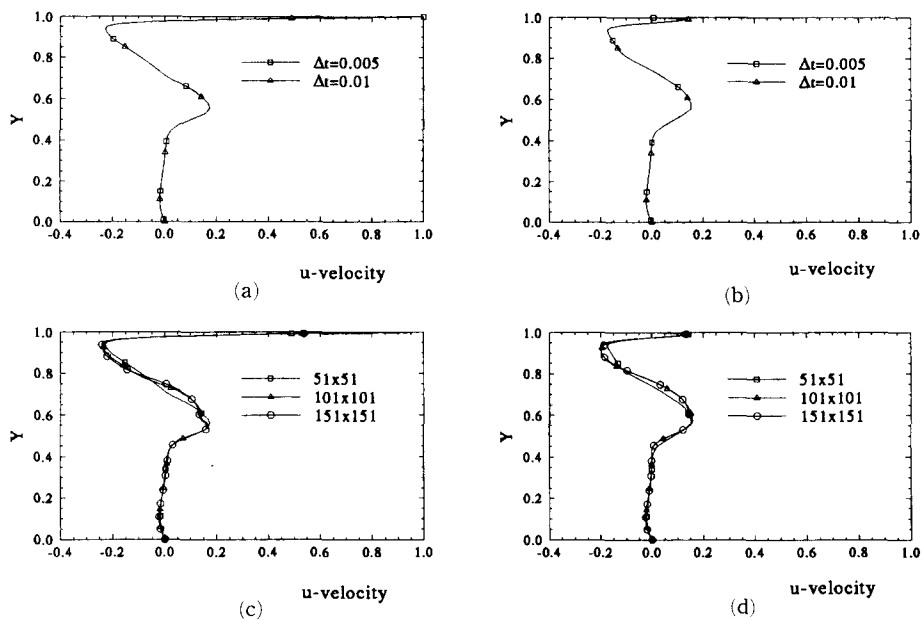


Fig. 4 Dependence on the numerical parameters in the solution :
 (a) and (c) are at $t=0$; (b) and (d) are at $t=\pi/2$

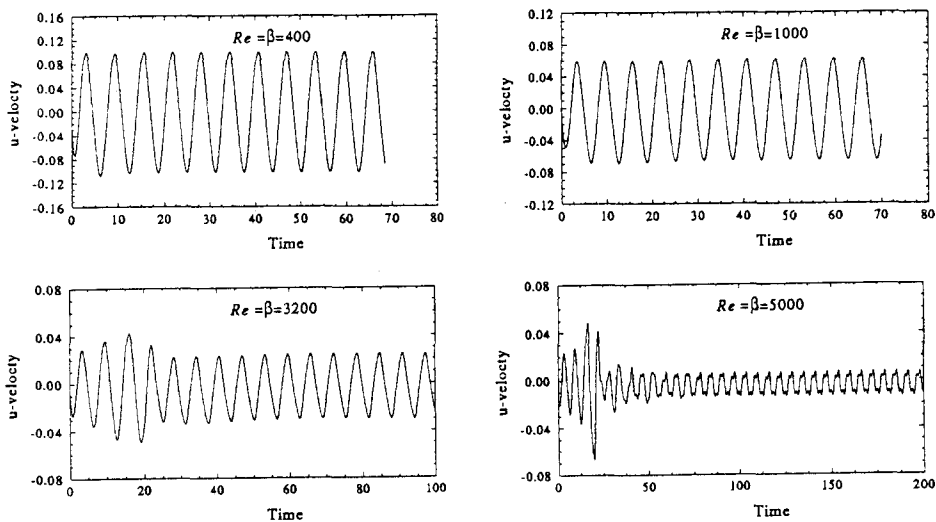


Fig. 5 Evolution of u -velocity with time at a point $(x=0.4875, y=0.9258)$

$\times 51$ 와 조밀한 격자 151×151 에서의 해는 중앙 부분에서 차이를 보여주지만, $N_x \times N_y = 101 \times 101$ 이면 가장 조밀한 격자해와 거의 일치함을 볼 수 있다. 시간증분에 따른 해의 비교를 위하여는 51×51 의 고정된 격자를 사용하여 계산하였다. Fig. 4에서 확인할 수 있는 바와 같이 현 해법은 시간증분을

적절히 작게 취하면 계산결과는 시간증분에 민감하지 않았다. Fig. 5는 계산영역의 한 점 $(x=0.5, y=0.9258)$ 에서 시간 증가에 따른 x -방향 속도 변화를 보여준다. Re_s 가 클수록 주기적인 해를 얻기 위해서 더 많은 계산 사이클이 필요함을 알 수 있다. 이러한 수치변수의 연구로부터 $N_x \times N_y = 101 \times$

101이고 $\Delta t=0.01$ 이면 충분히 정확하고 시간과 격자에 독립적인 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 따라서 특별한 언급이 없는 한, 이 수치 parameter를 사용하겠으며, 해의 주기성 검증은 계산영역의 여러 점에서 시간변화에 따른 속도 변화를 조사해서 판정한다.

4. Stokes 유동

무한 길이를 갖고 있고 거리가 L 만큼 떨어져 있으면서 한 평판이 평면상에서 조화진동하는 경우에 두 평판 사이의 유동 특성을 고찰하면, 비선형 효과가 지배적인 유동을 다루기 전에 필요한 유동특성을 미리 예상할 수 있다. 정지 상태에 있던 유체 내에서 윗벽면이 그 평면상에서 진동함에 따라 유체의 흐름이 유발될 경우, 이 유동을 지배하는 무차원화된 방정식은 아래와 같이 된다.

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

여기서 $\beta = \omega L^2 / \nu$ 이다. 경계조건은

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \cos(t) \quad (9)$$

초기조건은

$$u(y, 0) = 0 \quad (10)$$

이때 Duhamel의 중첩적분으로 알려진 해법을 적용할 수 있고, 이에 따른 식 (8)의 해는 아래 식과 같다.

$$\begin{aligned} u(y, t) &= y \cos(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{\frac{n^2}{\lambda} \sin(t) - \cos(t)}{\left(\frac{n^2}{\lambda}\right)^2 + 1} \right] \\ &\quad \sin(n\pi y) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $\lambda = \beta / \pi^2$ 으로 정의되고, 과도과정은 필요없기 때문에 $e^{-n^2 t / \lambda}$ 가 곱해져 있는 항은 전부 무시함으로써 충분히 긴 시간 경과 후의 해만 나타냈다. 식 (11)으로 주어진 해는 Fig. 6에서 확인할 수 있는 바와 같이 β 에 따라 세 가지 형태로 나타난다. Fig. 6(a)는 β 값이 작을 때이며 정지상태의 평판과 진동하는 평판 사이의 유동속도는 선형분포를 갖는다. 즉 Couette 흐름과 유사한 해가 된다. Fig. 6(c)는 β 값이 충분히 큰 경우로, 진동하는 벽면의 영향이 지수함수적으로 급격히 감소해서 정

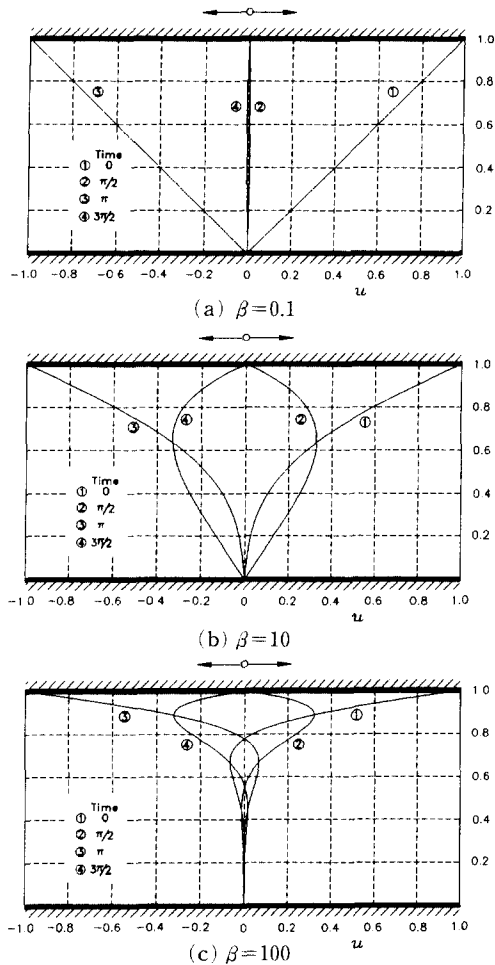


Fig. 6 Flows between two infinite plates

지 상태의 평판 근처에서의 유체의 유동을 무시할 수 있는 정도이다. 즉 Stokes의 제2문제의 유동 형태를 취한다. Fig. 6(b)의 경우는 위에서 언급된 두 가지 상황이 혼합된 형태로, 속도분포가 선형도 아니며 지수함수적으로 감소하지도 않는다. 이와 마찬가지로 진동하는 벽을 가진 정방향 웅덩이 안 흐름도 β 에 따라 세 가지 형태로 거동한다. β 의 값이 레이놀즈수에 비해 상대적으로 아주 작을 경우에는 준 정상상태에 가깝고, 그 값이 매우 클 경우엔 Stokes 제2문제의 해에 접근하며, 적당한 크기의 β 에서는 이 두 가지가 혼합된 형태로 존재한다. 따라서 우리는 레이놀즈수와 β 의 비가 중간 범위를 갖는 유동을 집중적으로 다루기로 한다.

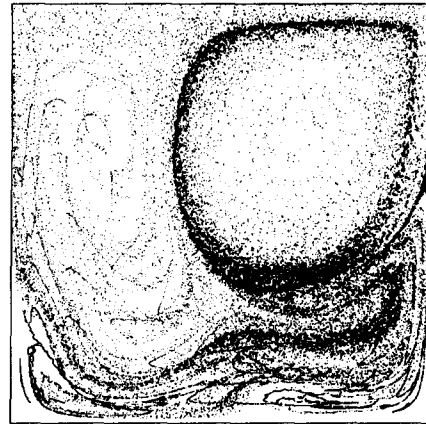
5. 계산결과

Table 1은 $Re=200$ 일 때 $t=0$ 와 $t=\pi/2$ 에서 β 의 증가에 따른 주와동 중심의 위치 변화와 최대 유량함수 값을 보여주고 있다. 주와동의 중심은 β 의 증가에 따라 오른쪽, 그리고 움직이는 벽 쪽으로 이동되며 Re 일 때 가장 오른쪽에 위치하고 β 가 더 증가함에 따라 다시 정방향 웅덩이 중심으로 이동함을 알 수 있다. 대류항($Re=0$)이 없는 경우에 주와동의 중심은 정확히 웅덩이 중심에 위치한다.⁽¹⁴⁾ 이것은 곧, 주와동의 중심이 옆 벽 쪽으로 치우침은 비선형 효과로 인한 것임을 가르쳐 준다. $\beta \ll Re$ 이면 앞서 두 평판 사이의 유동 해석에서 예견된 바와 같이, $t=0$ 일 때의 해가 정상상태의 유동과 유사해졌다. $t=0$ 에서 주와동의 강도는 β 의 증가에 따라 작아졌다. 즉 흐름이 약해졌다. 이런 특징은 $Re=0$ 일 때와 같은 경향이다(문헌 (14) 참조). 반면에 시간 지연 정도를 나타내는 $t=\pi/2$ 에서의 유동은 $Re \cong \beta$ 일 때 주와동의 강도가 가장 세고, $\beta \gg Re$ 이거나 $\beta \ll Re$ 이면 약해짐을 보여준다. 주와동의 중심은 시간에 관계 없이 β 의 증가에 따라 진동하는 벽 쪽으로 이동한다. 여기서 구해진 값들은 $N_x \times N_y = 51 \times 51$ 의 결과이기 때문에 매우 정확하다고 생각되지는 않으나 레이놀즈수가 작아 물리량들의 구배가 심하지 않기 때문에 정량적으로 그리고 정성적으로도 믿을만하다고 본다.

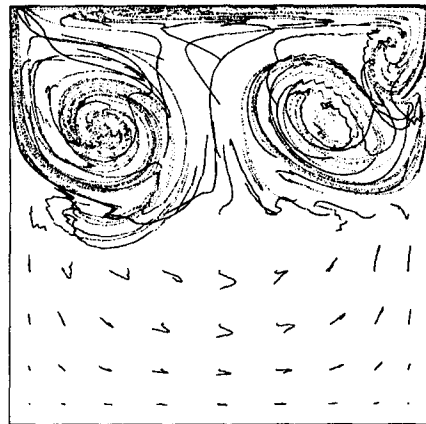
Fig. 7은 $Re=1000$ 일 때 β 에 따른 streakline들을 보여준다. β 가 작아짐은 $\epsilon = Re/\beta = a/d$ 로부터 진폭이 줄어들음을 의미한다. 또한 경계층 두께 δ 는

Table 1 Eddy strength : Maximum stream function Ψ_c and its location at $Re=200$

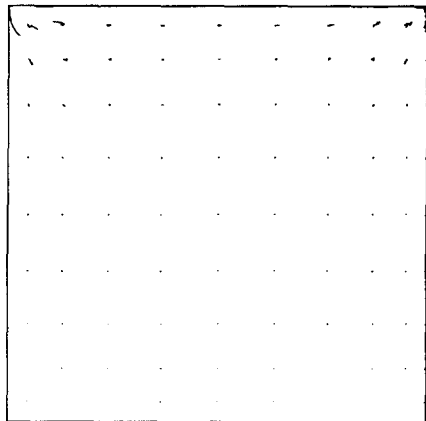
β	$t=0$		$t=\pi/2$	
	(x_c, y_c)	Ψ_c	(x_c, y_c)	Ψ_c
0	(0.592, 0.662)	-0.1078		
10	(0.622, 0.662)	-0.1058	(0.541, 0.609)	-0.0135
100	(0.725, 0.808)	-0.0697	(0.648, 0.661)	-0.0476
200	(0.750, 0.850)	-0.0531	(0.725, 0.737)	-0.0427
400	(0.749, 0.888)	-0.0387	(0.749, 0.807)	-0.0338
3200	(0.582, 0.904)	-0.0138	(0.568, 0.938)	-0.0167



(a)



(b)



(c)

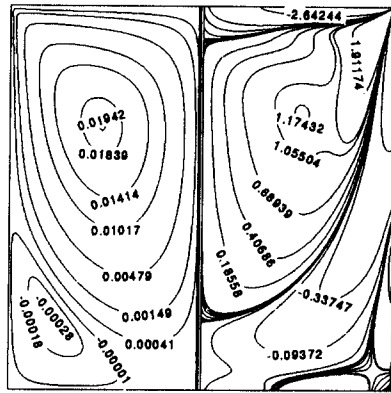
Fig. 7 Streaklines during a period at $Re=1000$: (a) $\beta=100$, (b) $\beta=1000$, (c) $\beta=10000$

$\delta \approx \beta^{-1/2}$ (참고문헌 14)이기 때문에 한 주기 당 입자의 이동거리가 증가하여 Fig. 7에서 보는 바와 같이 윗벽 근처에 있던 입자들이 밑벽 근방까지 이

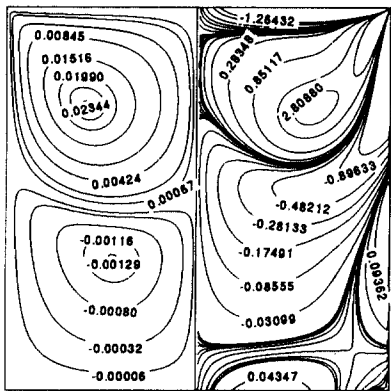
동하게 된다. 이와 반대로 β 가 증가하는 경우는 Iwatsu 등⁽³⁾이 지적한 바와 같이 옆과 밑벽의 영향을 점점 감소시켜 대부분의 영역에서 Stokes 유동에 접근해 간다.

시간에 독립인 streaming 흐름은 레이놀즈 응력과 고체표면상에 형성되는 Stokes 층의 작용으로 유도된다.⁽⁹⁾ Fig. 8의 정상 streaming 유선은 흐름 구조가 Re_s 에 따라 어떻게 변하는가의 명백한 경향을 보여줄뿐만 아니라 유체요소의 광범위한 이동과 관련이 되기 때문에 실제적으로 매우 흥미가 있다. 정상 streaming 유선과 와도는 현재의 계산 결과들에서는 $x=1/2$ 에 대하여 대칭이기 때문에 한 쪽 부분만 나타내었다. 정상 streaming 운동은 레이놀즈수가 고정되었을 경우에 Re_s 가 증가하면 약해진다. 즉, 준정상 유동에 접근해 간다. 반면에 Re_s 가 감소하면 밑벽 구석에 생성되는 streaming 와동의 크기가 작아지고 강도도 약해진다. 즉, 주와동의 크기가 성장함에 비해 강도는 약해진다. 특히 이 경우에 주와동의 중심은 윗벽 구석으로 이동하고 있는 것을 볼 수 있다. 이러한 결과로부터 $Re \approx \beta$ 일 때, 즉 $Re_s \approx Re$ 인 경우에 streaming 와동의 세기가 제일 강하고, 아래쪽 streaming 와동의 크기 또한 제일 커짐을 알 수 있다.

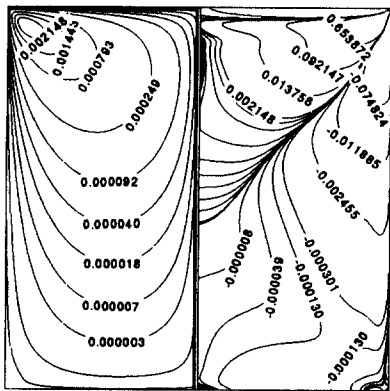
Fig. 9는 $Re = \beta$ 일 때 Re_s 에 따른 streaming 유선과 와도의 분포를 보여준다. 이 그림은 Re_s 가 증가할 때 streaming 와동의 강도가 강해지고 있음



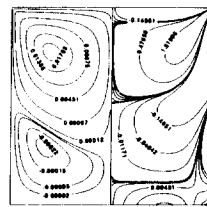
(a)



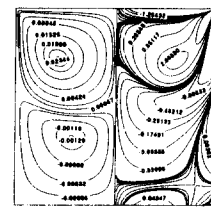
(b)



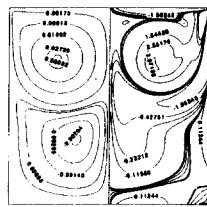
(c)



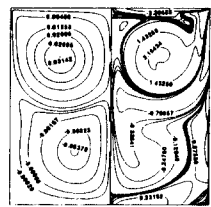
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 8 Streaming streamlines (left) and equi-vorticity lines (right) at $Re=1000$: (a) $\beta=100$, (b) $\beta=1000$, (c) $\beta=10000$

Fig. 9 Streaming Streamlines (left) and equi-vorticity lines (right) for $Re = \beta = Re_s$: (a) $Re_s=400$, (b) $Re_s=1000$, (c) $Re_s=3200$, (d) $Re_s=5000$

을 보여준다. 이것은 좀더 많은 에너지가 Re_s 의 값이 증가함에 따라 계 안으로 들어가고 있기 때문이다. $Re=\beta$ 일 때 Re_s 의 증가에 따른 입자들의 pathline과 streakline들이 Fig. 10과 11에 각각 주어져 있다. 이들 그림에서 이웃한 입자위치 사이의 시간 차는 $\delta t=0.01$ 이다. Fig. 10 상에서 굵은 점은 입자들이 처음 놓여진 위치를 가리키고 있다.

윗벽에 가까운 입자일수록 경계조건의 영향으로 한 주기 당 이동 거리가 크다. $x=1/2$ 상에 위치한 입자들은 윗벽과는 다른 위상을 갖고 진동하는 듯하지만, 그밖의 위치에 있는 입자들은 매우 원(circle)에 가까운 경로를 보여주고 있다. 또한 Fig. 7과 10은 한 주기 동안의 유체 입자의 이동 거리는 $\epsilon \approx O(1)$ 이면 매우 크기 때문에 Iwatsu 등⁽⁹⁾이 지적한 바와 같이 완전한 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식을 풀어야 한다는 것을 보여주고 있다.

streakline은 와운동을 가시화 하기 위한 좋은 수단으로 알려져 있다. Fig. 11은 streakline을 보여주고 있다. 입자들이 떨어지는 격자점은 x -와 y -방향으로 각각 20의 격자 간격을 갖는다. 한 주기당 윗벽의 양 구석에서 와동이 형성되며 그것은 시간 경과에 따라 밑벽 쪽으로 이동되고, 그들의 모양은 Re_s 의 증가에 따라 원(circle)에 가까워지고 있음을 볼 수 있다. Re_s 라는 것은 진폭이 일정

함을 의미하기 때문에 실제적으로 입자가 움직이는 거리는 Re_s 가 증가하더라도 한 주기 동안에 많이 늘어나지 않아 pathline과 streakline에 작은 변화를 가져왔지만, 밑벽쪽 입자들이 움직이는 거리는 증가했다.

Fig. 12~17는 $Re=\beta$ 이고 Re_s 가 증가할 때의 순간적 유선을, Table 2는 각 와동의 강도를 나타

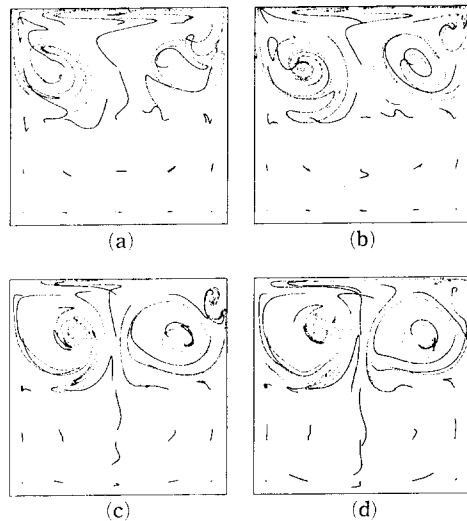


Fig. 11 Streaklines during a period for $Re=\beta=Re_s$: (a) $Re_s=400$, (b) $Re_s=1000$, (c) $Re_s=3200$, (d) $Re_s=5000$

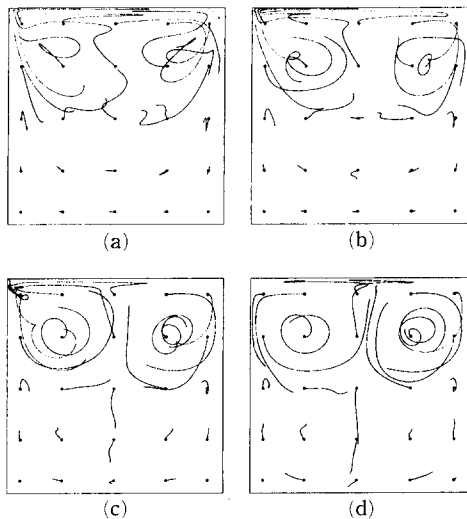


Fig. 10 Pathlines during a period for $Re=\beta=Re_s$: (a) $Re_s=400$, (b) $Re_s=1000$, (c) $Re_s=3200$, (d) $Re_s=5000$

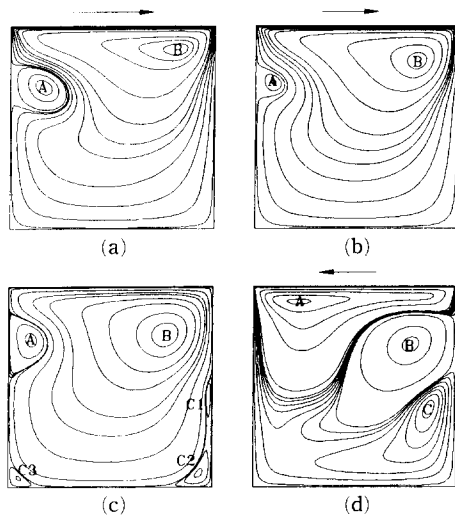


Fig. 12 Instantaneous streamlines at $Re(=\beta)=400$: (a) $t=0$, (b) $t=\pi/4$, (c) $t=\pi/2$, (d) $t=3\pi/4$

Table 2 Instantaneous eddy strength

 $Re(=\beta) = 400$

	ψ_A	ψ_B	ψ_C	ψ_{C1}	ψ_{C2}	ψ_{C3}
$t=0$	4.72×10^{-3}	-4.29×10^{-2}	—	—	—	—
$t=\pi/4$	5.32×10^{-4}	-5.40×10^{-2}	—	—	—	—
$t=\pi/2$	1.35×10^{-3}	-4.21×10^{-2}	—	1.27×10^{-5}	1.58×10^{-5}	5.31×10^{-6}
$t=3\pi/4$	1.77×10^{-2}	-2.01×10^{-2}	1.07×10^{-3}	—	—	—

 $Re(=\beta) = 1000$

	ψ_A	ψ_B	ψ_{B1}	ψ_{B2}	ψ_C	ψ_{C1}	ψ_{C2}
$t=0$	1.73×10^{-2}	-3.22×10^{-2}	—	—	—	—	—
$t=\pi/4$	1.23×10^{-2}	-4.40×10^{-2}	—	—	—	—	—
$t=\pi/2$	1.23×10^{-2}	-4.10×10^{-2}	—	—	—	3.20×10^{-6}	1.30×10^{-4}
$t=3\pi/4$	1.78×10^{-2}	—	-2.85×10^{-2}	-2.15×10^{-3}	1.25×10^{-3}	—	—

 $Re(=\beta) = 3200$

	ψ_A	ψ_{B1}	ψ_{B2}	ψ_{B3}	ψ_C	ψ_{C1}
$t=0$	2.60×10^{-2}	-3.20×10^{-2}	-3.74×10^{-3}	-2.10×10^{-2}	1.84×10^{-3}	—
$t=\pi/4$	2.33×10^{-2}	-3.65×10^{-2}	-5.42×10^{-3}	—	7.21×10^{-4}	4.41×10^{-5}
$t=\pi/2$	2.38×10^{-2}	-3.72×10^{-2}	-5.53×10^{-3}	—	8.57×10^{-4}	3.25×10^{-4}
$t=3\pi/4$	2.70×10^{-2}	-3.26×10^{-2}	-3.83×10^{-2}	—	1.93×10^{-3}	9.64×10^{-4}

 $Re(=\beta) = 5000$

	ψ_A	ψ_{B1}	ψ_{B2}	ψ_{B3}	ψ_C	ψ_{C1}	ψ_D
$t=0$	2.88×10^{-2}	-3.41×10^{-2}	-4.26×10^{-3}	-1.88×10^{-2}	3.47×10^{-3}	—	-1.12×10^{-5}
$t=\pi/4$	2.67×10^{-2}	-3.76×10^{-2}	-5.12×10^{-3}	—	2.68×10^{-3}	8.96×10^{-5}	-2.65×10^{-5}
$t=\pi/2$	2.73×10^{-2}	-3.74×10^{-2}	-5.29×10^{-3}	—	2.69×10^{-3}	3.50×10^{-4}	-1.2×10^{-5}
$t=\pi/4$	3.02×10^{-2}	-3.40×10^{-2}	-4.55×10^{-2}	—	3.28×10^{-3}	9.70×10^{-4}	—

내고 있다. 낮은 레이놀즈수 유동을 보여주는 Fig. 12와 14로부터 와동 A는 윗벽면의 속도가 최대가 될 때 가장 큰 값을 갖지만, 와동 B의 경우는 $t = \pi/4$ 에서 $t=0$ 일 때보다 더 강함을 알 수 있다. $Re_s=400$ 의 유선과 등와도 선도를 보여주는 Fig. 12와 13은 윗벽의 속도가 영으로 다가갈 때 와동 C1과 C2가 생성되는 것을 보여주고 있다. 윗벽이 왼쪽으로 움직이면서, 같은 방향으로 회전하는 와

동 A의 크기는 성장하고 강도는 세어진 반면에, 와동 C1과 C2는 크기가 성장하면서 하나로 합쳐졌다. Fig. 14와 15는 $Re_s=1000$ 에 대한 순간 유선과 등와도 선도를 보여준다. 윗벽의 속도가 $t=0$ 에서의 그것과 반대 방향이 될 때에 와동 B는 B1과 B2로 나누어졌지만, $t=\pi$ 가 되면서 와동 A의 성장으로 인하여 다시 하나로 합쳐졌다. 이와는 대조적으로 Fig. 16~17의 높은 레이놀즈 유동($Re=$

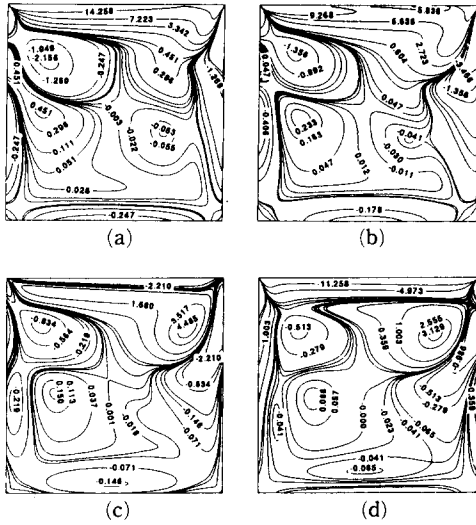


Fig. 13 Vorticity contours at $Re(=\beta)=400$: (a) $t=0$, (b) $t=\pi/4$, (c) $t=\pi/2$, (d) $t=3\pi/4$

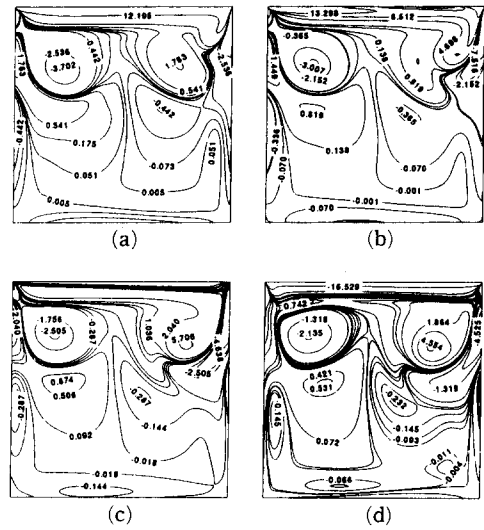


Fig. 15 Vorticity contours at $Re(=\beta)=1000$: (a) $t=0$, (b) $t=\pi/4$, (c) $t=\pi/2$, (d) $t=3\pi/4$

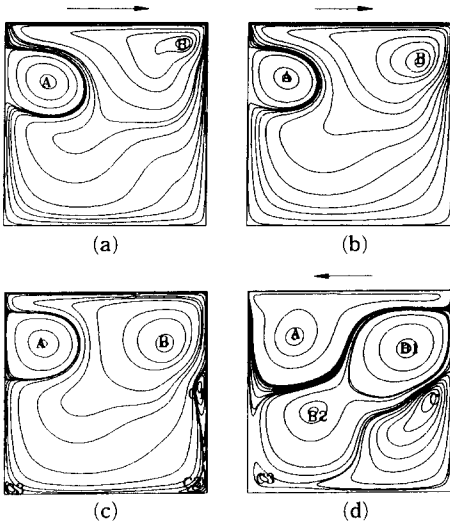


Fig. 14 Instantaneous streamlines at $Re(=\beta)=1000$: (a) $t=0$, (b) $t=\pi/4$, (c) $t=\pi/2$, (d) $t=3\pi/4$

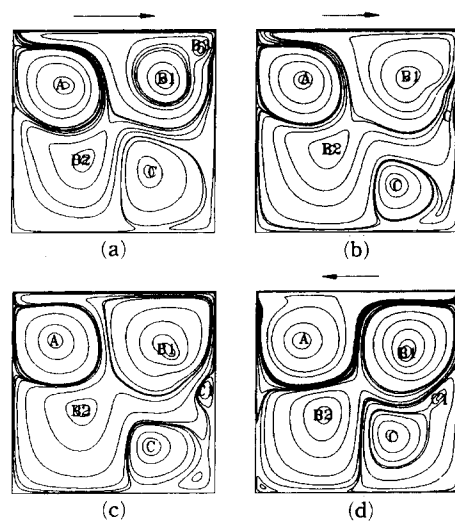


Fig. 16 Instantaneous streamlines at $Re(=\beta)=3200$: (a) $t=0$, (b) $t=\pi/4$, (c) $t=\pi/2$, (d) $t=3\pi/4$

3200 ; 5000)에서는 거의 같은 크기의 와동 4개가 시간에 관계 없이 존재한다. 와동 A는 시간이 $t=\pi/2$ 에서 $t=3\pi/4$ 로 경과하여도 거의 확장되지 않는 모습을 보여준다. 이것은 작지 않은 크기와 강도를 갖는 와동 C가 항상 존재하기 때문이라 생각된다. 따라서 낮은 레이놀즈 흐름과는 완전히 다른 흐름 형태가 된다. 이외의 작은 와동들은 생성과

소멸을 반복한다. 두 와동이 같은 방향으로 회전하고 그 중 하나가 상대적으로 크며 강도가 강할 경우 두 와동은 합쳐진다. 낮은 레이놀즈 유동에서 보여진 와동 B는 B1과 B2로 분할되어 강도가 줄어들었다. 이 유동의 특징은 Re_s 가 증가할수록 유동은 복잡해지지만 시간에 따른 각 와동의 크기와 강도의 세기 변화가 적어진다는 것이다. 그리고 모

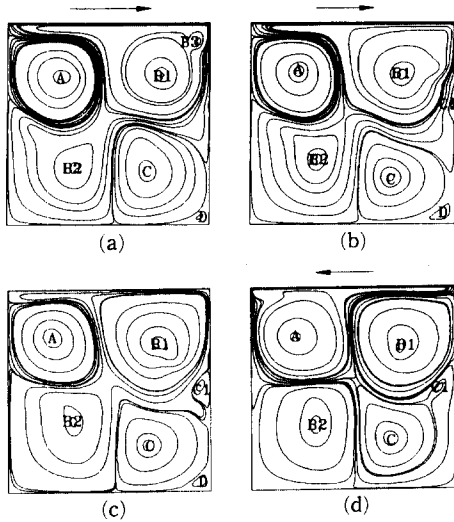


Fig. 17 Instantaneous streamlines at $Re (= \beta) = 5000$: (a) $t = 0$, (b) $t = \pi/4$, (c) $t = \pi/2$, (d) $t = 3\pi/4$

든 와동의 강도는 Re_s 의 증가에 따라 증가한다는 것이다. 즉 에너지가 진동하는 벽면에 멀리 있는 유체에게까지 점점 많이 전달된다.

6. 결 론

본 연구에서는 momentum coupling 스킴을 이용하여 진동하는 벽을 가진 정방형 용덩이 안의 유동을 해석하였다. 또한 한 벽면이 진동하는 무한 두 평판 사이의 엄밀해를 구했으며 이 해의 행동 형태는 β 에 따라 세 가지로 분류될 수 있음을 보였다. Duck⁽¹⁴⁾의 논문에 발표된 방법으로 만들어진 선형 방정식을 근래에 개발된 PCGS를 적용함으로써 매우 정확하게 풀었고, 얻어진 결과를 현 스킴으로 구한 해와 비교함으로써 그의 결과에 오류가 존재할 가능성을 지적하였다. 또한 Iwatsu 등,⁽³⁾ Soh 등,⁽¹²⁾ 그리고 본 논문에서 제시된 $Re = \beta = 400$ 일 때의 유선은 같은 모양을 보여주나 Duck⁽¹⁴⁾이 발표한 그림과는 상당한 차이를 보이고 있다. 정상 streaming 운동은 한 주기 동안에 유체입자의 전반적 이동과 관련되기 때문에 현실적으로 매우 중요하다. 본 논문에서 연구된 흐름은 두 개의 무차원 수(Re 와 β)의 비에 따라 여러 유동 형태가 발생한다. $Re = 200$ 에서 $Re \cong \beta$ 이면, $t = \pi/2$ 일 때 주 와동의 강도가 제일 강함을 보여주었다. 즉 유체운

동의 시간지연 정도가 가장 컸다. $Re = 1000$ 의 유동에서는 $Re \cong \beta$ 일 때 streaming 와동의 강도가 제일 강했다. 유선을 통한 흐름의 고찰로부터, 높은 레이놀즈수의 유동과 낮은 레이놀즈수 유동 사이에는 다음과 같은 차이가 존재함을 알 수 있었다. $Re = \beta$ 이고 Re_s 가 증가할 때에 시간에 따른 각 와동의 크기와 세기의 변화는 적어졌으며, streaming 와동의 강도의 세기와 한 주기 당 입자들의 운동거리는 증가하였다. Yan 등⁽⁹⁾이 원형 실린더 배열의 진동에 의한 유동의 연구에서 Re_s 가 증가하면 정상 streaming 운동은 비대칭이 될 수 있음을 보였다. 다른 매개변수에서는 사각구덩이 안의 streaming 흐름도 비대칭이 될지 모르나 본 논문에서 고려된 Re_s 에서는 streaming 유선의 대칭은 깨지지 않았다.

참고문헌

- (1) Stuart, J. T., 1963, Unsteady Boundary Layers. In "Laminar Boundary Layers" (ed. L. Rosenhead, Oxford University Press, pp. 347~408.
- (2) Stuart, J. T., 1966, "Double Boundary Layers in Oscillatory Viscous Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 24, Part 4, 673~687.
- (3) Iwatsu R., Hyun, J. M. and Kuwahara, K., 1992, "Numerical Simulation of Flows Driven by a Horizontally Oscillating Lid in a Square Cavity," *Trans ASME J. Fluid Engineering.*, Vol. 114, 143~151.
- (4) Iwatsu R., Hyun, J. M. and Kuwahara, K., 1993, "Numerical Simulations of Three-Dimensional Flows in a Cubic Cavity with an Oscillating Lid." *Trans. ASME J. Fluid Engineering.*, Vol. 115, 680~686.
- (5) Bertelsen, A., Svardal, A. and Tjøtta, S., 1973, "Nonlinear Streaming Effects Associated with Oscillating Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 59, Part 3, 493~511.
- (6) Bertelsen A. F., 1974, "An Experimental Investigation of High-Reynolds Number Steady Streaming Generated by Oscillating Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, part 3, pp. 589~597.
- (7) Riley, N., 1965, "Oscillating Viscous Flows," *Mathematika*, 12, pp. 161~175.

- (8) Duck, P. W. and Smith, F. T., 1979, "Steady Streaming Induced between Oscillating Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 91, part 1, pp. 93~110.
- (9) Yan, B., Ingham, D. B. and Morton, B. R., 1993, "Streaming Flow Induced by an Oscillating Cascade of Circular Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 252, 147~171.
- (10) Kawaguti, M., 1961, *J. Phys. Soc.*, Japan Vol. 16, p. 2307.
- (11) Burggraf, O. R., 1966, "Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 24, Part 1, pp. 113~151.
- (12) Soh, W. Y. and Goodrich, John W., 1988, "Unsteady Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. of Comp. Phy.*, Vol. 79, pp. 113~134.
- (13) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," *J. of Comp. Phy.*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (14) Duck, P. W., 1982, "Oscillatory Flow inside a Square Cavity," *J. Fluid Mech.*, Vol. 122, pp. 215~234.
- (15) Riley, N., 1967, "Oscillatory Viscous Flows, Review and Extension," *J. Inst. Maths. Applics.*, Vol. 3, pp. 419~434.
- (16) Kaushik, S. and Hagelstein, P. L., 1992, "The Application of the Preconditioned Biconjugate Gradient Algorithm to NLTE Rate Matrix Equations," *J. of Com. Phy.*, Vol. 101, pp. 360~367.
- (17) Jackson, P. and Robinson, P. C., 1985, "A Numerical Study of Various Algorithms Related to the Preconditioned Conjugate Gradient Method," *Intl. J. Num Meth Eng.*, Vol. 21, 1315~1338.
- (18) Amsen, A. A. and Harlow, F. H., 1970, Los Alamos Scientific Rep. No. La-4370.
- (19) Min, B. K. and Chang, K. S., 1997, "A Momentum Coupling Method on the Staggered Grid for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations," *Intl. J. Num. Meth. Fluids*, Accepted.
- (20) 민병광·장근식, 1993, "후향계단에서의 재부착 유동해석", 제3회 대한기계학회 전산유체역학분과회 Workshop 초록집, 서울대학교.
- (21) Batchelor, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.