Comm. Korean Math. Soc. **12** (1997), No. 4, pp. 1015–1021

타원형 미분작용소와 특성류이론

김 홍 종

요 약. 타원형 미분작용소의 이론을 이용하여 옹골 다양체에서 정의된 벡터장의 특이점에 관한 푸앵카레-호프의 이론과 평다발의 오일러-푸앵카레 특성수를 연관시키는 법을 살펴보았다.

1. 서론

옹골 미분다양체 M 에 벡터장 V 가 주어졌을 때, M 의 점 p 에서 V 가 영이 되면, p 를 V 의 **특이점**이라고 부른다. 국소적으로 $(x^1, \ldots, x^n)$ 이 M 의 좌표계이면, V 는 n 개의 함수 $V^1, \ldots, V^n$ 으로 표현되고, 이때 점 p 가 특이점이 되기 위한 필요충분 조건은 $V^1(p) = 0, \ldots, V^n(p) = 0$ 이다. 이러한 특이점에서는 벡터장의 미분사상

$$dV_p : T_pM \to T_pM$$

이 잘 정의되고, 이 사상이 동형이 되는 경우에 p 가 V 의 **비퇴화** 특이점이라고 부른다. 비퇴화 특이점 p 에서는 벡터장 V 의 **지표** $\operatorname{ind} V(p)$ 가 다음과 같이 주어진다. 만약 dV_p 가 향을 보존하는 사상이면 지표는 1 이고, dV_p 가 향을 뒤집는 사상이면 지표는 -1 이 된다. 점 p 가 V 의 특이점이 아닌 경우에는 지표가 영으로 정의된다. 앞으로 벡터장 V 의 모든 특이점이 비퇴화되어 있다는 자연스러운 가정을 하기로 한다. 따라서 V 의 특이점들은 모두 이산적으로 분포하게 되어, V 는 유한개의 특이점을 가지게 된다. 이제 Poincaré-Hopf 의 정리에 의하면 [AB, BB, BT, Gra]

$$\sum_{p \in M} \operatorname{ind} V(p)$$

Received July 3, 1997. Revised September 8, 1997.
1991 Mathematics Subject Classification: 53C05, 57R25, 58G03, 55R40.
Key words and phrases: 벡터장, 평다발, 타원형 미분작용소.
이 연구는 1996년도 서울대학교 발전기금 대우학술 연구비의 지원을 받았음.

는 M 의 Euler-Poincaré 특성수 $\chi(M)$ 과 같다. 그런데 de Rham 의 이론에 의하면, M 의 Euler-Poincaré 특성수는 M 의 코호몰로지 등급 대수의 교대차원과 같으므로, 등식

$$\sum_{p\in M} \operatorname{ind} V(p) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim H^k(M,\mathbb{R})$$

을 얻는다.

한편 de Rham 코호몰로지 공간은 평다발의 코호몰로지 공간의 특별한 보기이므로, 위 식은 평다발의 경우의 특수한 형태로 이해할 수 있다 [Kob]. 평다발은 벡터다발과 거기에서 정의된 평접속의 한 쌍으로 정의된다. 만약 (E,∇) 가 M 위의 한 평다발이면, E 에 외미분 복체

$$(1) \qquad 0 \to A^0(M,E) \xrightarrow{d^\nabla} \cdots \xrightarrow{d^\nabla} A^n(M,E) \to 0$$

가 정의되고, 이때의 코호몰로지 공간

$$H^\bullet_\nabla(M,E) = H^0_\nabla(M,E) \oplus \cdots \oplus H^n_\nabla(M,E)$$

의 교대차원이 (E,∇) 의 Euler-Poincaré 특성수

$$\chi(M,E) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim H^k_\nabla(M,E)$$

가 된다.

이 논문에서는, 타원형 미분작용소의 이론을 통하여, 다양체 M 의 벡터장 V 의 모든 특이점이 비퇴화되어 있고, E 가 M 위의 급수가 r 인 평다발일 때에 등식

$$(2) \qquad \sum_{p\in M} \operatorname{ind} V(p) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim H^k_\nabla(M,E)$$

이 성립한다는 것을 보인다. 이러한 증명의 특별한 경우는 [AS, BGV, Bes, Hir, K, LM, Roe, Sha, SW, Wit] 등에서 찾아 볼 수 있다.

2. 디랙 작용소와 열작용소의 대각합

우선 평다발 E 와 접다발 TM 에 계량을 각각 하나씩 주자. 그러면 복체 (1) 의 **수반복체**

$$0 \leftarrow A^0(M,E) \xleftarrow{(d^\nabla)^*} \cdots \xleftarrow{(d^\nabla)^*} A^n(M,E) \leftarrow 0$$

를 얻고, 이로부터 **디랙작용소**

$$D := d^\nabla + \left(d^\nabla\right)^* : A^\bullet(M,E) \to A^\bullet(M,E)$$

를 얻는다. 이때

$$A^+(M,E) := \sum_k A^{2k}(M,E), \qquad A^-(M,E) := \sum_k A^{2k+1}(M,E)$$

로 두면,

$$D\left(A^+(M,E)\right) \subset A^-(M,E), \qquad D\left(A^-(M,E)\right) \subset A^+(M,E)$$

이 된다. 이제

$$D^+ := D|_{A^+(M,E)}, \quad D^- := D|_{A^-(M,E)}$$

으로 두자. 그러면, Hodge 이론으로부터 [BGV, Gil, LM]

$$\chi(M,E) = \operatorname{ind} D^+$$

를 얻는다.

한편 M 의 벡터장 V 는 "속곱하기"와 "겉곱하기"

$$\operatorname{int}_V,\ \operatorname{ext}_{V^\flat} : A^\bullet(M,E) \to A^\bullet(M,E)$$

를 정의한다. 여기에서 $V^\flat$ 은 리만계량에 의하여 V 에 대응되는 미분1-형식을 나타낸다. 이제 이것은 디랙작용소 D 의 일매개변수족

$$D_t := D + t(\operatorname{int}_V + \operatorname{ext}_{V^\flat}) : A^\bullet(M,E) \to A^\bullet(M,E), \qquad t \in \mathbb{R}$$

을 만든다. 물론

$$D_t\left(A^\pm(M,E)\right) \subset A^\mp(M,E)$$

이므로,

$$D_t^+ := D_t|_{A^+(M,E)}, \quad D_t^- := D_t|_{A^-(M,E)}$$

로 둘 수 있다.

타원형 미분작용소의 지표는 연속변환에 대하여 변하지 않으므로,

$$\chi(M,E) = \operatorname{ind} D^+ = \operatorname{ind} D_t^+$$

가 되고, 한편

$$D_t^- = \left(D_t^+\right)^*$$

이므로 위 식은 다시 McKean-Singer 의 공식에 의하여 [LM]

$$\operatorname{Tr} e^{-D_t^- D_t^+} - \operatorname{Tr} e^{-D_t^+ D_t^-}$$

가 된다.

이제 비퇴화된 벡터장 V 의 특이점들 중에서 지표가 $+1$ 인 것들의 개수를 $\operatorname{ind}^+ V$, 지표가 -1 인 것들의 개수를 $\operatorname{ind}^- V$ 로 두면, 다음 정리로부터 우리가 원하는 등식 (2) 를 얻는다.

정리 1. M 과 E 의 계량을 잘 정하면 등식

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Tr} e^{-D_t^- D_t^+} = r \operatorname{ind}^+ V, \qquad \lim_{t\to\infty} \operatorname{Tr} e^{-D_t^+ D_t^-} = r \operatorname{ind}^- V$$

이 성립한다.

3. 정리 1 의 증명

이 정리의 증명을 위하여 우선

$$\Delta_t := D_t \circ D_t : A^\bullet(M, E) \to A^\bullet(M, E)$$

로 두고,

$$C := \operatorname{int}_V + \operatorname{ext}_{V^\flat} : A^\pm(M, E) \to A^\mp(M, E)$$

로 두자. 그러면,

$$\Delta_t = \Delta_0 + t^2|V|^2 + t[D, C]$$

가 된다. 여기에서

$$\Delta_0 + t^2|V|^2$$

는 조화진동자이고 [Roe],

$$[D, C] : A^\pm(M, E) \to A^\pm(M, E)$$

는 미분작용소가 아닌 대수적 작용소가 된다.

이제 벡터장 V 의 한 영점 p 를 중심으로 하는 국소 좌표계 $(x^1, \ldots, x^n)$ 을 잘 택하면, 행렬 $(v_j^i) \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ 이 존재하여,

$$V = \sum_{i,j=1}^n v_j^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

로 주어진다. 이때 리만계량을 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 로 두면

$$\Delta_t = -\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 + t^2 \sum_{i,j} \left(\sum_k v_i^k v_j^k\right) x^i x^j + t \sum_{i,j} v_j^i (a_j^* - a_j)(a_i^* + a_i)$$

로 주어진다. 여기에서

$$a_i = \mathrm{int}_{\partial/\partial x^i}, \qquad a_i^* = \mathrm{ext}_{dx^i}$$

를 나타낸다. 한편 유클리드 공간에서

$$-\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 + t^2 \sum_{i,j} \left(\sum_k v_i^k v_j^k\right) x^i x^j$$

과

$$t \sum_{i,j} v_j^i (a_j^* - a_j)(a_i^* + a_i)$$

는 서로 교환가능한 작용소이고, 이로부터 $\det(v_j^i) > 0$ 인 경우에는

$$\dim\ker \Delta_t|_{A^+(\mathbb{R}^n)} = 1, \qquad \dim\ker \Delta_t|_{A^-(\mathbb{R}^n)} = 0$$

을 얻고, $\det(v_j^i) < 0$ 인 경우에는

$$\dim\ker \Delta_t|_{A^+(\mathbb{R}^n)} = 0, \qquad \dim\ker \Delta_t|_{A^-(\mathbb{R}^n)} = 1$$

을 얻는다 [NS].

이제

$$\Delta_t^\pm := \Delta_t|_{A^\pm(M,E)}$$

로 두자. 그러면

$$\Delta_t^+ = D_t^- \circ D_t^+, \qquad \Delta_t^- = D_t^+ \circ D_t^-$$

를 알 수 있다. 한편 $\Delta_t^\pm$ 의 Schwartz 핵을

$$K_t^\pm(x,y) \in \mathrm{Hom}(\wedge^\pm \otimes E_y, \wedge^\pm \otimes E_x), \qquad x, y \in M$$

으로 두면,

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\Delta_t^\pm} = \int_M \mathrm{tr}\, K_t^\pm(x,x)\, dx$$

로 주어진다.

이제 V 의 특이점들을 $\{p_1, p_2, \ldots\}$ 로 두고, M 의 계량이 이 특이점 근방에서 평평하도록 정한다. 또 E 의 계량도 이 특이점 근방에서 주어진 평접속과

어울리도록 정한다. 그리고 영점들의 근방 $B(p_j, \epsilon)$ 을 잡아 이들이 서로 공통부분이 없도록 한다. 또 $\rho \in C^\infty(M)$ 이

$$\operatorname{supp}\rho \in \bigcup_j B(p_j, \epsilon), \qquad \rho|_{\bigcup_j B(p_j, \epsilon/2)} \equiv 1$$

되도록 정한다. 그러면

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} e^{-\Delta_t^\pm} &= \int_M \operatorname{tr} \rho K_t^\pm + \int_M \operatorname{tr}(1-\rho) K_t^\pm \\ &= \sum_j \int_{B(p_j,\epsilon)} \operatorname{tr} \rho K_t^\pm + \int_{M - \cup_j B(p_j, \epsilon/2)} \operatorname{tr}(1-\rho) K_t^\pm\end{aligned}$$

를 얻는다. 한편

$$\lim_{t\to\infty} \int_{B(p_j,\epsilon)} \operatorname{tr} \rho K_t^+ = \begin{cases} r, & \operatorname{ind} V(p_j) = +1 \text{ 일때} \\ 0, & \operatorname{ind} V(p_j) = -1 \text{ 일때}\end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{B(p_j,\epsilon)} \operatorname{tr} \rho K_t^- = \begin{cases} r, & \operatorname{ind} V(p_j) = -1 \text{ 일때} \\ 0, & \operatorname{ind} V(p_j) = +1 \text{ 일때}\end{cases}$$

이고,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{M - \cup_j B(p_j, \epsilon/2)} \operatorname{tr}(1-\rho) K_t^\pm = 0$$

이므로

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Tr} e^{-\Delta_t^+} = r \operatorname{ind}^+ V, \qquad \lim_{t\to\infty} \operatorname{Tr} e^{-\Delta_t^-} = r \operatorname{ind}^- V$$

를 얻는다.

이로써 원하는 증명을 모두 마친다.

참고문헌

[AB] M. F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes:* I, II, Ann. Math., **86** (1967), 374–407; **88** (1968), 451–491.

[AS] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators.* III, Ann. Math. **87** (1968), 546–604.

[BGV] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators,* Springer-Verlag, 1992, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 298.

[Bes] A. L. Besse, *Géometrie riemannienne en dimension 4*, CEDIC, Paris, 1981.

[BB] B. Booss and D. D. Bleecker, *Topology and analysis: The Atiyah-Singer index formula and gauge theoretic physics*, Springer-Verlag, 1985.

[BT] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer, 1982, GTM 82.

[Gil] P. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem, second edition*, CRC Press, 1995.

[Gra] A. Gray, *Tubes*, Addison Wesley, 1990.

[Hir] M. W. Hirsh, *Differential topology*, Springer-Verlag, GTM 33, 1973.

[K] 김홍종, 오일러 특성수, Proc. workshop in Pure Mathematics **16** Part III (1996), 57–110.

[Kob] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Publ. Math. Soc. Japan 15, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo, 1987.

[LM] H. B. Lawson, Jr. and M. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[NS] S. P. Novikov and M. A. Shubin, *Morse Inequality and Von Neumann* II_1*-Factors*, Soviet Math. Dokl., **34** (1987), 79–82.

[Roe] J. Roe, *Elliptic Operators, Topology, and Asymptotic Methods*, Longman Scientific and Technical, Pitman Research Notes in Math. Series, 1988.

[Sha] P. Shanahan, *An introduction to the Atiyah-Singer index theorem*, Springer, 1977, Lect. Notes in Math. **638**.

[SW] A. El Soufi and X. P. Wang, *Some remarks on Witten's method. Poincaré-Hopf theorem and Atiyah-Bott formula*, Ann. Global Anal. Geom. **5** (1987), 161–178.

[Wit] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **17** (1982), 661–692.

서울대학교 자연과학대학 수학과