

〈논 문〉

## 수평동심환상공간내 자연대류의 다중해에 관한 수치적 연구

정재동\* · 김찬중\*\* · 유호선\*\*\* · 이준식\*\*\*\*

(1996년 6월 11일 접수)

### Numerical Investigation on the Bifurcation of Natural Convection in a Horizontal Concentric Annulus

J. D. Chung, C. -J. Kim, Hoseon Yoo and J. S. Lee

**Key Words :** Bifurcation(다중해), Natural Convection(자연대류), Multi-Cell(다중셀), Flow Transition(유동천이)

#### Abstract

Steady-state two-dimensional natural convective heat transfer in horizontal cylindrical annuli was studied by solving the governing equations based on the primitive variables. Emphasis was put on the occurrence of the multiple solutions at a given set of parameter values, and on the determination of the bifurcation points at which those multiple solutions begin to branch out. The multicellular flow pattern from the results of melting process in an isothermally heated horizontal cylinder for high Rayleigh numbers, was used as initial guesses for the field variables. This was succeeded in new bifurcation point to tetracellular solutions for an identical set of parameter variables of previous works. The close examination of flow pattern transition around bifurcation point was also conducted. It was found that the mechanisms of flow transition are different depending on the critical Rayleigh number of bifurcation point.

기 호 설 명	
$D$ : 원관직경	$Nu$ : Nusselt 수
$g$ : 중력가속도	$p$ : 압력
$h$ : 열전달계수	$Pr$ : Prandtl 수
$J$ : Jacobian	$r$ : 반경좌표
$k$ : 열전도율	$R$ : 내부원관 반경에 대한 외부원관 반경비
$keq$ : 등가열전도율	$Ra$ : Rayleigh 수, 식 (7)
$\bar{k}_{eq}$ : 평균등가열전도율	$Ra_c$ : 환상공간 간격기준 Rayleigh 수
$L$ : 환상공간의 간격 ( $L = r_o - r_i$ )	$T$ : 온도
	$t$ : 시간
	$u, v$ : $(x, y)$ 방향의 속도성분
	$u_n, u_n$ : 공변속도성분
	$U, V$ : 관변속도성분
	$x, y$ : 수평, 수직방향 좌표

\*회원, 서울대학교 대학원  
 \*\*회원, 한국과학기술연구원  
 \*\*\*회원, 숭실대학교 기계공학과  
 \*\*\*\*회원, 서울대학교 기계공학과

## 그리스문자

- $\alpha$  : 열확산계수  
 $\alpha_\varepsilon, \alpha_\eta$  : 기하학적 계수,  $\alpha_\varepsilon = h_\varepsilon h_\eta^2 / J$ ,  $\alpha_\eta = h_\eta h_\varepsilon^2 / J$   
 $\beta$  : 열팽창계수  
 $\beta_\varepsilon, \beta_\eta$  : 기하학적 계수,  $\beta_\varepsilon = \lambda h_\eta / J$ ,  $\beta_\eta = \lambda h_\varepsilon / J$   
 $\Gamma$  : 디프 확산계수  
 $\varepsilon$  : 편심 거리, Fig. 4(c)  
 $\phi$  : 원주방향 좌표 또는 대표속속변수  
 $\nu$  : 동점성계수  
 $\xi, \eta$  : 변환된 좌표

## 하첨자

- $i$  : 내부원관  
 $o$  : 외부원관

## 상첨자

- $+$  : 무차원량

## 1. 서 론

수평원관 사이 환상공간 내 자연대류현상은 에너지저장시스템, 지하 케이블시스템, 원자로와 같은 공학적인 응용면에서 대단히 중요하기 때문에 관심분야별로 다양한 실험적, 이론적 연구가 수행되어 왔다. Powe 등<sup>(1)</sup>은 수평동심원관 내 Ra 수와 반경비에 따른 유동형태 천이를 살펴보고, Kuehn과 Goldstein<sup>(2)</sup>은 실험적 연구를 통해 Prandtl 수에 따른 유동과 열전달 영향을 연구하여 이론 수치결과와 비교하였다. 그 후 편심환상공간 내의 편심도에 따른 영향으로 연구범위를 확대하였다.<sup>(3)</sup> 이외에도 Mojtabi와 Caltagirone<sup>(4)</sup>은 2차원 유동의 안정성을, Vafai와 Etefayh<sup>(5)</sup>은 수평원관의 끝단효과(end effect)를, Farouk와 Guceri<sup>(6)</sup>는 높은 Rayleigh 수에서의 난류효과를 살펴보는 등 다양한 주제에서 많은 연구가 수행되어 왔다.

하지만 일부 연구를 제외하고는 대부분 단일셀유동에 국한되어 이루어져 왔고 다중셀유동의 생성과 유동천이 메커니즘을 살펴봄이 다중셀 생성에 따른 열전달의 증가뿐만 아니라 유동안정성 등 그 기초연구로서 중요성에도 불구하고 이에 대한 연구는 미미한 실정이다. 다중셀유동의 생성은 이론적, 수치적으로 이미 예측되었고 실험적으로도 발견된 현상이다. Ra 수와 반경비에 따라 셀유동영역천이를

Powe 등<sup>(1)</sup>은 발견하면서 셀입계 Ra 이상에서는 다중셀과 진동영역이 존재함을 밝혔다. Rao 등은 Ra가 커짐에 따라 단일셀유동이 다중셀로 천이함을 수치적, 실험적으로 보였고<sup>(7)</sup> 이후 다공성매질에서 다중셀의 존재를 수치적으로 확인하였다.<sup>(8)</sup> 또한 Cheddadi 등<sup>(9)</sup>은 실험과 수치를 통해 다중해의 존재를 보였고 최근에 Kim과 Ro<sup>(10)</sup>는 수치적으로 삼중셀구조를 발견함으로써 연구범위를 확장하였다. 하지만 실험적으로 밝혀진 다중셀유동형태와는 달리 수치적연구에서는 Cheddadi 등이 단일셀과 이중셀유동형태만을 얻었고 이후 Kim과 Ro가 새로운 분기점으로 삼중셀유동을 찾았지만 또 다른 분기점의 가능성에 대한 논의는 없었다.

이러한 원인은 기존 연구에서 취급하고 있는 초기조건에서 찾을 수 있을 것이다. 기존해석은 다중해의 존재와 새로운 다중해를 발견하기 위한 노력으로 초기조건의 의존성을 지적하고 다양한 초기조건을 적용한 시도를 하였다. 하지만 이에 대한 체계적인 이론은 정립된 바 없으며<sup>(8)</sup> 기존의 어떠한 노력도 사중셀 이상의 해를 발견한 바 없다. 본 연구에서는 최근 발표된<sup>(11)</sup> 등온가열 수평원관 내 유해과정의 결과 중에서 특히 Ra가 커짐에 따른 열적불안정성으로 생긴 삼중셀 이상의 다중셀구조를 출발점으로 하여 기존 연구에서 이루어진 반경비와 Pr에서 새로운 분기점(사중셀유동)을 찾아내었다. 또한 분기점부근에서의 유동천이를 자세히 살펴봄으로써 기존연구에서의 상반된 주장을 고찰하였고 오중셀 존재가능성에 대한 고찰을 수행하였다. Prandtl 수의 변화에 따른 오중셀을 살펴본 3.4절을 제외한 모든 경우에서 여타 연구와의 비교를 위해 대상물질은 공기(Pr=0.7)로 고정하였다.

## 2. 해 석

## 2.1 해석대상 모델

해석대상은 Fig. 1에 개략적으로 도시되었듯이 반경이 각각  $r_i$ ,  $r_o$ 인 동심환상공간내 일정 물성치를 가진 매질이 채워졌을 때 일정한 온도로 유지되는 내부원관과 외부원관의 온도( $T_i$ ,  $T_o$ )에 의한 자연대류과정이다. Boussinesq 근사에 의존하여 지배방정식을 구성하고 해석의 일반화 및 특성인자의 영향을 현시적으로 파악하기 위해 아래와 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

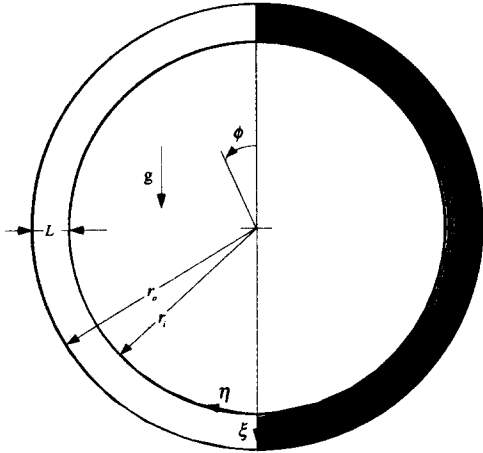


Fig. 1 Schematic of the problem considered and the grid system used in the computation.

$$x^+ = \frac{x}{r_o}, \quad y^+ = \frac{y}{r_o}, \quad u^+ = \frac{u}{a/r_o}, \quad v^+ = \frac{v}{a/r_o}$$

$$p^+ = \frac{p}{\rho a^2 / r_o^2}, \quad T^+ = \frac{T - T_o}{T_i - T_o} \quad (1)$$

이에 의한 무차원화된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^+} (u^+ u^+) + \frac{\partial}{\partial y^+} (v^+ u^+) = \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \right) - \frac{\partial p^+}{\partial x^+} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^+} (u^+ v^+) + \frac{\partial}{\partial y^+} (v^+ v^+) = \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 v^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 v^+}{\partial y^{+2}} \right) - \frac{\partial p^+}{\partial y^+} + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot T^+ \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^+} (u^+ T^+) + \frac{\partial}{\partial y^+} (v^+ T^+) = \frac{\partial^2 T^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \quad (5)$$

식 (3), (4)에서 자명하듯이 시스템의 특성을 나타내는 무차원수는 Prandtl 수, Rayleigh 수 및 반경비로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta(T_i - T_o)r_o^3}{a\nu}, \quad \text{R} = \frac{r_o}{r_i} \quad (6) \sim (8)$$

식 (7)에서 Ra는 외부원관의 반경을 특성길이로 정의되었으나, 타 연구와의 비교시에는 환상공간

간격을 특성길이로 한 Rayleigh 수,  $\text{Ra}_L = \text{Ra}(\text{R} - 1)^3$ 를 기준으로 하였다.

동심뿐만 아니라 편심환상 공간까지 포괄하는 일반화된 해석을 수행하기 위하여 지배방정식을 일반좌표계 ( $\xi, \eta$ )로 변환하였다. 일반화된 보존방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} (J\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho U\phi - \frac{\alpha_\xi \Gamma}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho V\phi - \frac{\alpha_\eta \Gamma}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = JS(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\beta_\xi \Gamma}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\beta_\eta \Gamma}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad (9)$$

여기서

$$U = \alpha_\xi u_\xi - \beta_\xi u_\eta, \quad V = \alpha_\eta u_\eta - \beta_\eta u_\xi \quad (10, 11)$$

$$u_\xi = (x_\xi u^+ + y_\xi v^+) / h_\xi$$

$$u_\eta = (x_\eta u^+ + y_\eta v^+) / h_\eta \quad (12, 13)$$

이며 다른 기하학적 계수들은 기호설명에 정의되어 있다. 좌표변환과 관련한 전반적인 내용은 문헌<sup>(12)</sup>에서 서술하였으며 여기서는 생략하기로 한다.

동일한 문제의 수치적 연구에서 Projahn 등<sup>(13)</sup>은 이중해의 주요한 원인으로 대칭경계조건을 지적하였으나 이후 Cheddadi 등<sup>(9)</sup>과 Fant 등<sup>(14)</sup>은 대칭조건에 의해 원관 반만을 계산영역으로 한 경우와 원관 전체를 계산영역으로 한 경우의 결과가 일치함을 확인하였다. 따라서 본 연구에서는 효율적인 수치계산을 위하여 대칭경계조건을 도입한다. 이에 따른 경계조건은 다음과 같다.

$$U = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial n} = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \text{ and } 1 \quad (14)$$

$$U = V = 0, \quad T^+ = 1 \quad \text{at } \xi = 1 \quad (15)$$

$$U = V = 0, \quad T^+ = 0 \quad \text{at } \xi = 0 \quad (16)$$

## 2.2 해석과정

원시변수 형태로 표현된 상기 지배방정식은 Karki와 Patanka<sup>(12)</sup>에 의해 제안된 방법에 의해 해석되었다. 계산에 사용된 격자계는 Fig. 1에 제시하였고 이중셀, 삼중셀, 사중셀, 오중셀 각각의 경우에서  $25 \times 120$ ,  $25 \times 130$ ,  $25 \times 140$ ,  $25 \times 150$ 의 격자를 사용하였다. 이는 다중셀의 존재와 소멸을 확인하기 위해 셀의 개수가 많아질수록 더 높은 해상도가 필요하기 때문이다. 특히 원주방향의 격자

가 다른 연구에 비해 많은 것은 예비수치실험을 통해 다중셀의 존재가 반경방향보다는 원주방향에 크게 의존함을 확인하였기 때문이며 외부원관보다 내부원관의 온도가 더 높으므로 상부에 Benard 대류 형태의 불안정이 발생하기 때문에 이 부근에 격자가 집중된 비균일 격자계를 구성하였다.

다중해의 존재가 초기조건에 크게 의존함이 잘 알려져 있고 따라서 적절한 초기조건의 부여는 본 문제의 해결에 있어서 매우 중요한 문제일 것이다. 본 연구에서는 최근 발표<sup>(11)</sup>된 등온가열 수평원관내 용해과정의 결과가 비록 상경계면의 요철이 존재하지만 삼중셀 이상의 다중셀구조를 보임에 착안하여 이를 출발점으로 하였다. 이는 Fig. 2에 나타내었으며 Fig. 2(a), (b), (c) 각각은 해당 Ra에서 n-octadecane( $Pr=50$ )에 대한 용해과정 중 임의의 시간에서의 결과로 삼중셀, 사중셀 그리고 오중셀의 각 유동형태를 보여주고 있다.

상변화해석 결과인 Fig. 2는 아직 동심수평환상공간 사이의 자연대류문제에 초기조건으로 사용할 수 없고 이를 위해선 우선적으로 상경계면의 요철을 제거하는 작업이 필요하다. 즉, 상경계면의 요철이 제거되어 매끈한 원형이 되었을 때에야 비로소 내부원관으로써 경계조건에 대응하게 될 것이다. 이러한 과정에서 주의할 사항은 해당 유동형태가 어떤 교란에 의해 다른 형태로 분기할 가능성이 항상 존재한다는 것이다. 따라서 상경계면 요철을 제거하여 원관으로 보내는 과정은 조심스럽게 진행되어야 한다. 특히 다중셀이 많은 복잡한 유동형태(사중셀, 오중셀)일수록 이러한 노력은 더욱 요구되며 본 연구에서는 액상분율 변화량을 극히 작게( $\Delta f_1=0.03$ ) 유지함으로써 완만하게 요철을 제거하는데 주의하였다.

상경계면의 요철이 제거된 상태는 아직 본 연구에서 수행하고자 하는 목적에 합당하지는 않다. 상기 결과는 상변화물질인 n-octadecane( $Pr=50$ )의 용해결과에서 얻은 것이고 일부 Pr의 영향을 살펴본 연구가 있기는 하지만 대부분의 동심환상공간내 자연대류 연구는 공기( $Pr=0.7$ )를 대상으로 하였으며 이의 비교를 위해  $Pr=0.7$ 에 해당하는 결과로 변환해 주는 과정이 있어야 한다. 이는 비교적 간단한 과정으로  $Pr=50$ 의 결과를 초기조건으로 하여 Pr가 더 작은 결과를 얻고 다시 이를 초기조건으로 하여 더 작은 Pr에 해당하는 결과를 얻는 과정을 반복하여 최종적으로 대상으로 하는  $Pr=0.7$ 의 결과를 얻게 된다. 이 과정에서도 전술한 바와 같은 교란을 가능한 억제하기 위해서 Pr의 급격한 변화는 피해야 할 것이다.

상기 과정을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 높은 Ra에 대한 수평원관내 용해과정을 해석하여 열적 불안정성에 기인한 다중셀 구조를 얻는다.
- (2) 상경계면의 요철을 조심스럽게 제거하여 수평동심원관 형상으로 접근시킨다.
- (3) 셀이 융합되어 다중셀 구조가 파괴되지 않도록 점진적으로 Pr을 낮추어 목표하는 Pr( $=0.7$ )에 해당하는 결과를 얻는다.
- (4) 이 결과를 초기조건으로 하여 반경비(R)와 Ra에 따른 다중해 특성을 살펴보고 분기점을 발견한다.

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 타당성 검토

본 연구에서 적용한 수치해석방법의 타당성을 검

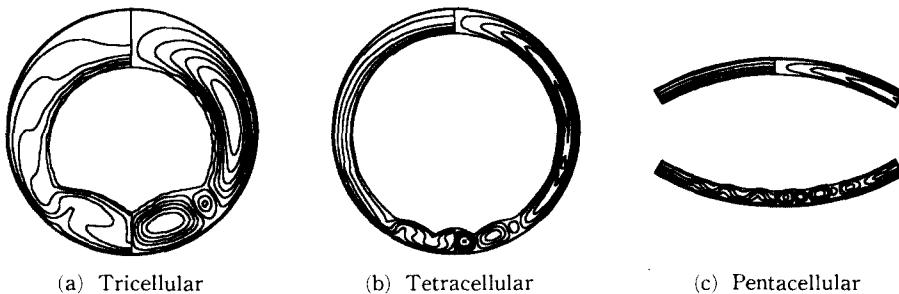


Fig. 2 The initial state used for tricellular, tetracellular and pentacellular flow pattern and temperature distribution from the results of melting process in an isothermally heated horizontal cylinder.

증하기 위하여 초기조건으로 사용된 상변화 결과에 대한 고찰과 초기조건에 의존하는 다중해 연구에 앞서 우선적으로 비교적 유동형태가 단순한 단일 유동셀에 대한 실험자료<sup>(2, 3)</sup> 및 보고된 다른 방법에 의한 수치해 결과<sup>(9, 10)</sup>와 상호비교하였다.

해석과정의 (1)에 해당하는 다중셀구조를 얻기 위한 상변화해석은 고정좌표계에 의한 엔탈피방법으로 해석하였으며 이에 대한 구체적인 해석방법과 그 타당성 검증은 문헌 (11)에서 자세히 언급하였다. 이로부터 본 연구의 취지에 부합하는 삼중셀, 사중셀, 오중셀 유동형태(문헌 (11)의 Fig. 4(b), Fig. 8(b), Fig. 10(a))를 보이는 유동장과 온도장을 보간하여 다중해 연구의 초기조건으로 사용하게 된다.

동심수평환상공간내 자연대류에서 비교적 유동형태가 단순한 단일 유동셀에 대한 실험결과와의 비교는 열전달에 미치는 대류의 영향을 반영하는 등가열전도율(equivalent conductivity)<sup>(2, 9, 10)</sup>을 통해 수행되었다.

$$k_{eq} = \frac{Nu}{Nu_c} \quad (17)$$

여기서  $Nu_c$ 는 순수전도에 의한 값으로  $2/\ln(R)$ 의 값을 가지며  $Nu$ 는  $hD/k$ 로 정의된다. 이로부터 내부원관과 외부원관에 대해 등가열전도율을 구하면 다음과 같다.

$$k_{eq, i} = -\frac{1}{R} \ln R \left. \frac{\partial T^+}{\partial n^+} \right|_{\xi=0} \quad (18)$$

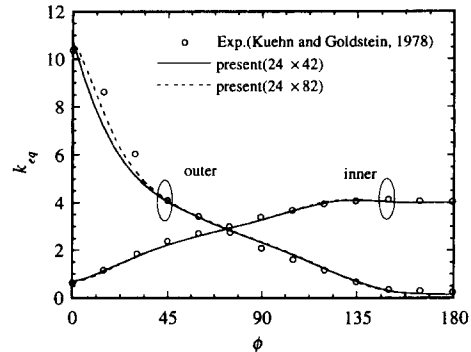
$$k_{eq, o} = -\ln R \left. \frac{\partial T^+}{\partial n^+} \right|_{\xi=1} \quad (19)$$

정의된 등가열전도율을 동심, 편심에 대해 각각 원주방향 각도에 따라 나타내면 Fig. 3과 같다. 각 경우에서 상층부에서 실험결과<sup>(2, 3)</sup>에 비해 해석결과가 다소 낮게 나타나고 있으나 전반적으로 잘 일치하고 있으며 격자실험을 통해서 이와 같은 단순한 유동형태에서는 원주방향으로 42개의 격자라도 충분한 해상도를 보임을 알 수 있다.  $\varepsilon/L=0.652$ 의 경우 상층부에서 등가열전도율이 작아짐은 실험결과와 거의 일치된 유동장(왼쪽)과 온도장(오른쪽) 형태를 보이는 Fig. 4(c)에서 확인되는 바 상층부에 원관 사이의 간격이 작아짐으로써 작은 이중셀이 생성되기 때문이며 이는 실험에서도 발견되는 현상이다.<sup>(3)</sup>

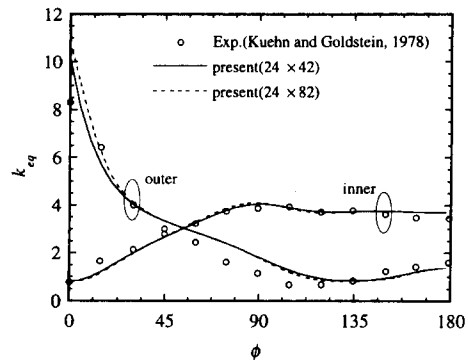
Table 1은 단일 유동셀이 얻어질 경우 내, 외부

원관에 대한 등가열전도율을 원주방향으로 평균한 아래 식으로 정의되는 평균등가 열전도율( $\bar{k}_{eq}$ )에 대해  $R=1.6$ ,  $Ra_L=3000$ 의 조건에서 비교한 것이다.

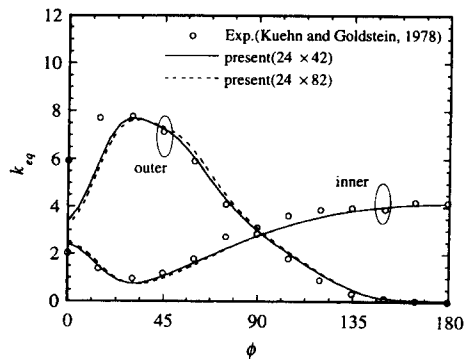
$$\bar{k}_{eq} = (\bar{k}_{eq, i} + \bar{k}_{eq, o})/2 \quad (20)$$



(a)  $Ra_L = 4.7 \times 10^4$ ,  $\varepsilon = 0$

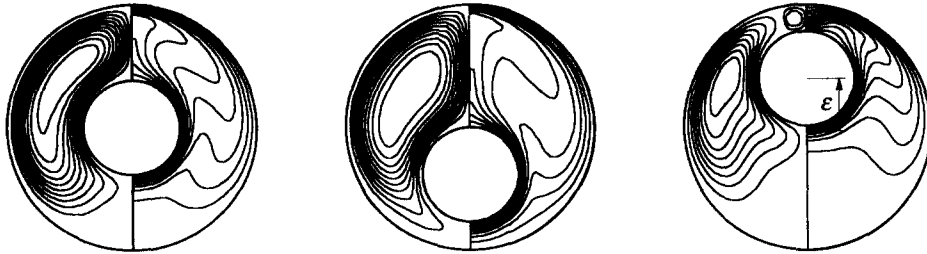


(b)  $Ra_L = 4.93 \times 10^4$ ,  $\varepsilon = -0.623L$



(c)  $Ra_L = 4.8 \times 10^4$ ,  $\varepsilon = 0.652L$

Fig. 3 Comparison of the local equivalent thermal conductivities with experiment of natural convection in horizontal annulus for  $Pr=0.7$ .



(a)  $Ra_L = 4.7 \times 10^4$ ,  $\epsilon = 0$       (b)  $Ra_L = 4.93 \times 10^4$ ,  $\epsilon = -0.623L$       (c)  $Ra_L = 4.8 \times 10^4$ ,  $\epsilon = 0.652L$

Fig. 4 Contour plots corresponding to Fig. 3; Isotherms(right) and stream lines(left).

**Table 1** Comparison of the average equivalent thermal conductivities with the works of Cheddadi *et al.*(1992) and Kim and Ro (1994).

Unicellular solutions with  $Pr=0.7$ ,  $R=1$ . 6 and  $Ra_L=3000$ .

	$\bar{k}_{eq}$	Grid resolution
Cheddadi et al.	1.213	$33 \times 33$
Kim and Ro	1.180	$31 \times 73$
	1.179	$59 \times 98$
This study	1.185	$25 \times 120$

**Table 2** Numerically determined bifurcation points for three different radius ratios. The numbers in the parentheses represent the results from Kim and Ro (upper) and Cheddadi *et al.* (down).

R	$Ra_L$ [1-2cell]	$Ra_L$ [1-3cell]	$Ra_L$ [2-4cell]
1.2	1894(1920/N)	2274(2330/N)	6354(N/N)
1.6	2336(2355/2800)		
2.0	2819(2860/3250)		

\* 'N' means that no previous result has been reported.

Cheddadi 등<sup>(9)</sup>의 결과에 비해 Kim과 Ro<sup>(10)</sup>의 결과나 본 연구결과의 평균등가 열전도율값이 작게 평가되는 것은 보다 조밀한 격자를 사용함에 따른 해상도여 기인한 것으로 판단된다. 본 연구에서는 특히 원관 상부를 대상으로 한 원주방향의 변화에 관심이 있으므로 원주방향의 격자를 타 연구에 비해 조밀하게 하였고 이에 따른 과도한 계산시간을 피하기 위해 비교적 큰 영향이 없을 것으로 예상되

는 반경방향의 격자를 상대적으로 성기게 구성하였기 때문에 Kim과 Ro의 격자실험을 통해 보여준 평균등가 열전도율값과는 다소 차이를 보인다. 하지만 그 차이가 미미하며 Kim과 Ro는 벽면에 격자를 집중하여 사용하였으므로 이에 따른 차이도 있을 것이다.

각기 다른 반경비( $R=1.2, 1.6, 2.0$ )에서 수행된 수치적 결과로서 분기점을 기존 결과와 함께 Table 2에 요약하였다. Cheddadi 등의 경우는 단일셀에서 이중셀로의 분기점만을 제시하였고 Kim과 Ro는 이와 더불어 삼중셀로의 분기점도 발견하여 제시하였다. 본 연구에서는 상기 결과를 포함하고 이중셀에서 사중셀로의 새로운 분기점을 발견하였고 우선적으로 비교할 기존 결과가 존재하는 단일셀에서 이중셀로의 분기에 대해 살펴봄으로써 본 연구의 타당성을 확인하였다. 상대적으로 성긴 격자계를 사용한 Cheddadi 등에 비해 본 연구결과는 전반적으로 낮은  $Ra_L$ 에서의 분기를 예측하고 있다. 하지만 격자 해상도가 비슷한 Kim과 Ro의 결과는 본 연구의 결과와 잘 일치하며 이로부터 본 연구에서와 같이 준안정상태로 존재하는 복잡한 유동해석에서는 충분한 해상도를 가진 격자의 필요성을 알 수 있다. 이에 대한 추후의 연구가 필요할 것이며 본 연구에서는 삼중셀, 사중셀로의 분기에서는 원주방향으로 보다 조밀한 격자로 계산이 수행되었다.

### 3.2 유동구조에 대한 Rayleigh 수의 영향

단일셀유동과 이중셀유동은 기존 연구에서도 취급하였듯이 비교적 쉽게 구할 수 있으나 삼중셀 이상의 경우에는 특별한 취급이 필요하다. 이는 수평원관 내 용해해석의 결과로 얻은 다중셀을 출발점으로 하여 전술한 해석과정에 따라 이루어질 수

있다. 초기조건으로 부여된 유동형태가 파괴되지 않도록 조심스럽게 비교대상으로 하는 Prandtl 수 (0.7)와 반경비(1.2)에서의 삼중셀, 사중셀의 해를 얻어 이를 다시 초기조건으로 하여 더 작은 Rayleigh 수에서의 결과를 얻고 같은 방법으로 점차로  $Ra_L$ 를 감소시킨 결과를 얻는다. 이때 유동셀에 큰 교란을 줌으로써 다른 해로 분기함을 피하기 위해  $Ra_L$  감소량은 가능한 작게하여 진행하여야 한다. 최종적으로 삼중셀 또는 사중셀의 유동형태가 파괴되어 삼중셀은 단일셀로, 사중셀은 이중셀로 융합된다. 이와 같은 방법으로  $Ra_L$ 를 점차로 낮추면서 그에 따른 유동특성을 살펴본다. 이를  $Ra_L$ 의 변화에 따른 평균등가 열전도율로 Fig. 5에 나타내었다.

삼중셀 또는 사중셀을 유지하기 위한 상기 노력과는 별개로 어느 정도의 교란을 부여함으로써 같은  $Ra_L$ 에서 삼중셀과 사중셀 이외의 또 다른 해,

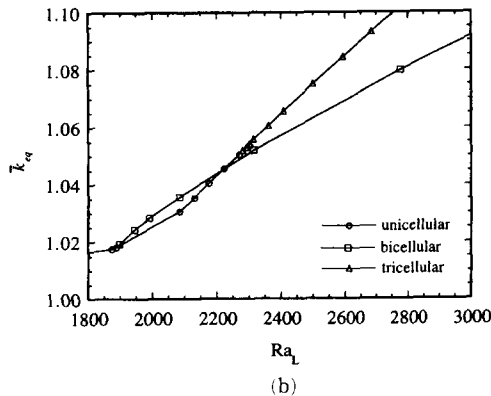
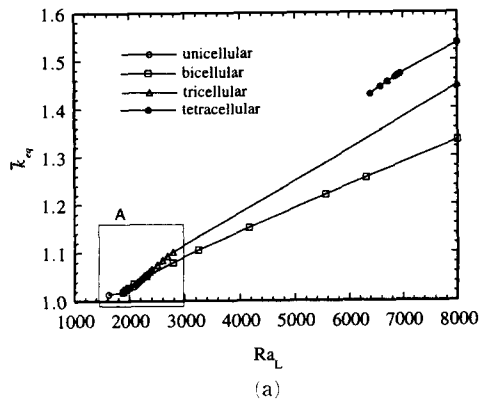


Fig. 5 The average equivalent thermal conductivities for four modes of solutions ( $Pr=0.7$ ,  $R=1.2$ ).

즉 이중셀 유동을 구할 수 있다. 이를 또한  $Ra_L$ 에 따른 평균등가 열전도율로 Fig. 5에 함께 나타내었다. 하지만  $Ra_L=2274$  이상에서는 어떠한 교란으로도 단일셀은 존재하지 않고 이러한 결과는 Rao 등<sup>(8)</sup>의 실험에서도 발견되며 Kim과 Ro<sup>(10)</sup>도  $Ra_L=2290$  이상에서는 단일셀이 존재하지 않음을 수치적 해석을 통해 보였다.

Fig. 5에서 알 수 있듯이  $Ra_L$ 가 커짐에 따라 평균등가열전도율은 점차로 증가하며 동일한  $Ra_L$ 에서도 이중셀에서 사중셀로 점차로 유동셀이 많아지면서 보다 효율적으로 열전달이 이루어지므로 평균 열전도계수는 커지게 된다. 기존 결과와의 비교를 위해 반경비 1.2에서 삼중셀까지의 결과(Fig. 5의 A부)를 Fig. 6에 함께 도시하였다. 유동분기에 민감한 원주방향으로 보다 조밀한 격자를 구성한 본 연구에서는 기존 연구에서보다 분기점의  $Ra_L$ 가 약간 낮고 이에 따라  $Ra_L$ 에 따른 평균등가 열전도율의 지연이 생기나 전반적으로 잘 일치하는 결과를 보인다.

동일한  $Ra_L$ 에서 보이는 다중해의 일례로서 서로 다른 세 가지 형태의 유동장(왼쪽)과 온도장(오른쪽)을 Fig. 7에 제시하였다. 각 경우는 반경비 1.2,  $Ra_L$  8000에 해당하는 결과로 이중, 삼중, 사중셀의 유동형태를 보이고 있다. 전술하였듯이 해당  $Ra_L$ 에서는 더 이상 단일셀은 존재하지 않으며 오중셀의 존재는 확인하지 못했다. 비교적 큰 Pr에서는 오중셀이 유지되다가 비교대상으로 하는  $Pr=0.7$ 로 낮추는 과정에서 융합되어 삼중셀로 분기하였다. 이에 대한 자세한 고찰은 3.3절을 통해 살펴보기로 한다. Fig. 7(a)에서 보이는 각 유동셀

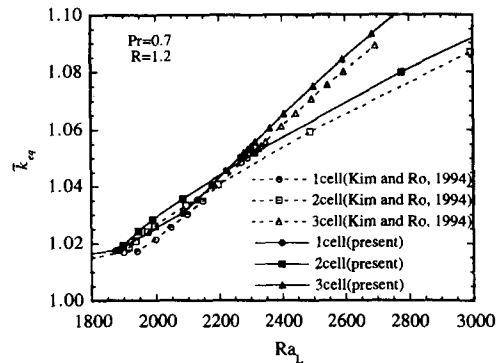


Fig. 6 Comparison of the average equivalent thermal conductivities of uni, bi and tri-cellular flow patterns with the previous work.

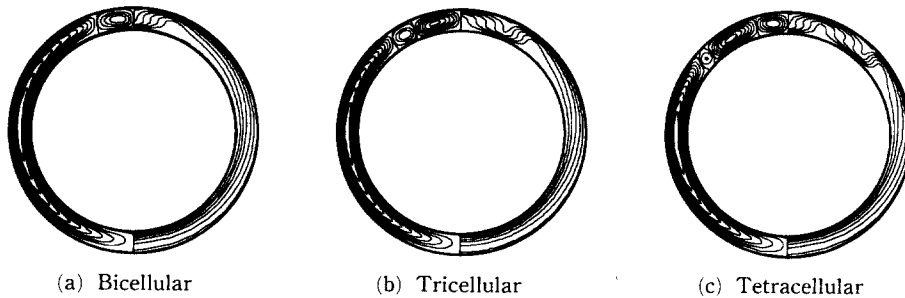


Fig. 7 Contour plots for (a) bicellular, (b) tricellular and (c) tetracellular solutions for  $R=1.2$  and  $Ra_L=8000$ ; isotherms(right) and stream lines(left).

은 반시계방향의 기본유동셀과 이에 인접하는 시계방향의 유동셀로 구성되어 있다. Fig. 7(b), (c)에서 추가된 유동셀들은 각기 인접하는 유동셀과 반대로 회전하는 방향을 가지며 이러한 경향은 회전 방향이 바뀌는 부근에서의 온도구배를 살펴봄으로써 재차 확인될 수 있다. 높은 온도의 내부원관에 의한 원관상부의 불안정 구조는  $Pr$ 이 클 경우 본질적으로 열적불안정성에 기인하며<sup>(14)</sup> 이 경우 인접하는 각 유동셀은 서로 반대방향으로 회전한다. 공기( $Pr=0.7$ )에 대해 수행된 본 연구는 Walton 등<sup>(15)</sup>이 제시한 임계  $Pr(=0.24)$ 보다 큰 경우로서 다중셀 생성은 열적불안정성이 주요한 원인이며 인접한 유동셀은 서로 다른 방향으로 회전하게 된다. 생성되는 유동셀의 유동강도를 살펴보면 반시계방향유동은 상대적으로 넓은 범위에 걸쳐 완만히 일어나고 시계방향유동은 좁은 범위에서 급격히 일어남을 알 수 있다. 이 원인은 원관곡률의 효과로 대칭면에서 멀어질수록 유동셀의 반중력방향 구동력이 약화되기 때문으로 보인다.

다중셀 생성이 열전달에 미치는 효과를 살펴보기 위해 Fig. 7과 동일한 경우에서 원주방향에 따른 등가열전도율을 Fig. 8에서 표현하였다. 유동구조가 복잡해질수록 보다 많은 산과 골이 생성됨을 알 수 있고 이는 다공성매질에 대한 Rao 등<sup>(8)</sup>의 결과나 Kim과 Ro<sup>(10)</sup>의 결과와 유사하다. 이중셀의 경우는 원주방향의 각도가  $20^\circ$  근처에서 외부원관에서의  $k_{eq}$ 가 최대값을 내부원관에서  $k_{eq}$ 가 최소값을 가짐을 알 수 있다. 이는 반시계방향의 기본유동셀과 인접하는 시계방향의 유동셀이  $20^\circ$  근처에서 서로 접하여 이 부근에서 상향유동을 보이므로 Fig. 7의 온도장에서 확인되는 것처럼 외부원관에 온도구배가 급증하기 때문이다. 같은 맥락으로 삼중,

사중셀에서도 유동셀이 접하는 부근에서 속도방향에 따라 각기  $k_{eq}$ 의 최대 또는 최소치를 보이고 있다. 이를 확인하기 위해 내부, 외부원관의 중심에서의 원주방향에 따른 반경방향속도를 Fig. 9에 제시하였다. 반경속도의 최대, 최소의 위치가  $k_{eq}$ 의

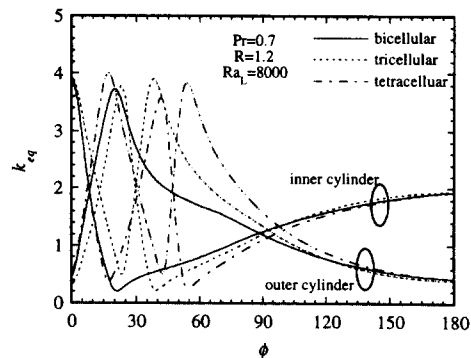


Fig. 8 The local equivalent thermal conductivity corresponding to the results in Fig. 7.

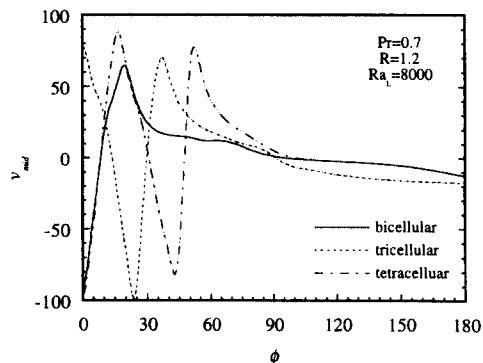


Fig. 9 Variation of the radial velocity at  $r = (r_o + r_i)/2$ .



최대, 최소의 위치와 거의 일치함을 확인할 수 있다.

### 3.3 유동구조의 천이과정

분기점부근의  $\bar{k}_{eq}$ 의 변화는 유동의 변화를 살펴 볼 수 있는 인자이다. Cheddadi 등은 분기점을 중심으로 서로 다른 두 유동 구조에 대한  $\bar{k}_{eq}$ 가 분기점부근에서의 셀임계  $Ra_c$ 에 대응하는  $\bar{k}_{eq}$ 로 수렴함을 주장했다. 즉, 분기점부근에서 2차 유동셀의 강도가 점차로 약화되어 최종적으로 완전히 사라진 단일셀 구조가 되는 유동변화를 주장하였다. 작동 매질은 다르지만 같은 주장이 Rao 등<sup>(8)</sup>에 의해서도 제기되었다. 하지만 최근에 Kim과 Ro<sup>(10)</sup>는 유동분기부근을 자세히 고찰함으로써 상기 주장과는 반대로 분기점을 중심으로  $\bar{k}_{eq}$ 는 급격히 변화함을 주장하였다. 따라서 수렴판정 기준으로  $\bar{k}_{eq}$  뿐만 아니라 각 종속변수에 대한 잔류생성항을 확인할 필요성을 지적하였다.

상반된 두 주장에 대해 본 연구의 Fig. 5를 통해 살펴보기로 한다. A부를 확대한 Fig. 5(b)를 살펴

보면 단일셀에서 이중셀로의 천이나 단일셀에서 삼중셀로의 천이는  $\bar{k}_{eq}$ 의 급격한 변화 없이 이루어짐을 알 수 있다. 즉, 이중셀의 경우는 상부대칭면에서 가장 가까운 유동셀이, 삼중셀의 경우는 상부대칭면으로부터 두번째 유동셀이 각기 그 유동강도가 점차로 약화되어 사라지는 과정을 거치게 된다. 하지만 Fig. 5의  $Ra_t=6354$  근처에서 이루어지는 이중셀에서 사중셀로의 천이는 전혀 다른 양상을 보인다. 이 경우에는 상부대칭면에서 가장 먼 세번째 유동셀이 점차로 그 유동강도가 약해지다가 한순간에 어느 정도의 유동강도가 있음에도 불구하고 사라지게 된다. 다양한 수치실험을 통해 이는 수치적 교란에 의한 천이는 아닌 것으로 판단된다.

$\bar{k}_{eq}$ 의 변화에 관한 상기 두 상반된 경우를 설명하기 위해 유동셀의 융합직후를 자세히 살펴볼 필요가 있다. Fig. 10은 삼중셀에서 단일셀로의 천이 전후를, Fig. 11은 사중셀에서 이중셀로의 천이 전후를 각각 나타낸다. 사중셀에서 이중셀로 천이되면서 상부대칭면으로부터 세번째 유동셀은 완전히 사라지고 두번째 유동셀과 기본 유동셀이 융합되어

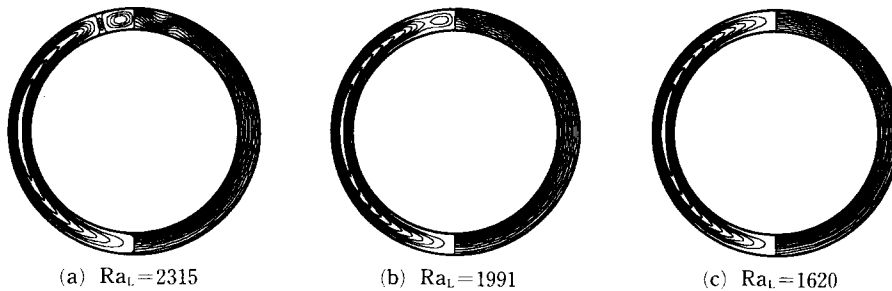


Fig. 10 Contour plots around the bifurcation point of tricellular to unicellular solution.

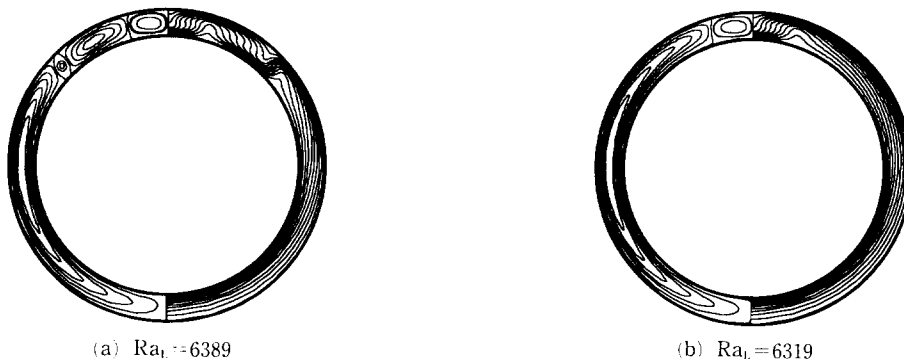


Fig. 11 Contour plots around the bifurcation point of tetracellular to bicellular solution.

새로운 유동셀을 형성함을 알 수 있다. 이를 원주 방향에 따른 등가열전도율로 표현한 Fig. 12에서 보면 사중셀의 경우, 보다 많은 산과 골이 존재하므로 이를 평균한  $\bar{k}_{eq}$ 는 이중셀에 비해 큰 차이를 보이게 된다. 이는 Kim과 Ro<sup>(10)</sup>의 주장과 같은 결론이다. 하지만 삼중셀에서 단일셀로 천이되는 과정은 이와 다르다. 상부대칭면으로부터 2번째 유동셀이 완전히 사라졌을 때 기본유동셀과 대칭면으로부터 첫번째 유동셀이 아직 완전히 융합되지 않고 같은 방향의 회전을 같은 유동을 한동안 유지하다가 그 강도가 점차로 약해져 두 유동셀이 완전히 융합되는 것은 Fig. 10(c)에서처럼 상당한 정도의  $Ra_L$  감소 후이다. 따라서 Fig. 10(b)의 상태는 시계방향의 유동이 사라진 단일셀유동이지만 반시계방향의 단일셀 내부에 같은 방향의 작은 유동이 두 개 존재하여 각기 원주방향 각도 15°, 25°에서 상향과 하향유동을 보이므로 Fig. 10(b)의 온도장에서 보이듯이 이 위치에서 온도구배가 커지게 된다. 이는 단일셀유동이지만 원주방향에 따른 등가열전도율이 Fig. 13에서 알 수 있듯이 각도 15°, 25°부근에서 아직도 최대, 최소를 가지며  $Ra_L$ 가 작아짐에 따라 유동강도가 약해져서 점차로 이 절대값이 작아지게 된다. 최종적으로 Fig. 10(c)에 해당하는 최대, 최소치가 사라진 상태로 된다. 따라서 삼중셀에서 단일셀로의 유동천이가 일어났지만 아직도 원주방향에 따른 등가열전도율이 최대, 최소를 보이며 평균값으로서의  $\bar{k}_{eq}$ 는 급격한 변화 없이 완만히 감소하게 된다. 이는 Cheddadi 등<sup>(9)</sup>과 Rao 등<sup>(8)</sup>의 주장과 같은 결론이다.

따라서 유동천이에 관한 상반된 두 주장은 분기점에 따라 부분적인 설명만이 가능함을 알 수 있다. 유동천이가 두 분기점에서 전혀 다른 양상을 보임은 천이가 일어나는 셀임계  $Ra_L$ 의 절대값에서 원인을 찾을 수 있을 것이다. 삼중셀에서 단일셀로의 천이가 일어나는  $Ra_L$ 는 2274로 비교적 낮은  $Ra_L$ 에 해당하므로 유동을 불안정하게 하는 요인으로서 열적효과와 수력학적효과와 상호작용이 사중셀에서 이중셀로의 천이가 일어나는 비교적 높은  $Ra_L$ (=6354)에서의 상호작용과는 다를 것이다. 즉, 삼중셀에서 단일셀로의 천이시에 단일셀 내에 같은 방향의 두 개의 작은 유동이 존재함은 그 불안정 요인이 수력학적영향이 크다는 것을 의미하며 사중셀에서 이중셀로의 천이시에는 높은  $Ra_L$ 로 유동불안정이 주로 열적요인에 기인하므로 유동셀의 융합후

융합된 셀 내부의 같은 방향유동은 존재하지 않는다. 추후에 이에 대한 부가적인 연구가 필요할 것으로 생각된다.

### 3.4 오중셀의 존재 가능성에 대한 고찰

해석과정중 오중셀의 경우는 Pr를 낮추는 과정에서 가장 외곽에 있는 셀이 융합되어 삼중셀로 천이되는 과정을 거쳐 안정된 상태의 오중셀을 구하지는 못하였다. 교란의 원인이 되는 여러 인자, 예를 들면 하향이완계수나 Pr의 변화량을 극히 미세하게 조정하여도 오중셀은 안정되게 유지되지 못하였으며 이는 Fant 등<sup>(14)</sup>이 지적한 바와 같이 셀의 반경대 원주방향의 길이차원이  $O(1)$ 을 유지하여야 하나 반경방향의 길이는 원관 사이의 간격으로 고정된 반면 셀의 개수가 많아짐에 따라 원주방향의 길이를 확보하지 못하기 때문으로 생각된다.

Pr=50, Pr=5에 해당하는 오중셀과 Pr=0.7에 해당하는 삼중셀을 Fig. 14에 나타내었다. 유동셀

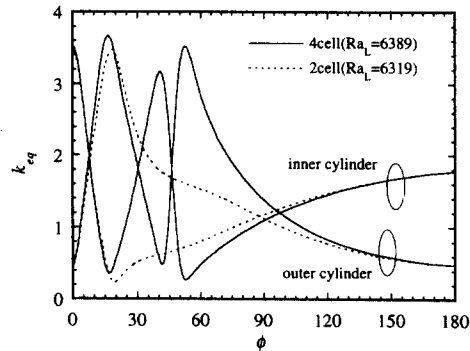


Fig. 12 The local equivalent thermal conductivity corresponding to the results in Fig. 11.

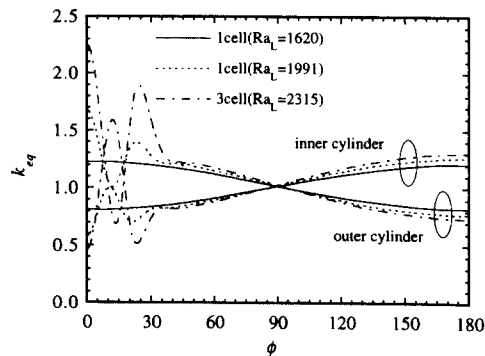


Fig. 13 The local equivalent thermal conductivity corresponding to the results in Fig. 10.

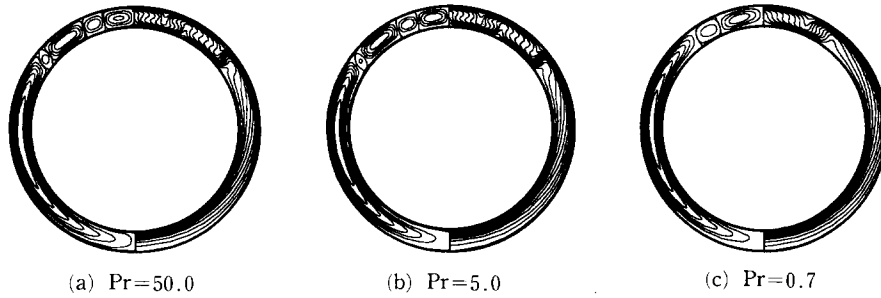


Fig. 14 Contour plots for tricellular and pentacellular solutions for  $R=1.2$  and (a)  $Pr=50.0$  (b)  $Pr=5.0$  and (c)  $Pr=0.7$ ; isotherms(right) and stream lines(left).

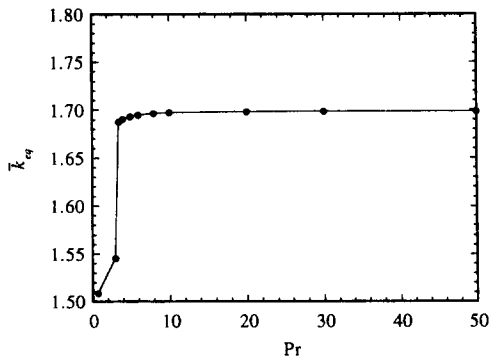


Fig. 15 The average equivalent thermal conductivities with respect to Prandtl number.

의 융합이 있기 전인 Fig. 14(a), (b)에서 Prandtl 수의 큰 차이에도 불구하고 유동형태의 큰 변화는 보이지 않는다. Pr 감소에 따른  $\bar{k}_{eq}$ 를 Fig. 15에 나타내었으며 이로부터 유동천이는  $Pr \sim 3$ 에서 이루어짐을 알 수 있다. 유동천이 메커니즘은 높은  $Ra_L$ 와 Pr로 주로 열적요인에 기인한 유동불안정이며 앞서의 사중셀에서 이중셀로의 천이와 같이 급격히  $\bar{k}_{eq}$ 의 변화를 보인다.

#### 4. 결 론

높은  $Ra_L$ 에서 수행된 수평원관내 용해해석을 통해 얻은 다중셀구조를 초기조건으로 하여 동심 수평환상공간 내 자연대류의 다중해와 그 분기점, 분기점부근의 유동천이과정을 연구하였다. 기존의 연구에서 규명된 동심환상공간 내 자연대류특성에 근거하여 고 Pr 수, 고  $Ra_L$  수 영역에서 출발하여 반경비를 고정하고 Pr 수를 감소시킨 후, Pr 수가

고정된 상태에서 반경비를 증가시키는 과정으로 사중셀(제한된 Pr 수의 범위에서는 오중셀)유동을 성공적으로 구하였다.

분기시 유동천이과정에 대한 기존의 상반된 주장은 분기점에 따라 부분적으로 설명이 가능하며 분기가 일어나는 셀임계  $Ra_L$ 에 따라 유동천이는 다른 메커니즘에 따라 일어난다. 삼중셀에서 단일셀로의 유동천이는 시계방향의 유동셀이 완전히 사라진 후에도 큰 반시계방향 유동셀내부에 같은 방향의 작은 유동이 일정  $Ra_L$ 의 범위 내에서 존재하므로  $\bar{k}_{eq}$ 의 변화는 완만히 진행된다. 하지만 사중셀에서 이중셀로의 유동천이는 상대적으로 높은 셀임계  $Ra_L$ 에서 일어나므로 유동불안정이 주로 열적요인에 기인하여 상기 경우와는 달리  $\bar{k}_{eq}$ 가 급격히 변화한다. 이러한 원인 규명은 추후에 보다 연구되어야 할 과제로 생각된다.

오중셀의 존재가능성에 대한 고찰에서 오중셀유동은  $Pr \sim 3$ 에서 삼중셀유동으로 천이함을 찾아내었고 높은 Pr과  $Ra_L$ 로 그 천이과정은 사중셀에서 이중셀로의 과정과 유사하게  $\bar{k}_{eq}$ 가 급격히 변화함을 보였다.

#### 참고문헌

- (1) Powe, R. E., Carley, C. T. and Bishop, E. H., 1969, "Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli," *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 310~314.
- (2) Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1976, "An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 74,

- pp. 695~719.
- (3) Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1978, "An Experimental Study of Natural Convection Heat Transfer in Concentric Horizontal Cylindrical Annuli," *J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 635~640.
- (4) Mojtabi, A. and Caltagirone, J. P., 1979, "Etude de la Stabilité d'un Ecoulement de Convection Naturelle Dans un Espace Annulaire Horizontal," *J. de Mécanique*, Vol. 18, pp. 225~241.
- (5) Vafai, K. and Etefagh, J., 1991, "An Investigation of Transient Three-Dimensional Buoyancy-Driven Flow and Heat Transfer in a Closed Horizontal Annulus," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 2555~2569.
- (6) Farouk, B. and Guceri, S. I., 1982, "Laminar and Turbulent Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 631~636.
- (7) Rao, Y. F., Miki, Y., Fukuda, K., Takata, Y. and Hasegawa, S., 1985, "Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 705~714.
- (8) Rao, Y. F., Fukuda, K. and Hasegawa, S., 1987, "Steady and Transient Analyses of Natural Convection in a Horizontal Porous Annulus With the Galerkin Method," *J. Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 919~927.
- (9) Cheddadi, A., Caltagirone, J. P., Mojtabi, A. and Vafai, K., 1992, "Free Two-Dimensional Convective Bifurcation in a Horizontal Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 99~106.
- (10) Kim, C. -J. and Ro, S. T., 1994, "Numerical Investigation of Bifurcative Natural Convection in Air-Filled Horizontal Annulus," *Proc. 10th Int. Heat Transfer Conf.*, pp. 85~90.
- (11) 정재동, 유호선, 이준식, 1996, "등온가열 수평원관내 용해과정동안의 열적 불안정성," 대한 기계학회 논문집, 제20권, 제6호, pp. 2046~2056.
- (12) Karki, K. C. and Patanka, S. V., 1988, "Calculation Procedure for Viscous Incompressible Flows in Complex Geometries," *Numer. Heat Transfer*, Vol. 14, pp. 295~307.
- (13) Projahn, U., Rieger, H. and Beer, H., 1981, "Numerical Analysis of Laminar Natural Convection between Concentric and Eccentric Cylinders," *Numer. Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 131~146.
- (14) Fant, D. B., Prusa, J. and Rothmayer, A. P., 1990, "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 379~387.
- (15) Walton, I. C., 1980, "The Stability of Free Convection in a Horizontal Cylindrical Annulus," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 33, pp. 125~139.