

〈논 문〉

유체막에서 관성과 열 소산의 영향

김 은 필*

(1996년 3월 3일 접수)

The Influence of Fluid Inertia and Heat Dissipation in Fluid Films

E. Kim

Key Words : Artificial Compressibility Formulation(인위적인 압축 형식), Galerkin Mixed Formulation(갈러킨 혼합 공식), Fluid Inertia(유체 관성), Heat Dissipation(열 소산), Long Bearing(긴 베어링)

Abstract

It was demonstrated earlier that for laminar, isothermal flow of the lubricant in long journal bearings, inertia has negligible effect on the load carrying capacity and influences only the stability characteristics of the bearing. The question in the present paper is: 'will these conclusions of the isothermal theory remain valid in the presence of significant dissipation, or will lubricant inertia and dissipation interact non-linearly to bring about qualitative changes in bearing performance?' The results obtained here assert that the effect of lubricant inertia on load carrying capacity remains negligible, irrespective of the rate of dissipation. The stability of the bearing is, however, affected by lubricant inertia. These results, although obtained here for long bearings with Sommerfeld and Gumbel boundary conditions, are believed to be applicable to practical bearing operations and affirm that bearing load may be calculated from classical, i. e., non-inertial theory.

기 호 설 명

a : 쌍극 좌표계의 원점	P : 유막의 압력
c : 반경 틈 ($c = r_2 - r_1$)	Pe : Peclet 수
c_D : 정압비열	Pr : Prandtl 수
E : Eckert 수	r_1 : 저널 반경
f : 무차원 하중	r_2 : 베어링 패드의 내부반경
H : Scale factor	r_b : 베어링 패드의 외부반경
k_o : 윤활막의 열전도 계수	Re : Reynolds 수
k_b : 베어링 패드의 열전도 계수	Re_c : 임계 Reynolds 수
$k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$: 무차원 x, y 방향의 강성계수	S : Sommerfeld 수
N_x, N_y : x, y 방향의 Spline 수	T : 유막의 온도
Nu : Nusselt 수	T_b : 베어링 패드의 온도
	T_s : 저널 온도
	t : 베어링 패드의 무차원 온도
	t_∞ : 주위 온도

*회원, 부산대 기계공학부

- V : 속도 벡터
 U : 저널의 원주방향의 속도성분
 V : 저널의 방사형방향의 속도성분
 p : 무차원 압력
 u, v : 무차원 속도성분
 t : 베어링 패드의 무차원 온도
 x, y : 무차원 좌표계
 α, β : 쌍극 좌표계
 ε : 편심비

그리스문자

- ρ : 밀도
 μ : 점성계수
 λ : 열전달계수
 ϕ : 열소산 함수
 ε_{ij} : 변형률
 γ, ϕ : 베어링 패드의 무차원 좌표계

상첨자

- : 무차원 파라미터

하첨자

- * : 대표 파라미터

1. 서 론

고전적인 윤활 해석⁽¹⁾에서는 윤활유의 점성이 윤활막에서 일정하다는 가정과 윤활 관성(lubricant inertia)은 무시한다는 가정에 현재 널리 사용되고 있는 레이놀즈 방정식이 유추되었다. 그러나 이와 같은 가정은 저널의 속도가 작은 경우는 유용하나 저널의 속도가 큰 경우는 더 이상 정확하게 고전적인 레이놀즈 방정식을 이용하여 베어링의 성능을 예측할 수 없을뿐만 아니라 윤활막에서 점성 열소산으로 인해 유막의 온도가 크게 증가되어 문제는 복잡해진다. 이와 같은 상황에서 Szeri⁽²⁾는 고전적인 베어링 해석의 한계를 제시하고 앞으로 윤활 공학이 연구할 방향을 크게 i) 유체 관성력의 영향 ii) 비뉴턴유체의 영향 iii) 난류의 영향 iv) Thermohydrodynamic(THD)의 영향 v) Elasto-hydrodynamic(EHD)의 영향과 같은 다섯 가지로 제시했다.

위에서 언급한 베어링 성능에 영향을 미치는 여러 인자들 중 i)과 iv)의 영향을 고려해 보고자 한다. 베어링 성능에 대한 윤활 관성(lubricant

inertia)과 점성 소산(viscous dissipation)에 대한 연구는 오랫동안 많은 학자들에 의해 이루어졌지만 지금까지의 연구 결과에 대한 결론은 일치하지 않고 있다. Constantinescu⁽³⁾는 평균 관성(averaged inertia)의 개념⁽⁴⁾을 이용해 낮은 레이놀즈수인 층류 지역에서는 대류 관성(convective inertia)의 영향이 베어링 하중 수용량에 크게 영향을 미치지 않는다는 결론을 내렸다. 반면에, Sestieri와 Piva⁽⁵⁾는 관성의 하중 수용량에 대한 영향이 40% 정도라고 계산했다. 이와 같은 현상은 베어링 성능을 해석하는데 있어서 일부 학자들은 엄밀한 방정식(exact equation)을 근사치로 풀고, 다른 학자들은 근사적 방정식(approximate equation)을 엄밀히 풀려는 시도를 했기 때문인 것 같다. 최근 Dai et al.⁽⁶⁾은 등온 상태에서 관성의 영향에 대한 논문을 발표하였는데 이들은 윤활유에 대해 주기성 경계조건에서 관성의 영향을 연구하였다. Dai et al.⁽⁶⁾ 논문의 중요 요점은 Sommerfeld 조건 또는 Gumbel 조건에서 긴 베어링의 윤활 관성이 층류영역에서 베어링 하중 수용량에 거의 영향을 미치지 않는다는 것이다. 그들은 Szeri와 Al-Sharif⁽⁷⁾이 유체 안정(flow stability)에 대하여 다중해를 구하려고 사용한 정확도 높은 수치 방법을 사용하였다.

이상과 같은 일련의 연구들에서 "베어링 하중 능력을 결정하는데 있어서 온도에 따라 변하는 점성 유체의 열 소산을 고려할 때 윤활 관성이 중요한가, 아니면 등온상태에서와 같이 무시될 수 있는가?"라는 질문이 대두된다. 주어진 문제가 매우 비선형이므로 선형일 때는 중요하지 않는 항들이 서로 연합하여 결과적으로는 중요한 영향을 미칠 수 있기 때문이다. 본 연구에서는 온도의 변수인 점성 윤활유에 대해서 윤활 관성과 점성 소산의 영향을 결합하여 고려하였다. 이러한 비선형 문제를 수행하기 위해서, Galerkin 방법에 의한 혼합 공식(mixed formulation)을 사용하여 엄밀한 방정식(exact equation)을 풀었다. 그러나 정상 상태인 Navier-Stokes 문제를 직접적으로 이산화하면 특이계(singular system)로 되기 때문에 이러한 불안정 조건에서의 문제를 해결하기 위해서 Zienkiewicz와 Wu⁽⁸⁾가 제안한 수치 기법인 인위적인 압축 형식(artificial compressibility formulation)을 연속방정식에, Navier-Stokes 방정식에 대해서는 시간 근사(time-asymptotic) 형식을 연합하여 사용하였다.

2. 이론 및 수치 해석 방법

저널 베어링은 편심이 있는 실린더 사이에 윤활유가 있는 경우이다(Fig. 1 참조). 유동은 정상, 비압축성이며 유체의 점성은 온도에만 의존한다고 가정하고 고전적인 윤활 해석방법에서와 같이 관성의 영향은 무시하지 않는다. 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식은 다음과 같다.

(i) 연속방정식

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

(ii) 운동량방정식

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\Delta P - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) + 2(\nabla \mu) \cdot (\nabla \mathbf{V}) + (\nabla \mu) \times (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (2)$$

(iii) 윤활막의 에너지방정식

$$\rho c_p \mathbf{V} \cdot \nabla T = k \nabla^2 T + \mu \Phi \quad (3)$$

(iv) 베어링 패드의 에너지방정식

$$\nabla^2 T_b = 0 \quad (4)$$

위 식에서 열소산 함수 Φ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi = 2(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2) + \epsilon_{12}^2 \quad (5)$$

여기서 ϵ_{ij} , $i, j=1, 2$ 는 변형률(strain rate)이다. 윤활유로는 미네랄 오일로 미네랄 오일의 물리적인 성분은 온도만의 함수이다. 윤활유의 점성과 온도의 함수는 Vogel의 모델⁽⁹⁾을 사용하였는데 이 모델은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mu = \mu_0 \exp\left(-\frac{C_1}{C_2 + T}\right) \quad (6)$$

여기서 μ_0 , C_1 그리고 C_2 는 실험을 통해 얻어진 물질 파라미터(material parameter)이다.

지배방정식 (1)~(6)은 쌍극 좌표계(bipolar coordinate system) (α, β) 에서 무차원화시키기 위해 다음과 같은 변수를 사용한다.

$$x = \Delta(\alpha - \alpha_1) \quad y = \frac{\beta}{2\pi} \quad \Delta = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$$h = \frac{H}{a} \quad \eta = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\{u, v\} = \frac{\sinh \left| \frac{\alpha_1}{r_1 \omega} \right| \{U, V\}}$$

$$p = \frac{P}{\rho u_*^2} \quad \bar{T} = \frac{T}{T_*} \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_*} \quad (7)$$

바깥 쪽 베어링 패드의 에너지방정식은 원통좌표계 r 과 θ 를 사용하는데 수치적인 방법 때문에 r 과 θ 는 0과 1 사이값이 되도록 다음과 같은 무차원 변수를 정의한다.

$$\gamma = \frac{r - r_2}{r_b - r_2} \quad \phi = \frac{\theta}{2\pi} \quad t = \frac{T_b}{T_*} \quad (8)$$

지배방정식에서 무차원 변수의 바(bar)표시는 편의상 생략한다. 지배방정식을 풀기 위해서 Galerkin 혼합방법(Galerkin mixed method)과 B-Spline 기저(basis)를 사용하였다. Galerkin 방법은 선형 또는 비선형 방정식에서 해를 구하기 위한 기술인데 이 방법을 적용하기 위해서는 두 가지 기본 단계가 있다.⁽¹¹⁾ 첫째는 주어진 방정식과 경계조건을 대략 만족할 수 있는 미지수의 표현식을 만든다. 이 대략적인 표현식을 주어진 방정식과 경계조건에 대치했을 때 나머지가 생긴다. 두번째 단계는 이 나머지를 일정한 값 이하로 만드는 것이다. 이제 수치적인 방법에 대해서 자세히 살펴보자. 여기 주어진 문제는 정상유동이지만 비정상 상태의 운동방정식과 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f^{(1)}(u, v, p) \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f^{(2)}(u, v, p) \quad (10)$$

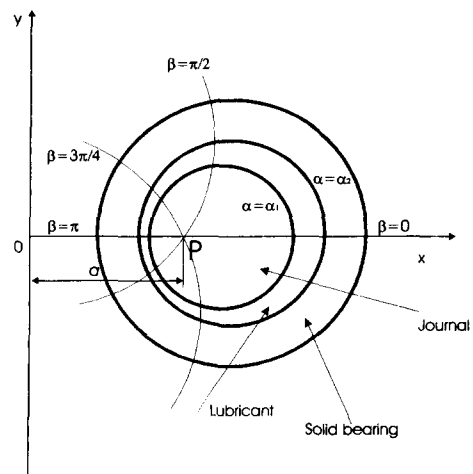


Fig. 1 Coordinate systems

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

여기서 c 는 매우 큰 수(소리의 속도)이고, $f^{(i)}, i = 1, 2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(u, v, p) = & -\frac{\Delta u}{h} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{2\pi h} \frac{\partial u}{\partial y} - v^2 \sinh \alpha + uv \sin \beta - \frac{\Delta}{h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \left(\frac{1-\eta}{\eta Re} \right) \mu \left[\frac{\Delta^2}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sinh \alpha}{\pi h} \frac{\partial v}{\partial y} - 2\Delta \frac{\sin \beta}{h} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ & \left. - \frac{\cosh \alpha + \cos \beta}{h} u \right] + \left(\frac{1-\eta}{\eta Re} \right) \left[\frac{\Delta}{2\pi h^2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sin \beta}{2\pi h} \frac{\partial \mu}{\partial y} u + \frac{2\Delta^2}{h} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\sinh \alpha}{2\pi h} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{2\Delta \sin \beta}{h} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) v \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(u, v, p) = & -\frac{\Delta u}{h} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{2\pi h} \frac{\partial v}{\partial y} - u^2 \sinh \alpha + uv \sin \alpha - \frac{1}{2\pi h} \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \left(\frac{1-\eta}{\eta Re} \right) \mu \left[\frac{\Delta^2}{h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\sinh \alpha}{\pi h} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2\Delta \sin \beta}{h} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cosh \alpha + \cos \beta}{h} v \right] \\ & + \left(\frac{1-\eta}{\eta Re} \right) \left[\frac{\Delta}{2\pi h^2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\Delta \sinh \alpha}{h} \frac{\partial \mu}{\partial x} v + \frac{\Delta^2}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta \sin \alpha}{h} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\sinh \alpha}{\pi h} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) u \right] \end{aligned}$$

위 식에서 무차원 변수는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} Re = \frac{\rho r_1 \omega c}{\mu_*} \quad Pr = \frac{\mu_* c_p}{k} \\ E = \frac{(r_1 \omega)^2}{c_p T_*} \left(\frac{r_1}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (11)에서 $\text{div} \mathbf{v}$ 는 다음과 같은 무차원 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{v} = & \frac{1}{h} \left(\Delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & - [u \sinh \alpha + v \sin \beta] \end{aligned} \quad (13)$$

본 논문에서는 Zienkiewicz와 Wu⁽⁹⁾가 제안한 공식을 사용하였는데, 시간에 대한 이산화를 하여 지배방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{p^{(n+1)} - p^{(n)}}{c^2 \Delta t} = -\text{div} \mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})} \quad (14)$$

운동방정식은 $n+1/2$ 시간 레벨에서 다음과 같다.

$$\mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})} = \mathbf{v}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} (f^{(1)}, f^{(2)}) \Big|_n \quad (15)$$

식 (15)를 식 (14)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{p^{(n+1)} - p^{(n)}}{c^2 \Delta t} = & -\text{div} \mathbf{v}^{(n)} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \text{div} (f^{(1)}, f^{(2)}) \Big|_n \end{aligned} \quad (16)$$

식 (9)와 식 (10)에서 정상유동은 $\partial u / \partial t = 0$, $\partial v / \partial t = 0$ 이고, 식 (16)에서는 $p^{(n+1)} = p^{(n)}$ 이다. 결과적으로 정상유동에서 문제를 직접 풀기 위해서 다음과 같은 방정식을 가지게 된다.

$$f^{(1)}(u, v, p) = 0 \quad (17)$$

$$f^{(2)}(u, v, p) = 0 \quad (18)$$

$$\text{div} \mathbf{v} + \eta \text{div} (f^{(1)}, f^{(2)}) = 0 \quad (19)$$

위 식에서 η 는 작은 수로서 $\eta \rightarrow 0$ 으로 됨으로써 정상 Navier-Stokes 문제로 된다. η 에 대한 해의 의존도는 Zienkiewicz와 Wu⁽⁹⁾의 논문에서 이론적인 배경을 참조하면 된다. 이제 선형방정식인 에너지방정식에 대해 고려해 보자. 유효막의 에너지방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{Re \eta}{(1-\eta)} \left(\frac{\Delta u}{h} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v}{2\pi h} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ = & \frac{1}{Pr} \left(\frac{\Delta^2}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ & + \mu E [2(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2) + \epsilon_{xy}^2] \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = & \frac{\Delta}{h} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{2\pi h} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \epsilon_{yy} = & \frac{1}{2\pi h} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\Delta u}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \epsilon_{xy} = & \Delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{h} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{h} \right) \end{aligned}$$

점성과 온도의 관계식은 다음과 같은 무차원 형태로 정의된다.

$$\mu(x, y) = \exp \left[\frac{c_1(1-T)}{(c_2+T)(c_2+1)} \right] \quad (21)$$

$$c_i = \frac{C_i}{T_*}, \quad i=1, 2$$

그리고 바깥쪽 베어링 패드의 에너지방정식은 다음과 같다.

$$[2\pi(r_b - r_2)]^2 G^2(\gamma) \frac{\partial t}{\partial \gamma} \left(G(\gamma) \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} \quad (22)$$

여기서 $G(\gamma) = \frac{\gamma}{(r_b - r_2)} + r_2$ 이다.

위의 무차원 변수를 이용한 경계 조건은 다음과 같다.

1) 속도

$$u(0, y) = 0 \quad v(0, y) = \sinh |\alpha_1| \quad (23)$$

$$u(1, y) = v(1, y) = 0 \quad (24)$$

2) 온도

$$T(0, y) = T_s \quad (25)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = -k_b \frac{\partial T}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} \quad (26)$$

$$T(1, y) = t(0, \phi) \quad (27)$$

$$t(1, \phi) + \frac{1}{Nu} \frac{\partial t}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=1} = t_\infty \text{이다.}$$

여기서 $Nu = \frac{\lambda}{k_0(r_2 - r_1)}$ 이다.

3) 주기성

주기 조건은 유량의 흐름 방향으로 고려한다.

$$\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial y^n}(x, 0) = \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial y^n}(x, 1) \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

$$\varphi = u, v, p, T, t$$

식 (17)~(19) 및 식 (20)~(22)에서의 미지수 $\{u, v, p, T, t\}$ 를 근사치로 구하려고 한다. 이를 위해서 x 방향으로는 "A" 일반적인 B-spline 기저로 y 방향으로는 "b" 주기적인 B-spline 기저로 정하고, $\{u, v, p, T, t\}$ 의 근사값을 구하기 위한 기저는 $A \otimes b$ 로 한다. 각 미지수의 확장(expansion)은 다음과 같다.

$$u(x, y) = \sum_{i=2}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-3} u_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (30)$$

$$v(x, y) = \sinh |\alpha_1| A_1(x)$$

$$+ \sum_{i=2}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-3} v_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (31)$$

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-3} p_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (32)$$

$$T(x, y) = T_s A_1(x) + \sum_{i=2}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-3} T_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (33)$$

$$t(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-3} t_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (34)$$

위의 식 (30)~(34)는 경계조건 (23)~(29)를 만족시키며, 식 (28)은 편미분방정식에 합해지므로 이산화된 방정식의 경계조건을 만족하게 된다. 확장 (30)~(34)를 운동방정식과 연속방정식에 대입하고, $A \otimes b$ 기저와 함께 투영(project)함으로써 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\langle f^{(1)}(x, y), F_{rs}(x, y) \rangle = 0 \quad (35)$$

$$\langle f^{(2)}(x, y), F_{rs}(x, y) \rangle = 0 \quad (36)$$

$$\langle \text{div} v, F_{rs}(x, y) \rangle + \delta \langle \text{div} [f^{(1)}(x, y), f^{(2)}(x, y)] F_{rs}(x, y) \rangle = 0 \quad (37)$$

여기서 $F_{rs}(x, y) \equiv A_r(x) b_s(y)$, 심볼 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 해의 영역인 $0 \leq x, y \leq 1$ 범위의 내적이다.

비선형 대수방정식 (35)~(37)은 아래와 같은 함수식으로 쓸 수 있다.

$$F(u, \sigma) = 0 \quad (38)$$

여기서 u 와 σ 는 벡터이고, 각각 변수 $\{u_{ij}, v_{ij}, p_{ij}\}$ 와 $\{\Delta, \eta, Re\}$ 를 나타낸다.

에너지방정식 (21)과 (22)는 선형이므로 아래와 같은 선형 대수시스템으로 표시된다.

$$M\tau = b \quad (39)$$

위 식에서 τ 는 미지의 온도 벡터이고, M 은 행렬, b 는 열벡터(column vector)인데 M 과 b 둘 다 속도 $\{u_{ij}, v_{ij}\}$ 와 $\{\Delta, \eta, Re\}$ 의 함수이다. 전체적인 수치 절차는 비선형방정식 식 (38)과 두 선형방정식(하나는 유효막을 위한 에너지방정식 (20)과 다른 하나는 베어링 패드를 위한 에너지방정식 (22)) 사이를 반복한다. 반복하는 각 스텝마다 식 (21)을 적용하여 점성을 새롭게 계산한다.

3. 수치 해석의 결과

해의 수렴성과 정확도를 확인하기 위하여 등온상태에서 이미 발표된 논문과 본 연구의 결과를 비교

분석하였다. 먼저, 결과의 수렴성을 조사하기 위해서 근사 공간 $N_x \times N_y$ 의 차원(dimension)을 변화시켜 무차원 부하와 선형화된 무차원 강성계수를 Table 1에 나타내었다. 무차원 부하와 무차원 강성계수의 정의는 Dai et al.⁽⁶⁾에 상세히 설명되었으므로 본 논문에서는 생략한다. 여기서는 Dai et al.⁽⁶⁾의 결과와 본 연구의 결과를 비교하였는데 근사 공간이 증가함에 따라 위에서부터 단조수렴(monotonic convergence)을 보여주고 있다. 무차원 부하는 압력의 적분 형태로 주어졌으므로 수렴이 부하에 대해서 빠르게 나타나고 있다. 다른 한편으로, 강성계수는 무차원 부하의 미분형태로 되어 있으므로 느리게 수렴함을 보였다. 그럼에도 불구하고 Sommerfeld 조건(주기성 압력)과 Gumbel 조건(음수의 압력을 제거)에서 현재의 결과는 만족함을 보였는데 Sommerfeld 조건에서 무차원 하중은 Dai et al.⁽⁶⁾의 결과와 0.1%, 강성계수는 1%내에서 일치하고 있다. Dai et al.⁽⁶⁾은 엄밀한 방정식을 유도하였으나 이산화하기 위한 과정에서 매우 복잡한 수학적 방법에 의해 압력항을 제거하였다. 반면 본 연구에서는 지배방정식의 압력항을 그대로 사용하였다. Dai et al.⁽⁶⁾의 결과는 32 숫자(digit)의 정확도로 CRAY Y-MP/832에서 계산되

어졌으며, 현재의 계산은 같은 32 숫자의 정확도로 VAX8650에서 행해졌다. Table 1에서 $Re=900$ 의 레이놀즈수인 경우는 천이(transition)부터 Taylor 와류 흐름으로의 임계값에 가까운데 이와 같은 극한값에서도 결과는 매우 만족할만하다. Table 2는 섭동법(perturbation analysis)을 사용한 DiPrima 등⁽¹¹⁾의 결과와 압력항을 수학적 방법으로 제거하여 수치적인 해를 얻은 Dai et al.⁽⁶⁾의 결과와 본 연구결과를 비교하였다. Table 2는 일반적인 저널 베어링의 틈인 $c/r_1=0.002$ 와 $E=0.0$ 인 경우를 나타내었다. 편심비 $\epsilon=0.1$ 인 경우 낮은 Reynolds 수인 $Re=10$ 인 경우는 DiPrima 등⁽¹¹⁾의 결과와 일치하다가 $Re=900$ 에서는 4.6%의 차이를 보이고 있는데 이는 Reynolds 수가 900 정도는 거의 임계값에 가깝기 때문이다. 결과적으로 Table 2에서는 Dai et al.⁽⁶⁾의 결과와 만족할만한 결과를 얻었으며, DiPrima 등⁽¹¹⁾의 결과는 작은 ϵ 과 Re 를 가정했지만 전체 층류영역에서 심지어는 $\epsilon=0.7$ 인 경우도 매우 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 지금까지, 수치해석의 정확성과 수렴성에 대해서 확인하였으므로 이제부터는 본 연구를 통하여 얻은 새로운 결과에 대하여 토의하고자 한다. Fig. 2는 방사형 방향의 온도분포를 유막의 간격이 가장 넓

Table 1 Variation of nondimensional force f and nondimensional stiffness k with number of splines ($c/r_1=0.002$, $\epsilon=0.3$, $Re=900$)

Boundary conditions		N	f	k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}
S.B.*	Present	10	17.8795	1.0412	59.5336	-60.4775	2.6869
		12	17.8763	1.0389	59.5289	-60.4586	2.6866
		14	17.8763	1.0389	59.5288	-60.4575	2.6866
		16	17.8763	1.0389	59.5287	-60.4574	2.6866
	Dai et al.**	--	17.8508	1.0273	59.4472	-60.1967	2.6748
G.B.	Present	10	8.7819	12.4030	28.8513	-30.7534	4.9543
		12	8.7827	12.3701	28.8559	-30.7559	4.9385
		14	8.7827	12.3689	28.8564	-30.7545	4.9380
		16	8.7827	12.3687	28.8567	-30.7547	4.9379
	Dai et al.	--	8.7558	12.0317	28.8116	-30.6268	4.6663

*S.B: Sommerfeld boundary

G.B: Gumbel boundary

**Dai, Dong & Szeri(1992)

Table 2 Comparison of nondimensional force f for present, Dai et al.* and DiPrima** at different eccentricity ratios and Reynolds numbers ($c/r_1=0.002$, $E=0.0$)

ε	Re	$(f_R)_{Present}$	$f(R)_{Dai}$	$(f_R)_{DiPrima}$
0.1	10	0.0038	0.0039	0.0038
	100	0.0384	0.0389	0.0382
	500	0.1919	0.1942	0.1910
	900	0.3454	0.3502	0.3438
0.3	50	0.0448	0.0446	0.0446
	100	0.0896	0.0892	0.0892
	500	0.4478	0.4461	0.4461
	900	0.8059	0.8029	0.8030
0.5	50	0.0374	0.0406	0.0372
	100	0.0749	0.0746	0.0745
	500	0.3746	0.3727	0.3724
	900	0.6742	0.6708	0.6702
0.7	50	-0.0127	-0.0121	-0.0122
	100	-0.0253	-0.0242	-0.0244
	500	-0.1257	-0.1211	-0.1220
	1100	-0.2756	-0.2660	-0.2683

*Dia, Dong & Szeri(1992), numerical

**DiPrima and Stuart(1972), small perturbation

은 $y=0$ 에서 편심비 $\varepsilon=0.5$, $c/r_1=0.002$ 에서 나타내었다. 그림은 Eckert 수의 증가에 따른 온도 분포를 나타내었는데 이때 Reynolds 수는 각각 100, 900으로 했다. 여기서 지적하고 싶은 점은 유막의 두께는 $O(10^{-3})$ 이지만 x 방향의 범위는 $[0, 1]$ 사이라는 것이다. 이것은 무차원 온도 데이터를 도식화하는데 있어서 바르게 해석하지 않으면 유막 내에서의 열조건의 왜곡된 면으로 볼 수 있다. 낮은 Reynolds 수를 나타낸 Fig. 2a에서 최고온도는 유막의 중간지점에서 일어나는 것을 알 수 있으며 Reynolds 수가 증가하여 900일 때는 최고온도가 경계면 쪽으로 이동하는 것을 알 수 있는데 이는 Reynolds 수가 커짐에 따라 유체의 관성이 커져서 최대온도점이 움직이는 것으로 생각된다. 현재의 모델에서는 베어링 냉각의 수단으로써 온도장의 주기성을 고려한 외부로의 뉴턴의 냉각만을 고려하였다. 즉 레이놀즈수가 증가함에 따라 발생하는 열이 외부로 빠져 나가지 못하고 유막에 남아서 온도를

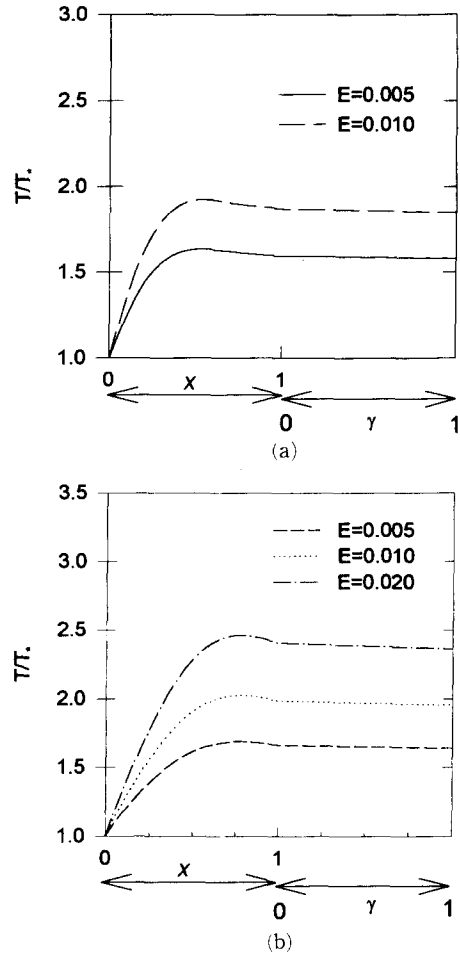
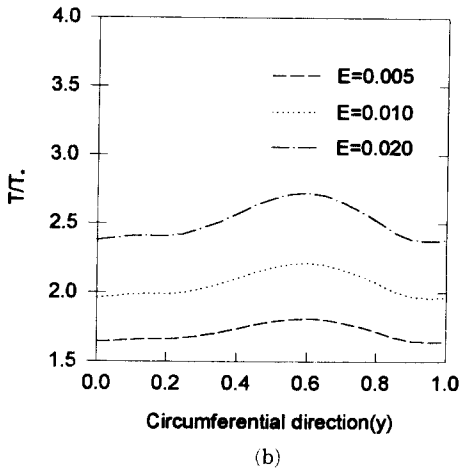
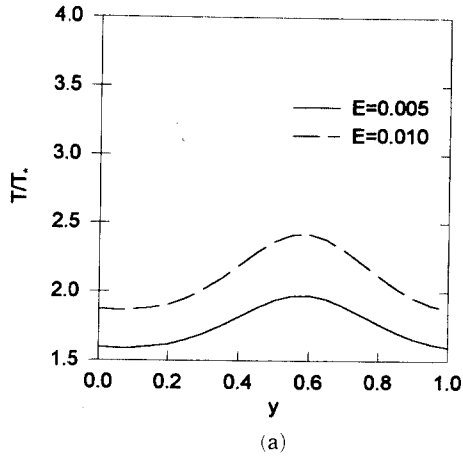


Fig. 2 Radial (x, γ) temperature profile at maximum gap ($y=0$), $c/r_1=0.002$, $\varepsilon=0.5$ (a) $Re=100$ (b) $Re=900$

상승시키므로, 결과적으로 베어링의 온도는 특히 높은 레이놀즈수에서 유막의 최고온도에 가깝게 된다. $E=0.005$ 에서 $E=0.010$ 로 변할 때 $Re=100$ 에서는 15% 정도의 최고 온도차이를 나타내고 $Re=900$ 에서는 17% 정도의 차이를 보이는 것을 볼 때 Eckert 수에 따른 Reynolds 수의 변화가 온도차의 비에 크게 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있다. Fig. 3은 $Re=100$ 과 $Re=900$ 인 경우의 원주형 방향의 온도분포를 나타낸 것이다. 최고온도는 $Re=900$ 인 경우 $y=0.6$ ($\theta=216^\circ$) 지점에서 일어나고 있는데 $y=0.5$ 가 저널과 베어링의 간격틈이 가장 좁은 지점인데도 이 점에서 온도가 최고가 되지 않고 하류쪽으로 이동하여 유막의 온도가 최고가 되



고 있는 것은 윤활 관성의 영향으로 생각된다. 그림에서 Eckert 수의 증가에 따른 최고온도 지점은 크게 변하지 않는 것을 알 수 있다. Table 3은 층류 영역에서 Reynolds 수를 변화시켰을 때 무차원 하중을 나타낸다. 표에서는 편심비 $\epsilon=0.5$ 인 경우지만 다른 편심비에서도 비슷한 결과를 얻었으므로 여기서는 $\epsilon=0.5$ 인 경우만 토의하기로 한다. $E=0.0$, 즉 등온흐름인 경우는 $Re=1$ 에서 $Re=900$ 으로 변할 때 무차원 하중은 Sommerfeld 조건과 Gumbel 조건하에서 거의 변하지 않고 있는데 이는 Dai et al.⁽⁶⁾의 결과와 일치된 경향을 보이고 있다. Eckert 수가 $E=0.005$ 에서 0.02로 변할 때 Sommerfeld 조건에서 무차원 하중은 2% 이내로 변하는 것을 알 수 있는데 이는 Gumbel 조건에서

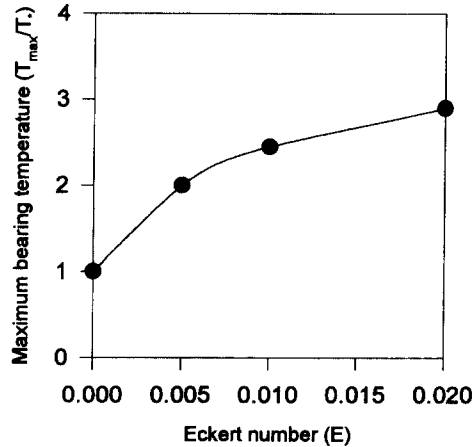


Fig. 3 Bearing surface temperature variation in y-direction $c/r_1=0.002$, $\epsilon=0.5$ (a) $Re=100$ (b) $Re=900$

Fig. 4 Variation of maximum bearing temperature ($Re=900$, periodic boundary conditions)

Table 3 Combined effects of inertia and viscous dissipation on load carrying capacity f ($c/r_1=0.002$, $\epsilon=0.5$)

Boundary condition	Re	Eckert Number			
		0.0	0.005	0.01	0.02
Sommerfeld	1	30.5458	--	--	--
	100	30.5460	13.7543	--	--
	500	30.5489	13.8520	10.3445	7.2941
	900	30.5556	14.0294	10.3745	7.4204
Gumbel	1	16.3054	--	--	--
	100	16.2960	8.4880	--	--
	500	16.2588	8.4685	7.0058	5.4392
	900	16.2230	8.4364	7.0032	5.4210

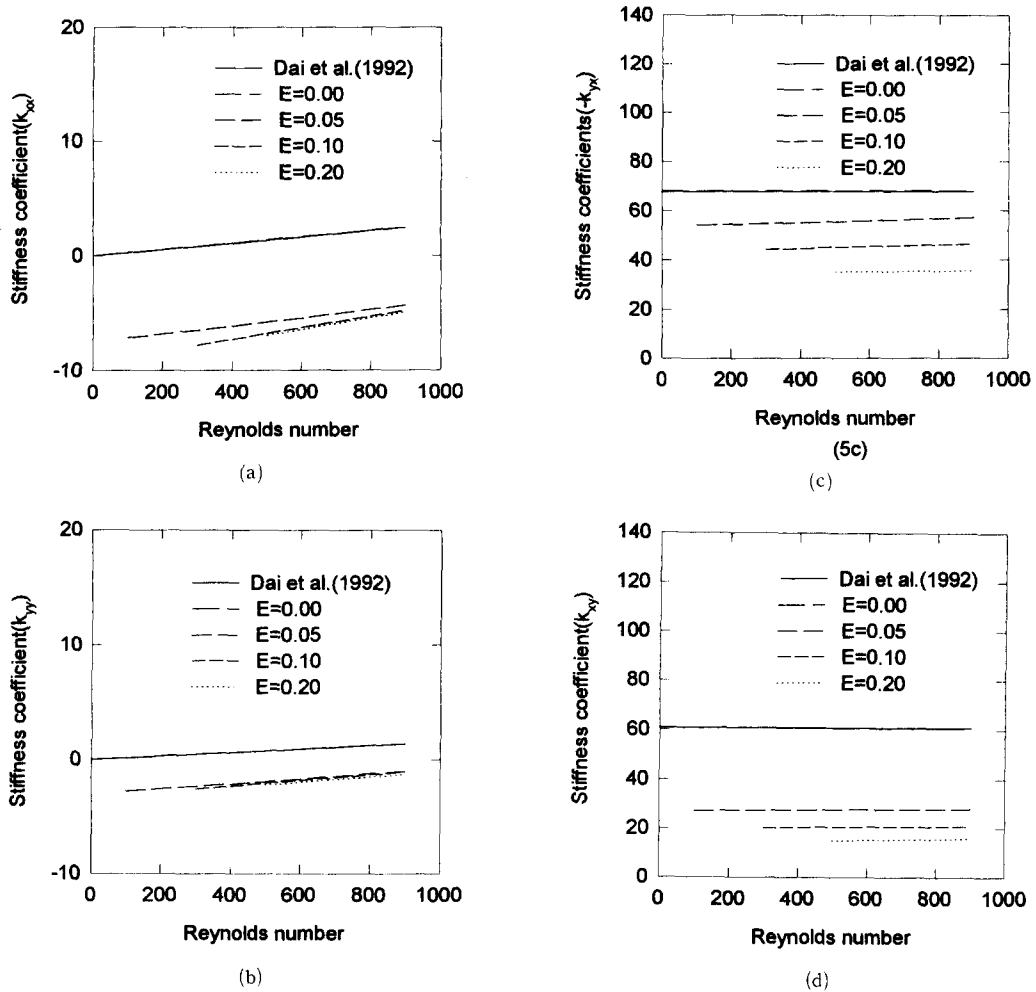


Fig. 5 Variation of stiffness with Reynolds number at constant Eckert number

Table 4 Combined effects of inertia and viscous dissipation on load carrying capacity f
($c/r_1=0.002$, $\varepsilon=0.5$, fixed inlet temperature)

Boundary condition	Re	Eckert Number			
		0.0	0.005	0.0007	0.001
Sommerfeld	1	30.5435	--	--	--
	200	30.5449	28.6581	28.2305	--
	300	30.5453	29.0554	28.7022	27.9896
	400	30.5467	29.3211	29.2150	28.4256
Gumbel	1	16.3153	--	--	--
	200	16.2952	15.5551	15.4039	--
	300	16.2859	15.6547	15.5168	15.2398
	400	16.2676	15.7377	15.73987	15.4107

도 같은 경향을 보이고 있다. 이로써 유체 관성의 영향이 Eckert 수의 증가와 함께 베어링의 무차원 하중에 크게 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다. 결국, 열소산에 대해서 무차원 하중은 Reynolds 수에 거의 의존하지 않는다는 것이다. Fig. 4는 Eckert 수의 변화에 따른 최고 온도의 변화를 나타내었다. Eckert 수가 0에서 0.005로 변할 때 최고온도는 100% 정도 변화하지만 Eckert 수가 0.01에서 0.02로 변할 때는 17%의 차이로 Eckert 수가 증가함에 따라 최고온도가 비례하여 증가하지 않고 점차적으로 증가비가 감소하는 것을 알 수 있다. Fig. 5는 Sommerfeld 조건과 Gumbel 조건하에서 Reynolds 수를 변화시켰을 때 강성계수를 나타내었다. Sommerfeld 경계조건에서는 강성계수의 혼합 성분(mixed component)은 Reynolds 수에 거의 영향을 받지 않지만 대각성분(diagonal component)이 Reynolds 수의 증가와 함께 증가하고 있다. 이는 등온상태에서의 변화와 Eckert 수가 커질 때도 비슷한 경향을 나타내고 있는 것을 알 수 있다. Gumbel 조건에서는 k_{xx} 는 Reynolds 수의 증가에도 불구하고 변하지 않고 있는 반면 k_{yx} 는 약간 감소하고 있다. 결국 베어링의 성능에 미치는 효과 중 유체 관성의 효과는 긴 베어링에서 Sommerfeld 조건과 Gumbel 조건하에서 주기적 경계조건과 뉴턴의 냉각법칙만을 적용한 경계조건하에서는 크게 영향을 미치지 않는다는 결론이다. 최근 Han과 Paranjpe⁽¹²⁾는 근사적 지배방정식을 이용하여 베어링 경계조건에 대해서 발표하였는데, 그들은 경계조건이 베어링 성능에 영향을 미치는 중요한 인자라고 발표했다. 그래서 이제 주기성의 경계조건이 아닌 베어링의 입구에 윤활유를 일정하게 공급하는 경우를 생각해 보기로 한다. 온도가 일정한 입구조건하에 Reynolds 수와 Eckert 수의 함수로서 무차원 하중을 Table 4에서 나타내었다. 입구온도를 일정하게 한 경계조건하에서 Reynolds 수를 1에서 400으로 변하게 했을 때, $E=0$ 인 등온상태에서 무차원 하중은 거의 변화가 없는 이는 주기성 경계조건하에서의 무차원 하중 값과 비슷하였다. 그리고 Eckert 수가 증가하는 경우도 첫번째 경계조건인 경우와 마찬가지로 Reynolds 수의 증가에 따른 무차원 하중의 변화는 미미한 것을 알 수 있었다. 이와 같은 새로운 경계조건하에서도 Reynolds 수에 대한 베어링 성능에는 크게 영향을 미치지 않는 것은 첫번째 경우와

같았다.

4. 결 론

이 논문에서는 윤활막에 대하여 물리학적인 근거에 바탕을 둔 경계조건하에서 엄밀한 방정식(exact equation)을 수치적으로 해석하였다. 베어링 부하를 정확히 구하기 위하여, 관성의 효과를 방정식에 강제적으로 또는 인위적으로 조작하지 않고 계산을 수행하였다. 본 연구는 천이영역이하에서 유체 관성과 점성의 온도영향을 고려하였다. 본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다. (i) 유체 관성은 주기성 경계조건과 일정한 온도 경계조건하에서 무차원 하중에 거의 영향을 미치지 않는다. (ii) 유체 관성은 베어링 강성계수에 단지 조그만한 영향을 미친다. 이 논문에서는 긴 베어링에서 Sommerfeld 조건과 Gumbel 조건하에서 주기적 경계조건 및 비주기적 경계조건과 뉴턴의 냉각법칙만을 적용하였지만 앞으로 Han과 Paranjpe⁽¹²⁾가 언급한 베어링 경계조건에 대해서 계속해서 연구가 되어져야 한다고 생각한다.

후 기

본 연구를 위해 아낌없는 충고와 조언을 해주신 Dr. A. Z. Szeri에게 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Szeri, A. Z., 1980, *Tribology : Friction Lubrication and Wear*, Hemisphere Publishing Co., New York.
- (2) Szeri, A. Z., 1987, "Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds," *ASME J. Tribology*, Vol. 109, pp. 21~37.
- (3) Constantinescu, V. N. and Galetuse, S., 1982, "Operating Characteristics of Journal Bearing in Turbulent Inertial Flow," *ASME J. Lub. Tech.*, Vol. 92, pp. 473~481.
- (4) Osterle, F. and Saibel E., 1955, "On the Effect of Lubricant Inertia in Hydrodynamic Lubrication," *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 6, pp. 334~341.
- (5) Sestieri, A. and Piva, R., 1982, "The Influence

- of Fluid Inertia in Unsteady Lubrication Films," *ASME J. Lub. Tech.*, Vol. 104, pp. 180~186.
- (6) Dai, R. X., Dong, Q. and Szeri, A. Z., 1992, "Approximations in Hydrodynamic Lubrication," *ASME J. of Tribology*, 91-Trib-13, pp. 1~12.
- (7) Szeri, A. Z. and Al-Sharif, A., 1995, "Flow between Finite Steady Rotating Eccentric Cylinders," *Theo. Comp. Fluid. Dynamics*, Vol. 7, pp. 1~28.
- (8) Zienkiewicz, O. C. and Wu, J., 1991, "Incompressibility without Tears-How to Avoid Restrictions of Mixed Formulation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 32, pp. 1189~1203.
- (9) Cameron, A., 1966, *The Principles of Lubrication*, Wiley, New York.
- (10) Huebner, K. H. and Thornton, E. A., 1982, *The Finite Element Method for Engineers*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York.
- (11) DiPrima, R. C. and Stuart, J. T., 1972, "Non-Local Effects in the Stability of Flow Between Eccentric Rotating Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 54, pp. 393~415.
- (12) Han, T. and Paranjpe, R. S., 1990, "A Finite Volume Analysis of the Thermohydrodynamic Performance of Finite Journal Bearings," *ASME J. Tribology*, Vol. 112, pp. 557~566.