

〈논 문〉

## 비정상 Navier-Stokes 방정식의 수치해석을 위한 다단계 외재법의 성능 비교

서 용 권\*

(1996년 1월 19일 접수)

### Comparison of Multi-Stage Explicit Methods for Numerical Computation of the Unsteady Navier-Stokes Equations

Yong Kweon Suh

**Key Words :** Multi-Stage Explicit Method(다단계 외재법), Unsteady Navier-Stokes Equations(비정상 나비에-스톡스 방정식), Oscillating Lid(요동하는 리드), Cavity Flow(캐버티 유동)

#### Abstract

In this study, performance of the multi-stage explicit methods for numerical computation of the unsteady Navier-Stokes equations is investigated. Three methods under consideration are 1st-, 2nd-, and 4th-order Runge-Kutta(R-K) methods. Compared in this estimation is stability, accuracy, and CPU time of each method. The computational codes developed are applied to the two-dimensional flow in a square cavity driven by an oscillating lid. It turned out that at Reynolds number 400, the 1st-order R-K method is the best, while at 3200 the 2nd-order R-K is recommended. At higher Reynolds numbers, it is conjectured that the 4th-order R-K method will be the best algorithm among three due to its highest stability.

#### 1. 서 론

시간에 대한 적분 방법에서 볼 때, Navier-Stokes 방정식의 수치해법은 크게 외재적 방법(explicit method)과 내재적 방법(implicit method)으로 나눌 수 있다. 내재적 방법은 안정성 면에서 우수하지만 일반적으로 계산시간이 많이 소요되고 문제의 적응성이 떨어지는 단점이 있고, 외재적 방법은 안정성 면에서는 떨어지지만 프로그램화가 쉽고 문제의 적응성이 좋다. 특히, 유동 문제를 구성하는 기하학적 형상이 복잡하여 다중

영역법으로 공간을 분할하는 등과 같은 경우에는, 내재적 방법은 프로그램화가 매우 어렵다.

외재적 방법중에서 가장 간단한 방법은 소위 FTCS(forward time centered space)에 의한 방법이다. 이 방법은 레이놀즈수가 매우 작거나 매우 큰 유동에 대해서는 안정성 문제로 적용하기가 불가능하나 적절한 레이놀즈수의 범위에서는 그 단순함으로 인해 여전히 폭넓게 사용된다.

외재적 방법에서의 일반적 단점인 낮은 안정성을 개선하기 위해 여러 가지 노력이 꾸준히 이어져 왔으며, 그 알고리즘도 많이 알려져 있다. 각각의 방법을 특징짓는 가장 중요한 관점은 하나의 시간 스텝 동안의 시간적분을 위해 몇 단계에 걸쳐 예측(prediction)하고 수정(correction)하느냐 하는 단

\*회원, 동아대학교 공과대학 기계공학과

계의 수이다. FTCS 또는 오일러 방법은 한 단계에 의한 것이고, predictor-corrector 방법 혹은 수정 오일러법은 2단계, 4계의 룬게쿠타법(Runge-Kutta method; 앞으로는 R-K로 표시함)은 4단계에 의한 것이다.

지금까지 이러한 외재적 다단계 해법을 유동 문제에 많이 적용해 왔으나, 각 해법의 성능을 상호 비교한 연구결과는 많지 않다. 수치해법의 성능은 안정성, 정밀도, 및 계산시간의 측면에서 평가할 수 있다. 본 연구는 다단계 해법들을 총괄적으로 갖고 있는 R-K의 1계(오일러법에 해당), 2계(수정 오일러법에 해당), 및 4계의 방법들의 성능을 상호 비교하기 위한 목적을 갖고 있다. 모델 유동은 Soh & Goodrich<sup>(1)</sup> 및 Iwatsu 등<sup>(2)</sup>이 연구한 바 있는 2차원 비압축성 비정상 lid-driven-cavity 유동이다. 본 모델유동은 2차원적이지만, 본 연구에서 고려하는 수치해법들은 3차원 문제(예; Iwatsu 등<sup>(3)</sup>)에도 물론 쉽게 연장하여 적용할 수 있다.

## 2. 수식화와 수치해석 방법

한변의 길이가  $L$ 인 정사각형 내에 밀도  $\rho$ , 점성계수  $\nu$ 인 유체가 갇혀져 있고 윗면이  $U_0 \sin \omega t^*$  (여기서,  $t^*$ 는 시간,  $\omega$ 는 각속도를 나타냄)의 속도로 좌우로 왕복운동할 때 공간 내에 형성되는 2차원 비압축성 비정상 유체유동을 지배하는 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식을 무차원으로 나타내면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1b}$$

여기서, 변수들은 모두 무차원이며,  $\mathbf{u}$ 는 유속 벡터,  $p$ 는 압력,  $t$ 는 시간이며,  $\nabla$ 는 공간  $(x, y)$ 에 대한 gradient 연산자이다. 무차원화에 사용된 대표길이는  $L$ , 대표속도는  $U_0$ , 대표시간은  $L/U_0$ , 대표압력은  $\rho U_0^2$ 이다. 그리고,  $Re$ 는 레이놀즈수로서  $Re = LU_0/\nu$ 와 같이 정의되었다. 경계조건은 다음과 같다.

$$u = v = 0 \text{ at } x = 0, 1 \text{ and } y = 0$$

$$u = \sin \omega' t, \quad v = 0 \text{ at } y = 1$$

Fig. 1은 본 유동문제와 좌표계를 스케치한 것이다. 주기  $T$ 는  $T = 2\pi/\omega'$ 이다. 초기조건으로는 전

영역에서  $t = t_0$  때  $u = v = 0$ 으로 하였다. 이후 별도의 언급이 없는 한  $t_0 = 0$ 이다. 그러나 초기조건에 변화에 따른 유동장의 변화를 조사할 때는 이 값을 변화시킬 것이다. (3.3절 참조)

방정식 (1a) 및 (1b)는 공간에 대해서는 중심차분을 써서 차분화하고, 시간에 대해서는 외재적으로(explicitly) 적분하려고 한다. 그 계산 알고리즘을 설명하기 위해서, 식 (1b)를 아래와 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}, t) - \nabla p \tag{2}$$

여기서,  $f(\mathbf{u}, t)$ 는 방정식 (1b)의 대류항과 확산항을 포함한다. 독립변수로  $t$ 를 포함시킨 것은 경계조건이 시간의 함수로 주어지기 때문이다.

압력은 연속방정식 (1a)을 만족하도록 선택되어야 하고, 이것은 식 (2)에 divergence를 적용했을 때 얻어지는 방정식

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot f(\mathbf{u}, t) \tag{3}$$

을 풀어야 함을 뜻한다.  $p$ 의 경계조건으로서는 식 (1b)를 각 경계에서 산정(evaluation)한 결과로부터 아래와 같은 Neuman 형의 조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 q_n}{\partial n^2} \text{ at } x = 0, 1 \text{ and } y = 0, 1 \tag{4}$$

여기서,  $n$ 은 경계에 대해 수직인 방향의 좌표,  $q_n$ 은 그 방향의 유속성분을 나타낸다. 보통, 높은  $Re$  값에서는 식 (4)의 우변 항의 효과를 무시하여  $\partial p / \partial n = 0$ 와 같이 간단히 할 수도 있으나,  $Re$  값

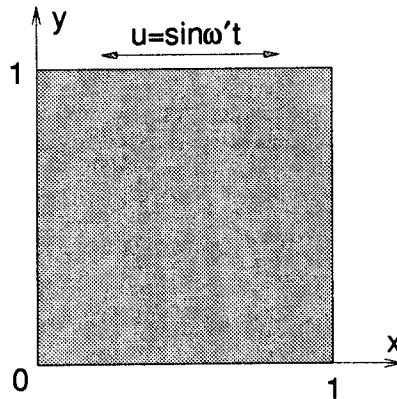


Fig. 1 Geometry of the problem and coordinates.

이 그렇게 높지 않은 경우에는 이 효과를 고려하여 야 해의 정밀도가 유지된다. 한편, 이 항을 연속방정식을 사용하여 경계면에 평행한 속도성분의 도함수로 바꾸어 적용할 수도 있으나 본 연구에서는 시험결과 그 차이가 없음을 알았다. Poisson 방정식 (3)을 본 연구에서는 point SOR 방법을 사용하여 풀었다.

R-K법은 시간  $t$ 에 대해 식 (2)를 외재적이며 단계적으로 적분하는 방법이다. 4계 R-K법은 하나의 시간 스텝 동안 4단계에 걸쳐 계산하며, 2차 R-K법은 2단계에 걸쳐 계산한다. 결과적으로, 1 단계만으로 계산하는 방법은 오일러 방법에 해당하며, 2단계법은 수정 오일러 방법(modified Euler method)에 해당한다. 이하, 세 가지 방법에 대해 각각 그 계산 알고리즘을 설명한다. 여기서,  $n$ 째 시간 스텝에서의 종속변수들은 이미 알려져 있고,  $n+1$ 째 시간 스텝에서의 종속변수들은 미지의 것으로 한다. 그리고, 식 (2)의 우변은 공간상의 각 격자점에서 정의된 변수들을 사용하여 적절한 차분법(여기서는 중심차분법)의 방법으로 구할 수 있다. 아래의 알고리즘 설명과정에서 식 (2)의 우변은 이렇게 구한 함수로 정의한다. 본 논문에서 취급된 유동문제는 균일한 엇갈림 격자계(uniform staggered-grid system)를 사용하여 풀었으며,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ 는 보존형(conservative form)으로 구하였다. 엇갈림 격자계를 사용함에 따라 경계에서는 경계면에 수직인 속도성분이 정의되며 경계면에 평행한 속도성분  $q_s$ 는 정의되지 않는다. 이 속도성분에 대한 경계조건을 고려하기 위해서, 본 연구에서는 선형보간법인  $q_{s(w-1)} = 2q_{s(w)} - q_{s(w+1)}$ 을 사용하였다. 여기서, 하첨자 ( $w$ )는 벽면을 ( $w+1$ ) 및 ( $w-1$ )는 벽면에 수직인 방향으로 인접한 내외의 격자점을 나타낸다.

### 2.1 1계 R-K법(오일러 방법)

가장 간단한 방법으로서, 그 알고리즘은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^n, t^n) - \nabla p^n] \quad (5)$$

여기서,  $p^n$ 은 식 (3)을 만족하도록, 즉  $\nabla^2 p^n = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}^n, t^n)$ 을 만족하도록 해야 한다. 이 방법은 시간적으로 1차의 정밀도 즉  $O(\Delta t)$ 의 오차를 지닌다.

### 2.2 2계 R-K법(수정 오일러 방법)

$O(\nabla^2 t^2)$ 의 오차를 가지는 이 방법은 2단계에 걸쳐 미지의 변수를 계산하며, 그 알고리즘은 아래와 같다.

$$\mathbf{k}_1 = \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^n, t^n) - \nabla p^n] \quad (6a)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \mathbf{k}_1 \quad (6b)$$

$$\mathbf{k}_2 = \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^n, t^{n+1}) - \nabla p^*] \quad (6c)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2 \quad (6d)$$

여기서,  $\mathbf{k}_1$ 은  $\mathbf{u}^{n+1}$ 의 첫 개략치(즉  $\mathbf{u}^*$ )를 구하기 위해  $n$  스텝에서의 변수들을 사용하여 오일러 법으로 계산한  $\mathbf{u}$ 의 수정량을,  $\mathbf{k}_2$ 는  $\mathbf{u}^{n+1}$ 의 두번째 개략치를 구하기 위해  $n+1$  스텝에서의 첫 개략치를 사용하여 구한  $\mathbf{u}$ 의 수정량을 각각 나타내며, 최종 수정량은 이들의 평균으로 한다는 아이디어이다. 각 단계에서 압력은 식 (3)을 만족시켜야 한다. 그러면,  $\nabla \cdot \mathbf{k}_1 = \nabla \cdot \mathbf{k}_2 = 0$ 이 만족되며, 이에 따라 식 (6d)로 구한 속도장  $\mathbf{u}^{n+1}$ 은 자동적으로 연속방정식 (1a)를 만족한다.

### 2.3 4계 R-K법

보통 R-K법이라 하면 이 방법을 말하며, 한 시간스텝 동안 4단계에 걸쳐 계산을 수행한다:

$$\mathbf{k}_1 = \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^n, t^n) - \nabla p^n] \quad (7a)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \mathbf{k}_1/2 \quad (7b)$$

$$\mathbf{k}_2 = \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^*, t^{n+1/2}) - \nabla p^*] \quad (7c)$$

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^n + \mathbf{k}_2/2 \quad (7d)$$

$$\mathbf{k}_3 = \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^{**}, t^{n+1/2}) - \nabla p^{**}] \quad (7e)$$

$$\mathbf{u}^{***} = \mathbf{u}^n + \mathbf{k}_3 \quad (7f)$$

$$\mathbf{k}_4 = \Delta t[\mathbf{f}(\mathbf{u}^{***}, t^{n+1}) - \nabla p^{***}] \quad (7g)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)/6 \quad (7h)$$

상첨자 \* 및 \*\*가 있는 변수는  $n+1/2$  스텝에서의 값에 해당하고, \*\*\*의 변수는  $n+1$  스텝에서의 값에 해당한다. 그리고, 여기서도 모든 압력은 해당 속도장이 식 (3)을 만족하도록 해야 한다. 4계의 R-K법은  $O(\Delta t^4)$ 의 오차를 보이는 것으로 알려져 있다.

### 3. 수치해석 결과 및 검토

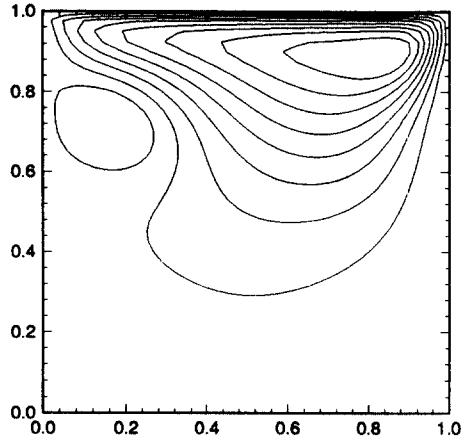
#### 3.1 선행 연구결과와의 비교

Soh & Goodrich<sup>(1)</sup>는  $Re=400$ 에 대해  $IM=JM=41$ 의 균일 격자계를 사용하여 계산한 결과를 제시한 바 있다. Fig. 2는 그들과 같은 조건으로 하여 본 연구에서 계산한 결과를 비교한 것이다(그들의 연구에서  $t=0$ 는 본 연구에서는  $t=\pi/2$ 에 해당한다). 유동함수  $\psi$ 는 와도  $\zeta=\partial u/\partial y-\partial v/\partial x$ 를 먼저 계산한 뒤  $\nabla^2\psi=\zeta$ 를 S.O.R.의 방법으로 풀어서 구하였다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 두 결과는 거의 동일하다.

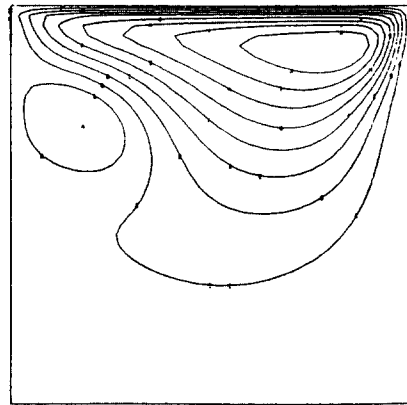
한편,  $Re=400$ ,  $IM=JM=61$ 에서 계산한 Iwatsu 등<sup>(2)</sup>의 유선과 비교하면, 그들의 결과는 유선의 모양에서는 본 연구 및 Soh & Goodrich<sup>(1)</sup>의 결과와 비슷하나, 유동함수의 값에서는 100% 정도의 차이가 있다. Table 1은 유동장이 거의 완전히 주기적이 된 10주기 후의  $t=0$  때에 있어서 두 와류의 중심에서의 유동함수값인  $\psi_{max}$  및  $\psi_{min}$ 과 해당 와류의 중심 좌표들을 두 결과에 대해 비교하여 보인 것이다. 본 연구의 결과를 보면 격자계가 미세함에 따라 이 값들은 큰 변동을 보이지 않는다. 또한  $x=1/2$  및  $y=1/2$ 의 중심선 상의 속도분포에 있어서는 두 결과가 잘 맞는다. 이로부터 Iwatsu 등<sup>(2)</sup>이 제시한 유동함수의 값은 실제의 약 두배 정도인 것으로 추측할 수 있다.

#### 3.2 3개 방법간의 비교-안정성, 정밀도 및 계산 속도의 검토

우선,  $Re=400$ 에 있어서 세 가지 수치해법들의



(a) Present result



(b) Result obtained by Soh and Goodrich<sup>(1)</sup>

**Fig. 2** Streamline patterns at  $t=\pi/2$  for  $Re=400$ ,  $\omega'=1$  and  $IM=JM=41$ . Values of the stream functions are 0.0005 (left cell),  $-0.0040$ ,  $-0.0085$ , ...,  $-0.0355$ .

**Table 1** Comparison of the numerical results at the periodic state for  $Re=400$  and  $\omega'=1$

Source	IM (=JM)	$\Psi_{max}$ (and its coordinates) $\Psi_{min}$ (and its coordinates)	
		at $t=0$	
		at $t=\pi/2$	
Iwatsu et al <sup>(2)</sup>	61	0.07957	0.008485
		$-0.002145$ (0.8915, 0.7442)	$-0.07953$ (0.8140, 0.8915)
Present	41	0.04082 (0.2265, 0.7757)	0.004130 (0.1856, 0.6961)
		$-0.001183$ (0.9049, 0.7751)	$-0.04058$ (0.8313, 0.9087)
	61	0.04129 (0.2396, 0.7644)	0.004452 (0.1679, 0.6942)
		$-0.001231$ (0.8755, 0.7572)	$-0.04198$ (0.8165, 0.8770)
	121	0.04186 (0.2375, 0.7676)	0.004618 (0.1696, 0.7116)
		$-0.001341$ (0.8952, 0.7377)	$-0.04290$ (0.8272, 0.8944)

안정성을 조사하였다. 상미분 방정식의 해법에 관한 문헌(예 ; Lapidus & Seinfeld<sup>(4)</sup>)을 보면, R-K법은 단계의 수가 증가할수록 안정성은 좋아진다. 본 연구에서도 이와 같은 경향을 확인할 수 있었다.

오일러법(즉, 1계 R-K법)에서, 확산항만 존재하는 2차원 유동의 경우에 대한 수치적 안정조건은 확산수(diffusion number)  $\alpha = \Delta t / Re \Delta x^2$ 에 대해

$$\alpha < \frac{1}{4} \quad (8)$$

이다. 한편, 비선형 대류항이 존재하는 경우에 선형이론에 따르면, Courant수  $c = \Delta t / \Delta x$ 에 대해 아래 조건이 추가되어야 한다.

$$c < \frac{2\sqrt{\alpha}}{|q|_{\max}} \quad (9)$$

여기서  $|q|$ 는 절대유속이다. 횡축을  $\log \alpha$ , 종축을  $\log c$ 로 하는 평면상에서 식 (9)의 등식은 기울기가 1/2인 직선이며, 식 (8)의 등식은 기울기가  $\infty$ 인 직선이 각각 되며, 그 교차점에서  $\alpha = 1/4$ ,  $c = 1/|q|_{\max}$ 이다.

Fig. 3은  $IM/JM = 121$ 에서 다양한  $Re$ 에 대해 1계, 2계, 및 4계 R-K법의 계산프로그램을 수행하여 얻은 안정성 선도이다. 우선, 1계와 2계의 R-K는 모두 식 (8)의 조건을 따르고 있음을 알 수 있다. 그러나, 4계의 R-K는 이보다 더 완만한 조건인

$$\alpha < 0.35 \quad (10)$$

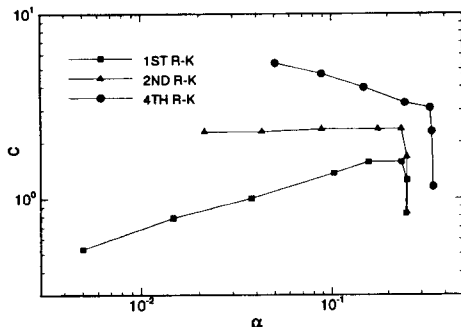


Fig. 3 Stability chart obtained from execution of the three codes by changing  $Re$  for  $\omega' = 1$  and  $IM = JM = 121$ ; for the numerical stability,  $\Delta t$  must be chosen such that the corresponding values of  $\alpha$  and  $c$  reside below each curve.

을 따르고 있다. 한편, 대류항과 관련한 조건은 식 (9)와 같은 조건을 단순히 따르지는 않는다. 우선, 1계의 R-K법은  $\Delta x$ 가 일정할 경우  $Re$ 의 값이 증가할 때  $\Delta t$ 는 감소해야 한다는 조건 식 (9)를 정성적으로 따른다. 그러나, 2계의 R-K법은 양의 상수  $c_0$ 에 대해

$$c < c_0 \quad (11)$$

의 조건을 따르고 있다. 이 조건은 식 (9)보다는 크게 완화된 것으로서, 2계 R-K가 1계 R-K보다 안정성 면에서 더 유리함을 의미한다. 다시 말해,  $\Delta x$ 가 일정할 때  $\Delta t$ 는  $Re$ 와 무관하게 일정하게 할 수 있다. 상수  $c_0$ 는  $\Delta x$ 가 감소함에 따라 약간씩 감소하며 결국 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 조건에 해당하는 1에 접근할 것으로 예상된다. 4계의 R-K는 양의 상수  $c_1$ ,  $\gamma$ 에 대해

$$c < \frac{c_1}{\alpha^\gamma} \quad (12)$$

의 조건을 따르고 있다. 이것은 2계 R-K의 조건 식 (11)보다 더 완화된 것이다. 상수  $c_1$ ,  $\gamma$ 는  $\Delta x$ 에 따라 약간씩 감소하는 것이 확인되었으나 그 접근값은 예측할 수 없었다.

수치해법의 정밀도를 정확히 예측한다는 것은 쉬운 일이 아니다. 가장 주된 이유는, 정밀도의 확인을 위한 신뢰성 있고 정밀한 기본 해가 거의 주어지지 않다는 것이다. 충분히 만족할 만한 것은 아니지만, 유일한 실제적 방법은 극히 세밀한 격자계와 시간 간격을 사용하여 구한 수치해를 benchmark 해(예를들면 정상유동의 경우, Ghia 등<sup>(5)</sup>의 계산결과)를 기본으로 하여 비교하는 방법이다. 본 연구에서는 우선  $Re = 400$ ,  $\omega' = 1$ 에 대해  $IM = JM = 201$ 의 격자계와  $N = 3200$  ( $\Delta t = 2\pi/N$ )을 사용하여 1계의 R-K법으로 구한 10주기 후의  $t = 0, \pi/4, 2\pi/4, \dots, 2\pi$ 의 속도장을 benchmark 해로 하고,  $IM = JM = 61$ 로 하여 1계, 2계, 및 4계 R-K를 사용하여 여러 가지  $N$ 값에 대해 구한 속도장과의 차이를 갖고 각 해법의 정밀도를 조사하여 보았다. 한편, 해의 정밀도는 계산속도(또는 역으로 계산시간)과 직결되고 수치해법의 성능평가를 위해서는 두 요소가 동시에 고려되어야 한다. Fig. 4는 3가지 R-K법에 대해 한 주기 당의 계산시간을 횡축으로 하고 해의 오차를 종축으로 하여 그린 것이다. 사용된  $N$ 은 세 가지 모두 240, 320, 440, 600

및 800(좌측 기호부터)이다. 여기서 오차(error)는 유동장내 81개 격자점에서의 절대속도의 차이를 평균한 뒤 절대속도 자체의 평균값으로 나눈 백분율이다. 그림을 보면, 이 경우에서 가장 좋은 성능을 가진 해법은 1계의 R-K법임을 알 수 있다.

위의 경우는 상대적으로  $Re$ 가 비교적 낮은 것이라 볼 수 있다. 높은  $Re$ 에서는 1계 R-K법의 안정성이 큰 문제가 되므로  $\Delta t$ 를 작게 취해야 하고, 이에 따라 계산시간은 자연스럽게 길어지게 된다.  $Re=3200$ ,  $\omega'=1$ 에 대해 2계의 R-K법을 써서  $IM=JM=321$ 의 격자계와  $N=1600$ 을 사용하여 구한 1주기 후(즉  $t=2\pi$  때)의 해를 bench mark로 하여 몇가지 경우에 대한 해의 정밀도 및 계산속도를 조사해 보았다. Fig. 5는 그 결과를 보인 것이다. 우선 주목할 것은, 일정한  $\Delta x$ (즉,  $IM$ 과  $JM$ 을 161로 고정시킨 경우; 그림에서 속이 빈 기호)에서  $N$ 의 증가(이것은 대체적으로 한 주기 당 계산시간(min/period)의 증가를 의미함)는 1계의 경우에는 오차가 서서히 증가하는 결과를, 2계 및 4계의 경우는 증가후 다시 서서히 감소하는 결과를 보이고 있다. 이처럼  $\Delta t$ 의 감소에도 불구하고 해의 정밀도가 오히려 떨어지는 것은 이 레이놀즈수에서의 유동이 대류 지배적임을 의미한다. 이것은 1차원 대류방정식  $\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0$ 이 Courant 수  $c = \Delta t/\Delta x$ 에서 가장 정확한 해를 보인다는 사실(예를 들면, Hoffmann<sup>(6)</sup>)과 관련된다고 볼 수 있다. 세가지 경우에 있어서 좌측 끝의 데이터 점들은 수치해석의 안정한계에 해당한다. 따라서 주어진  $\Delta x$ 에서는 가능한 한 안정조건을 겨우 만족하도록  $\Delta t$ 를

정하는 것이 가장 효과적임을 알 수 있다. 다음, 동일한  $\Delta x$ 에서는 같은 계산속도에서 볼 때 세가지 방법 중 역시 1계의 방법이 가장 좋은 결과를 준다는 것을 알 수 있다. 그러나,  $\Delta x$ 를 바꾸어 가면서 안정한계에 해당하는  $\Delta t$ 의 조건에서 구한 1계와 2계의 해를 비교해 보면(그림에서 검은 기호), 2계의 방법이 우수함을 알 수 있다. 그림에서, 1계는 141부터 181까지 10 간격으로 격자수를 증가시킨 결과이며, 2계는 131부터 171까지 10간격으로 증가시킨 결과이다. 그림에서 또한 알 수 있는 사실은, 수치해석의 성능에 큰 영향을 미치는 것은  $\Delta t$ 의 변화가 아니라  $\Delta x$ 의 변화라는 점이다. 따라서 전체적으로 본다면, 2계의 방법이 가장 우수함을 알 수 있다.

위에서,  $Re=400$ 에서는 1계의 R-K법이,  $Re=3200$ 에서는 2계의 R-K법이 3 방법 중에서 각각 가장 좋은 방법인 것으로 나타났다. 그러나, 안정성은 4계의 R-K가 가장 뛰어나다. 이제, 문제는 더 높은  $Re$ 에서는 어느 방법이 가장 바람직한 것인지 예측하는 데 있다.  $Re$ 가 증가하면  $\Delta x$ 도 작게 해야 한다. 고 레이놀즈수 유동에서 전단층의 두께가  $O(1/\sqrt{Re})$ 에 비례함을 감안하면,  $\Delta x = O(1/\sqrt{Re})$ 로 취해야 하며 이에 따라  $\alpha = O(\Delta t)$ 이 됨을 알 수 있다. 그러면, 4계 R-K의 안정조건인 식 (12)는  $\Delta t < O(\Delta x^{1/(1+\gamma)})$ 으로 되어 2계 R-K의 조건  $\Delta t < O(\Delta x)$ 보다 더 완화된 것이다.  $Re=3200$ 의 경우에 해의 정밀도가  $\Delta t$ 에 크게 의존하지 않음을

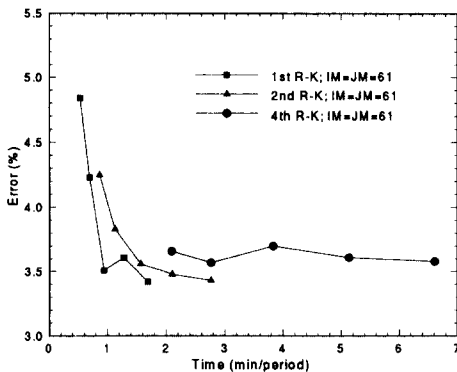


Fig. 4 Numerical error versus CPU time for three codes obtained by changing  $\Delta t$  at  $Re=400$ ,  $\omega'=1$  and  $IM=JM=61$  (see the text for the details of the error).

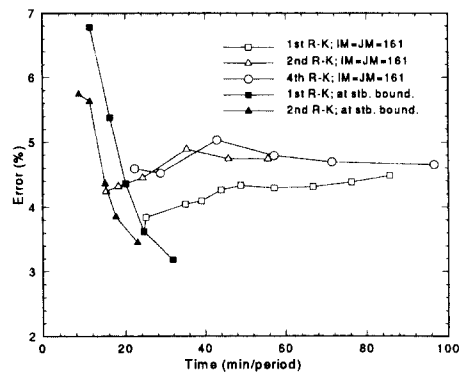


Fig. 5 Numerical error versus CPU time for three codes obtained by changing  $\Delta t$  (hollow symbols;  $IM=JM=161$ ) and  $\Delta x$  (solid symbols) for  $Re=3200$ ,  $\omega'=1$ . Here  $\Delta t$  for the case of solid symbols is close to the stability boundary in each case.

상기해 볼 때, 이와 같은 경향이 더 높은 레이놀즈 수에서도 성립한다면, 4계 R-K법이 가장 좋은 방법일 것임을 예측할 수 있다. 더욱 높은 레이놀즈 수에서의 3 방법간의 성능비교는 현재의 컴퓨터 여건으로서는 어렵다고 판단된다.

### 3.3 $Re=1600$ , $\omega'=0.3$ 의 비대칭 유동장

$Re \leq 1000$ 에서는 모든  $\omega'$ 에서 유동장은 대칭을 이룬다. 여기서, 대칭유동이라 함은

$$\psi(x, y, t) = -\psi(1-x, y, \pi+t) \quad (13)$$

인 것을 말한다. 즉, 정상각형의 윗면이 우측으로 움직일 때의 유동 형태와 그것이 좌측으로 움직일 때의 유동 형태가  $x=1/2$ 를 중심으로 좌우 대칭인 모양을 보이는 경우를 말한다. 이 유동의 형태는, 주어진 유동의 경계가 좌우 대칭이고 경계조건도 '반 주기'마다 좌우 대칭인 모양으로 반복되므로 당연히 기대되는 것이다.

그러나,  $Re > 1000$ ,  $\omega' < 1$ 의 경우에 대한 수치해석 결과를 통해, 위의 조건식 (13)이 만족되지 않는 비대칭 유동이 존재함을 발견하였다. Iwatsu 등<sup>(2)</sup>의 연구결과는  $Re \leq 1000$ 의 경우에 해당하므로 이러한 비대칭 유동이 존재할 수 없다. Fig. 6은  $Re=1600$ ,  $\omega'=0.3$ 에서 구한 비대칭 유동장을 나타낸 것이다. 이것은 1계의 R-K 방법으로 계산한 결과이다. 대략 8주기 후에 주기적인 유동장이 형성되었고, 그림은 25주기 후의 결과이다.

$t=0$  때에, 좌상 지역에 강한 반시계방향 와류가 형성되어 있고, 우측에는 이것보다는 느리지만 시계 방향의 와류가 더 넓은 지역에 걸쳐 형성되어 있다. 그리고 좌측 와류에서는 와도가 집중되어 있는 반면, 우측 와류에서는 넓게 분산되어 있다. 이 시점부터 윗면은 우측으로 움직인다. 이 과정에서 좌측 와류의 와도는 윗면의 '끄는 작용'에 의해 윗표면에 접근하고 이에 따라 높은 와도구배의 분포를 보이게 된다. 이는 다시 벽면으로의 와도의 빠른 확산을 일으켜 와류의 세기가 급격히 약해지는 결과를 초래한다( $t=3T/8$ 에서 좌측 와류는 완전히 사라졌다). 한편, 이 과정에서 우측 와류에는 윗면으로부터 + 와도가 계속 공급된다. 이 와도는 기존의 시계방향 와류에 의해 중심부로 이동하는데, 그 줄기(또는 유맥선)의 모양이 큰 나선형이다. 와도줄기는 원래 끝이 말리게(curling) 되어 있는데,

여기서는 이것이 초기부터 일어나지 않고 윗면 우측 이동의 후반기인  $t=3T/8$  때부터 시작된다. 따라서 와도의 줄기는 얇은 전단층과 유사한 양상을 보이며 주위에 고루 분포되어 있는 기존의 + 와도와 접촉하는 경계면이 넓어진다. 이것은 와도의 분산을 도와주며, 말림에 의해 와도가 한 곳에 집중되는 것을 막아준다.

다시 윗면이 좌측으로 움직이는  $t=5T/8$ 에서 윗면의 가까운 지역에는 반시계방향의 와류가 얇게 나타난다. 시간이 지남에 따라 좌측상부 구석 근처에는 - 와도가 계속 공급되면서 반시계방향의 와류를 키워 나간다. 이 과정에서 우측 와류는 상부에 존재하던 와도를 뺏기고 이에 따라 그 크기가 점점 작아진다. 그러나, 우측 와류의 와도는 앞서도 언급한 바와 같이 이미 넓은 지역에 고루 분포되어 있었고 하부의 와류가 계속 작용하고 있으므로 한꺼번에 와도를 많이 뺏기지는 않는다. 이것이 좌측 와류와 중요하게 다른 점이다. 한편, 좌측 와류의 세력확장의 주역인 와도 줄기는 기존의 우측 와류의 방해작용으로 자신을 뺏지 못하고 끝이 계속 말리면서 좁은 영역에서 와도를 집중시키는 수밖에 없게 되었다. 윗면의 좌측이동이 끝나는 시점인  $t=T$ 에서 좌측 와류는 전체 면적의 1/4 밖에 차지하지 못하고 그 다음 과정에서 다시 소멸할 운명을 맞는다. 결과적으로, 우측 와류는 한 주기 동안에 사라지는 일이 없이 계속 이어지며, 좌측 와류는 생성 소멸을 한 주기마다 한번씩 되풀이하게 된다.

이와 같은 비대칭 유동장은 초기조건에 따라 달라질 수 있다. 본 연구에서는 초기시간  $t_0$ 을 달리 하면서 점근적 유동장( $t$ 가 충분히 경과한 뒤의 유동장)을  $Re=1600$ ,  $\omega'=0.3$ ,  $IM=JM=121$ 에 대해 조사해 보았다.  $t_0=T/2$ 에서는 Fig. 6의 유동장(시계방향의 와류가 지배적)과 정반대되는 유동장(반시계방향의 와류가 지배적)이 당연히 예측된다.  $t_0$ 를 0 또는  $T/2$ 에 가까운 값으로 하면, 점근적 유동장은 초기조건과 무관하게 각각  $t_0=0$  및  $T/2$  때의 유동장으로 된다. 따라서 0과  $T/2$  사이의 어떠한 임계값  $t_{0c}$ 에서 점근적 유동장은 갑자기 변하는 것을 기대할 수 있다. 한편으로는  $t_0$ 를 0에서부터 증가시키고 다른 한편으로는  $T/2$ 에서부터 감소시키면서 계산을 수행한 결과  $t_{0c}$ 는  $0.16T$ 와  $0.17T$  사이임을 발견하였다. Fig. 7은 두  $t_0$ 에 대

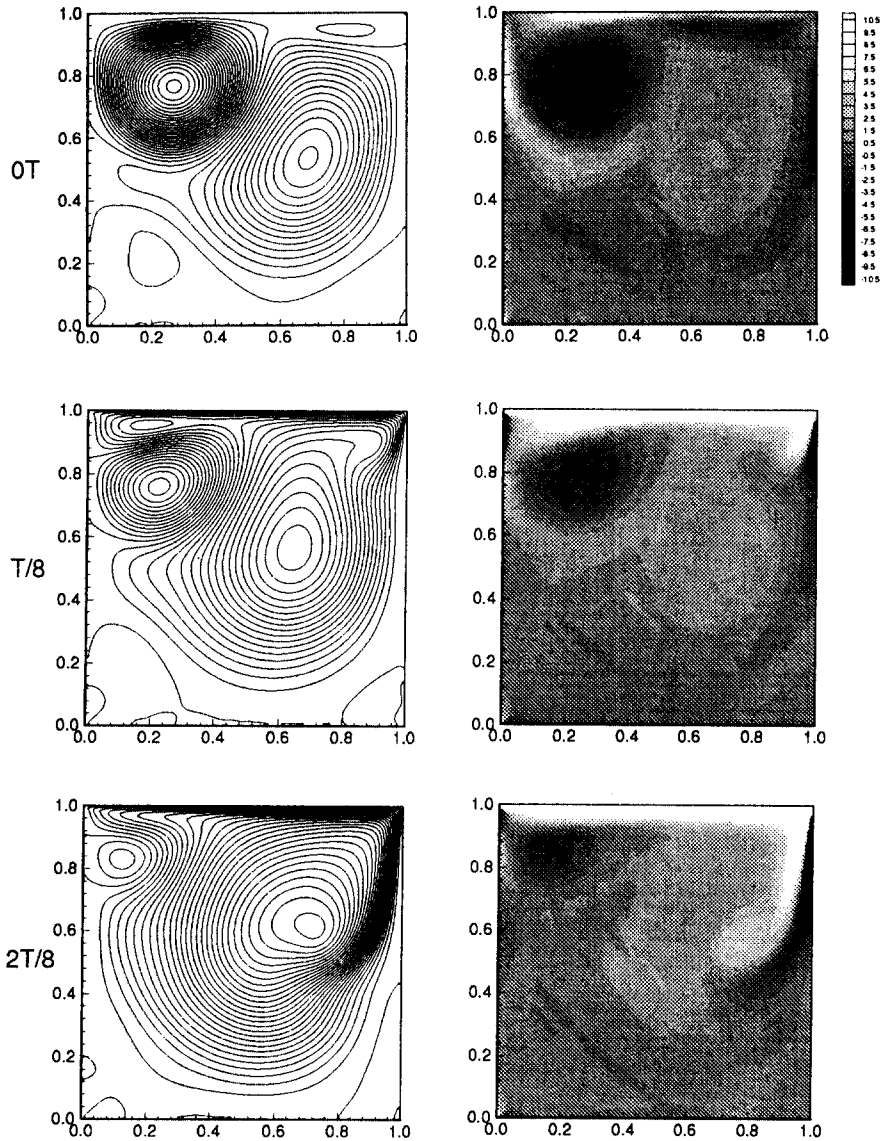


Fig. 6 Continued

한  $\bar{\phi}(t)$ 의 거동을 나타낸 것이다. 여기서,  $\bar{\phi}(t)$ 는

$$\bar{\phi}(t) = \int_A \phi dA \quad (14)$$

와 같이 유동함수를 공간적으로 평균한 시간함수로서, 그 값이 +이면 반시계방향의 와류가, -이면 시계방향의 와류가 상대적으로 더 강함을 의미한다. 그림에서 보는 바와 같이, 두 경우 모두 초기

에는(즉  $t=5T$ 까지는) 거의 대칭적인 유동양상을 예측하고 있으나, 그 이후부터는 점차 서로 멀어져 궁극적으로 정반대되는 점근적 유동양상을 예측하고 있다.

위 사실로부터  $Re=1600$ 의 경우 대칭 유동장은 불안정함을 알 수 있다. 이 불안정성의 근본 메커니즘을 설명한다면 다음과 같다. 일단, 최초로 우측과 좌측의 와류가 대칭적으로 거동한다고(예를



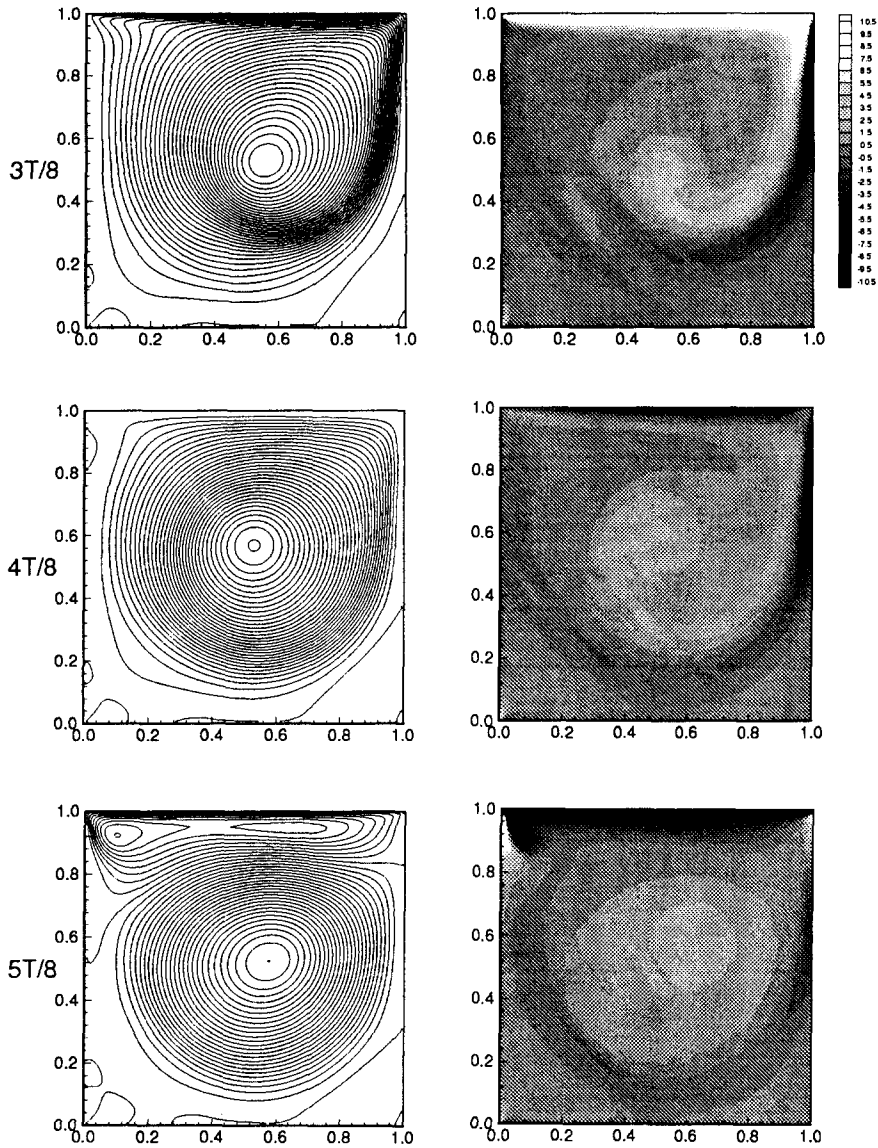
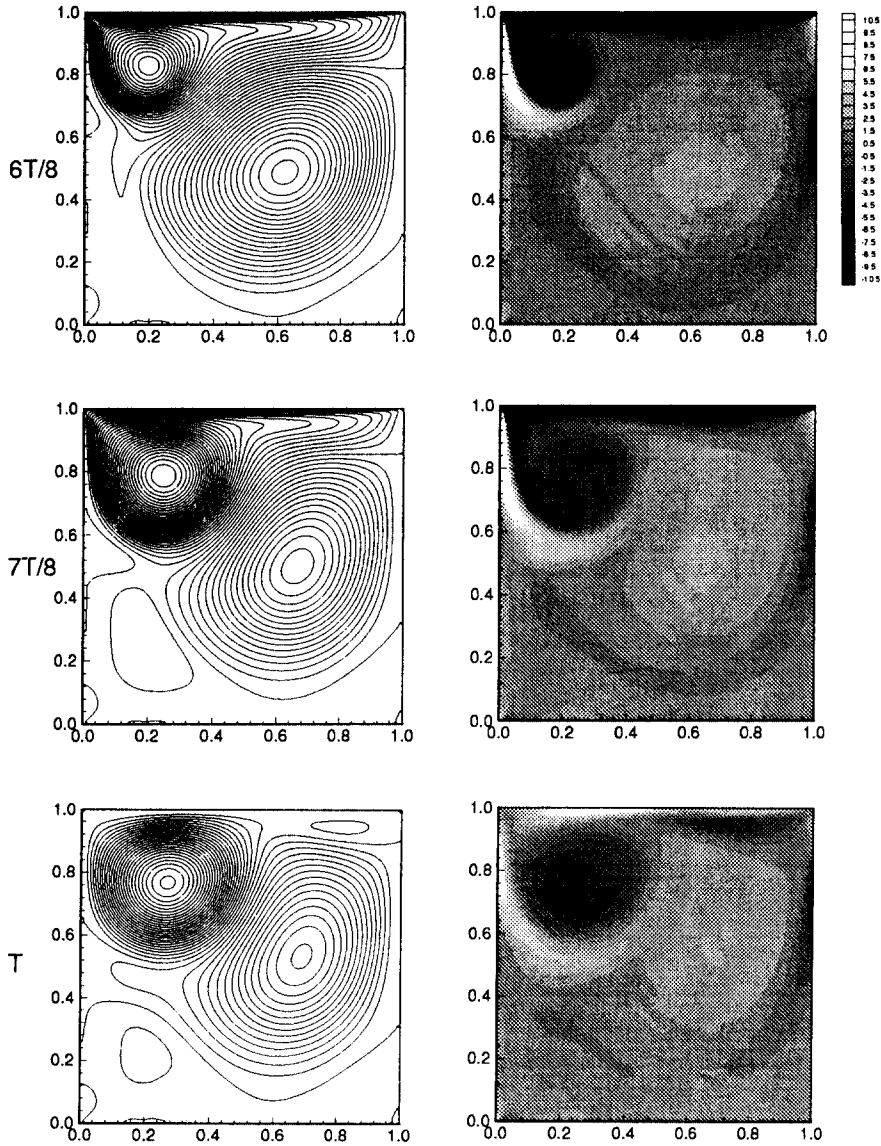


Fig. 6 Continued

들면,  $Re < 1000$ 의 접근적 유동장, 또는 Fig. 7의 조건에서 초기에 형성되는 유동장) 가정해 보자. 여기서, 우측의 와류가 약간 더 세도록 섭동을 주었다고 생각해 본다. 그러면, 전반기(앞면이 우측으로 이동) 동안 우측 와도의 줄기는 좀더 뺏은 상태로 우측 와류에 공급되며 이에 따라 분산이 더 쉽고 와도의 분포는 좀더 완만하다. 다음, 후반기 동안 좌측 와도 줄기는 우측 와류의 방해작용으로

스스로 뺏는 정도가 더 약하고 따라서 와류의 중앙에 더욱 집중하게 된다. 이는 다음 전반기 과정에서 뒷면과의 접촉으로 인해 와도의 좀더 빠른 확산을 일으키며, 결과적으로 시간평균적으로 볼 때 좌측 와류는 처음보다 세력이 더 약해진 결과를 초래한다. 즉, 최초에 설정했던 섭동량이 한 주기 뒤에 증폭한 결과를 초래하였고, 따라서 최초의 대칭 유동은 불안정한 것으로 결론지을 수 있다. 대비를



**Fig. 6** Evolution of streamline patterns (left frames) and vorticity distributions (right frames) during the period of time  $25T \sim 26T$ ;  $Re = 1600$ ,  $\omega' = 0.3$ ,  $IM = JM = 121$  and  $N = 2800$  ( $\Delta t = 2\pi / (2800\omega')$ ). The increment of the stream function is 0.002. The vorticity greater than 6.5 is left as white and that less than -10.5 as black.

위해 요약한다면, ① 우측 와류에 유입되는 와도 줄기는 큰 스케일의 나선모양을 이루므로 판 보텍스(sheet vortex)의 특징을, 좌측 와류에 유입되는 와류는 작은 스케일의 나선모양을 이루므로 점 보텍스(point vortex)의 특징을 지니고, ② 이것은 다시 우측 와류를 크게 그리고 좌측 와류를 작게 하는 근본 원인으로 작용하며, ③ 이 결과는 또다

시 위의 ①을 일으키는 요인으로 작용한다.

레이놀즈수가 충분히 작을 때는 와도의 확산이 빨라서 위와 같은 강한 대비가 좌우측에서 일어나기 어렵고, 따라서 비대칭 양상의 출현을 볼 수 없는 것으로 추측할 수 있다. 한편,  $\omega'$ 이 충분히 클 때는 주기가 짧아 반 주기 만에 와류줄기가 하강하는 거리가 짧고 따라서 와도는 좌우측 상부의 구석

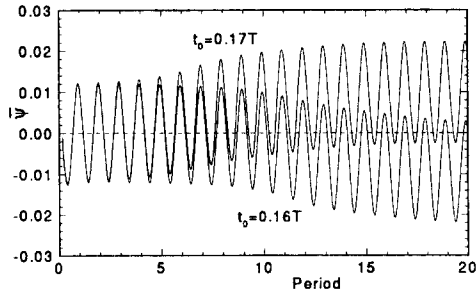


Fig. 7 Evolution of  $\bar{\psi}(t)$  for two values of  $t_0$  very close to each other;  $Re=1600$ ,  $\omega'=0.3$ ,  $IM=JM=121$ , and  $N=2800$ .

근처에서 집중되어 독립적으로 존재하며 서로 영향을 주는 일은 없을 것이다. 이에 따라 유동은 대칭 양상을 보이게 되는 것이다. 한편,  $\omega'$ 가 충분히 작을 때는, 예를 들면 전반기 동안 좌측 와류는 우측 와류를 완전히 잠식할 수 있기 때문에 상대적으로 약하게 되는 일이 없을 것이며, 따라서 이 경우에도 유동은 대칭 양상을 보일 것이다.

유동 문제를 규정하는 모든 조건이 대칭인데도 불구하고 이처럼 결과적인 유동이 비대칭적으로 나타나는 경우는 서와 문<sup>(7)</sup>의 천수 유동에 대한 실험 및 수치해석에서도 발견된 바 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 룬계쿠타 계열의 외재적 비정상 수치해석 방법을 2차원 Navier-Stokes 방정식에 적용했을 때의 안정성, 정밀도, 및 계산속도 등을 조사하였으며, 비정상 lid-driven-cavity 유동 문제에 적용한 결과, 선행 연구자들이 발견하지 못한 흥미있는 비대칭 유동을 발견할 수 있었다. 본 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 안정성 면에서는 4계, 2계, 1계 R-K의 순서로 유리하다. 특히 높은 레이놀즈수에서는 그 차이가 더욱 뚜렷하다.
- (2) 계산속도와 정밀도의 면에서 볼 때, 레이놀즈수 400에서는 1계의 R-K법이, 3200에서는 2계의 R-K법이 유리하다.

(3) 레이놀즈수 1600에서 비대칭 유동의 양상이 발견되었으며, 그 근본적인 원인은 좌우측에 형성되는 와류의 성장에 있어서의 불안정성에 있다.

#### 후 기

본 연구는 동아대학교 교내 연구비의 지원에 의해 수행되었다.

#### 참고문헌

- (1) Soh, W. Y. and Goodrich, J. W., 1988, "Unsteady Solution for Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 79, pp. 113~134.
- (2) Iwatsu, R., Hyun, J. M. and Kuwahara, K., 1992, "Numerical Simulation of Flows Driven by a Torsionally Oscillating Lid in a Square Cavity," *J. Fluids Engineering, Trans. ASME*, Vol. 114, pp. 143~151.
- (3) Iwatsu, R., Hyun, J. M. and Kuwahara, K., 1993, "Numerical Simulations of Three-Dimensional Flows in a Cubic Cavity with an Oscillating Lid," *J. Fluids Engineering, Trans. ASME*, Vol. 115, pp. 680~686.
- (4) Lapidus, L. and Seinfeld, J. H., 1971, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Academic Press.
- (5) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (6) Hoffman, K. A., 1989, *Computational Fluid Dynamics*, Engineering Education System, Austin, USA.
- (7) 서용권, 문종춘, 1994, "보텍스 웨딩에 의한 얇은 직사각형 통 내에서의 유동특성," 대한기계학회논문집, 제17권, 제8호, pp. 2122~2130.