

유한차분법을 이용한 복합적층 원형곡선요소의 평면응력문제 연구

A Study on the Plane Stress Problem of Composite Laminated Annular Elements Using Finite Difference Method

이 상 열¹⁾ · 임 성 순²⁾ · 장 석 윤³⁾
Lee, Sang Youl Yhim, Sung Soon Chang, Suk Yoon

ABSTRACT : Composite materials are consist of two or more different materials to produce desirable properties for structural strength. Because of their superiority in strength, corrosion resistance, and weight reduction, they are used extensively as structural members. The objective of this study is to present the effectiveness of the laminated composite elements by analyzing in-plane displacement and stress of the anisotropic laminated annular elements. Anisotropic laminated structures are very difficult to analyze and apply, compared with isotropic and orthotropic cases for arbitrary boundaries and fiber angle-ply.

Boundary conditions for the examples used in this study consist of two opposite edges clamped and the other two edges free, and finite difference method is used in this study for numerical analysis. From the numerical result, it is found that the program used in this study can be used to obtain the displacement of the straight beams considering it's transverse shear deformation as well as anisotropic laminated elements. Several numerical examples show the advantages of the stiffness increase when the angle-ply composite materials are used. Therefore, it gives a guide in deciding how to make use of fiber's angle for the subtended angle, load cases, and boundary conditions.

KEYWORDS : composite laminated annular element, plane stress problem, finite differente method, shear deformation.

1) 학생회원 : 서울시립대학교 토목공학과 박사과정
2) 정회원 : 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사
3) 정회원 : 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사

1. 서 론

복합재료로 이루어지는 복합적층형식은 구조적 우수성으로 인하여 최근 많은 연구와 개발이 진행되고 있다. 복합적층구조형식은 토목 및 건축 구조물, 교량, 댐구조, 포장, 컨테이너, 미사일, 선박 등 그 이용 분야가 매우 다양하다. 복합적층형식이 구조 재료로서의 최적의 강도를 가질 수 있도록 하기 위하여 복합재료의 효과적인 배치와 적층 배열 상태에 대한 역학적인 해석이 필요하다. 비등방성 적층 형식은 재료의 화이버 보강 각도와 적층 상태에 따라서 등방성인 경우와 직교 이방성인 경우에 비해 해석과 적용이 매우 복잡하고 거동을 예측하기가 힘들다. 본 연구에서는 비등방성 곡선요소의 거동을 해석하기 위한 수치해석법으로 유한차분법을 도입하였다. 유한 차분법을 이용하여 요소를 해석할 경우, 경계조건에 대한 처리가 가장 중요하다. 특히 자유단을 갖는 경우는 거동의 해석이 고정이나 단순지지에 비해 가상점 처리등이 상당히 복잡하다. 본 연구는 자유 경계를 갖는 비등방성 적층 곡선요소를 해석 모델로 하여, 곡선요소 중립 면에서의 면내 작용 하중에 의한 다양한 변위 형상과 단면력을 Δ^4 의 오차항을 갖는 차분식을 사용하여 해석하였다.

극좌표계로 이루어진 곡선 형식은 사각형 형식과 비교하여 볼 때 유사한 거동을 가지나, 사각형 형식보다 더욱 일반적인 경우라고 볼 수 있다. 만약, 곡선 형식의 곡률을 무한대로 놓는다면, 곡선 형식은 결국 사각형 형식으로 볼 수 있다. 본 연구는 면내력을 받는 원형곡선요소의 면내 거동으로서 Plane-stress문제가므로 보와 비교할 수 있다. 곡선 요소의 물성을 등방성(Poisson's ratio=0)으로 하고 곡률반경을 거의 무한대로 크게 잡고 각도를 아주 작게 놓았을 경우, 직선보와 처짐을 비교, 검증하였다. 본 연구 모델에서의 경계 조건은 2번 자유 경계에 2번이 고정 경계이며 1번 자유 경계에 3번 고정 경계인 경우와도 비교하였다. 하중 조건은 자유 경계의 윗 부분에 대하여 면내 등

분포하중으로 가하였으며, 동일한 두께로, 동일한 재료적 성질을 갖는 각각의 층을 적층시켰다. 본 연구에서는 이러한 정밀도의 향상을 위하여 경계 조건에 따라서 반경 방향으로는 Δ^2 또는 Δ^4 의 오차를 갖는 차분식을 사용하였고, 접선 방향으로는 Δ^4 의 오차를 갖는 차분식을 이용하였다. 자유 경계에서의 차분식의 구성은 고정이나 단순지지의 경우에 비하여 가상점에서의 변위와 힘의 관계를 식으로 표현하기 복잡하므로 본 연구에서는 이 부분을 중점적으로 기술하였다. 먼저, 자유경계점과 첫 번째 내부점의 유한차분식을 유도하였고, 두 번째 내부점부터는 기존의 차분식을 사용하였다. 이렇게 유도한 차분식을 이용하여 전체 강성행렬을 구성한 다음 곡선 적층 요소의 임의의 화이버 각도 보강 방향과 각층의 배열의 합성, 요소의 단면 수치 변화, 물성 변화 등에 따른 곡선요소의 면내 변위와 단면력을 분석하였다.

2. 기본 이론

본 연구에서 해석하고자 하는 미소 곡선 요소는 오른손 좌표계를 사용하며, 그림 2.1과 같이 표시하였다. 여기서, u_r , v_θ 는 미소변형이론에 의한 중립축에서의 각각 반경방향의 변위와 접선 방향의 각 변위를 나타낸다. 곡선요소의 미소 요소에서의 내력을 표시하면 그림 2.2와 같다. 두께방향으로는

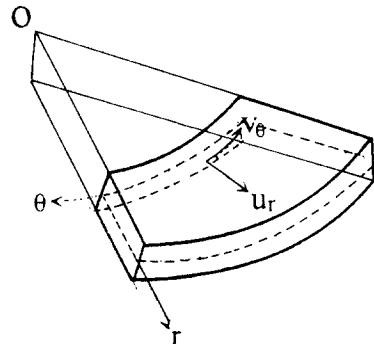


그림 2.1 미소요소의 좌표계

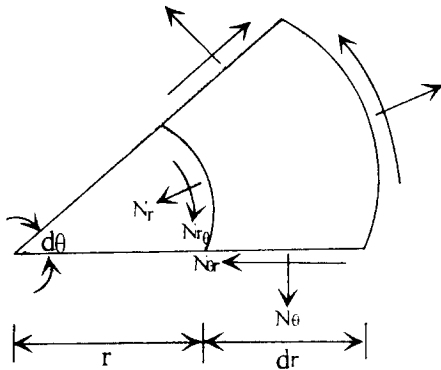


그림 2.2 곡선 요소의 내력 정의

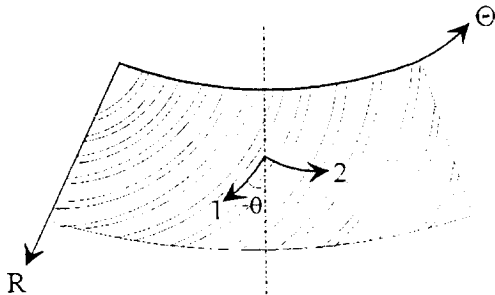


그림 2.3 화이버로 보강된 층의 재료축 및 구조축

변화가 일어나지 않는 2차원 미소 곡선 요소에서의 변형도는 그림 2.2와 같이 나타낼수 있다.

그림 2.3은 각각의 층의 재료축이 구조축인 반경축과 θ 만큼 기울어져 있을 때 재료축의 정의를 나타낸 것이다. 그림 2.3과 같이 본 논문에서는 시계 방향으로 기울어진 각도를 $+\theta$ 로 간주하였으며, 반시계 방향으로 기울어진 각도를 $-\theta$ 로 간주하였다.

두께를 가지는 대칭적층곡선요소의 단면력은 응력-변위의 관계식에서 각층의 응력을 두께에 대하여 적분함으로써 구할 수 있다. 본 연구는 대칭적층곡선요소의 면내력에 의한 면내 거동으로서 뒤틀림곡률이나 굽힘 곡률을 고려하지 않으므로 면내 응력의 합력 N은 식(2.1)과 같이 표시할 수 있다. 그러므로 식 (2.1)에서 B_{ij} (coupling matrix)는 0이다.

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_r^{(k)} \\ \sigma_\theta^{(k)} \\ \tau_{r\theta}^{(k)} \end{bmatrix} dz$$

이고

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (i,j=1,2,6)$$

이다.

여기서, A_{ij} 는 면내력강도(extensional stiffness matrix)라고 정의하며, 복합재료로 이루어지는 요소에서의 처짐을 좌우하는 강도이다. 그리고, Q_{ij} 는 k번째 플라이-앵글(ply-angle)을 갖는 요소의 k번째 층의 재료축에 대한 변환강도이다.

그림 2.2를 이용하여 극좌표계로 표시된 평형 방정식을 구하면 식 (2.2)와 식 (2.3)과 같다.

$$\frac{\partial N_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{N_r^{(k)} - N_\theta^{(k)}}{r} + F_r = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2N_{r\theta}^{(k)}}{r} + F_\theta = 0 \quad (2.3)$$

식 (2.1)을 식 (2.2)와 식 (2.3)에 각각 대입하고 정리하면 변위의 미분항으로 이루어지는 식 (2.4)와 식 (2.5)과 같은 면내력강도와 변위의 미분항으로 표현된 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2A_{16} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + A_{16} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + A_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta^2} \\ & + A_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_{22} \frac{u_r}{r^2} + A_{26} \frac{1}{r^2} v_\theta - A_{26} \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \end{aligned}$$

$$+ A_{26} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} - (A_{22} + A_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.4)$$

$$A_{26} \frac{1}{r^2} u_r + (A_{26} + 2A_{16}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + A_{16} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + A_{26} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - A_{66} \frac{1}{r^2} v_\theta + (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + A_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + (A_{22} + A_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} + A_{66} \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + A_{66} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} = 0 \quad (2.5)$$

식 (2.4)는 반경 방향의 자유도에 대한 평형방정식이며, 식 (2.5)는 접선 방향의 자유도에 대한 평형방정식이다. 위와 같이 평형방정식을 면내력 강도와 변위의 미분항의 형태로 유도하여 유한차분법을 이용한 수치해석방법에 이용할 수 있다.

3. 유한 차분을 이용한 해법

복합 적층요소의 경우, 복잡한 경계조건과 비등방성으로 인하여 정해를 얻어내기가 어려운 경우가 많다. 그러므로 수치해석방법을 이용하게 되며, 여기에 관련된 여러 가지 수학적인 방법이 제시되고 있다. 유한차분식은 적층요소의 평형방정식을 수학적 근사방법으로 바꾸어 계산할 수 있는 간편한 방법이다. 유한차분식은 테일러 급수를 이용하므로 오차의 항을 선택함에 따라서 정확도를 높일 수 있다. 본 절에서는 유한차분식을 이용하여, 미분식으로 이루어진 평형방정식을 유한차분식으로 이루어진 평형방정식으로 나타낸다. 먼저 요소의 경계점 및 내부점의 절점방향을 정의하면 그림 3.1과 같다. 그림에서는 절점 i 는 아래 방향을 양(+)으로 하였고, 절점 j 는 오른쪽 방향을 양(+)으로 하였다. 그리고, 그림 3.1에서와 같이 하중이 가해지는 자유 경계점에서는, i 방향으로 Δ^2 의 오차를 갖는 차분계수를 사용하였고, j 방향으로 Δ^4 의 오차를 갖는 차분계수를 사용하였다. 그리고, 요소

의 내부점에서는 i 방향과 j 방향 모두 Δ^4 의 오차를 갖는 차분계수를 사용하였다.

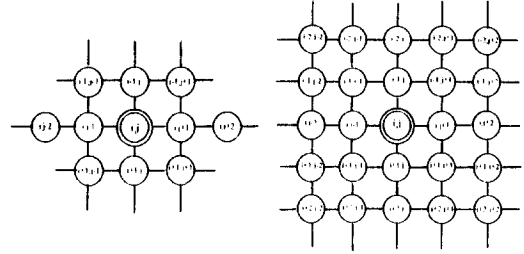


그림 3.1 요소의 경계점 및 내부점 정의

앞에서 구한 평형방정식 식 (2.4)와 식 (2.5)의 미분항을 그림 3.1에서 정의한 절점방향에 의한 유한 차분식으로 나타내어 행렬식으로 정리한 것이 식 (3.1)~(3.4)이다. 식 (3.1)은 식 (2.4)를 차분하여 반경 방향의 변위에 대하여 정리한 것이고, 식 (3.2)는 식 (2.4)를 접선방향에 대하여 정리한 것이다. 또, 식 (3.3)은 식 (2.5)을 차분하여 반경방향의 변위에 대하여 정리한 것이고, 식 (3.4)는 식 (2.5)를 접선 방향에 대하여 정리한 것이다. 유한 차분식으로 나타내어 행렬식으로 정리한 것이 식 (3.1)~(3.4)이다. 식 (3.1)은 식 (2.4)를 차분하여 반경 방향의 변위에 대하여 정리한 것이고, 식 (3.2)는 식 (2.4)를 접선방향에 대하여 정리한 것이다. 또, 식 (3.3)은 식 (2.5)을 차분하여 반경방향의 변위에 대하여 정리한 것이고, 식 (3.4)는 식 (2.5)를 접선 방향에 대하여 정리한 것이다.

$$[-\omega_{10} u_n]_{j-2} + \begin{bmatrix} (16\omega_{10} + 3\zeta_{10})u_n \\ -4\zeta_{10}u_{n+1} \\ +\zeta_{10}u_{n+2} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} (\omega_{30} - \omega_{20})u_{n-1} \\ -(2\omega_{30} - \omega_{40})u_n \\ +(\omega_{30} + \omega_{20})u_{n+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} (16\omega_{10} + 3\zeta_{10})u_n \\ -4\zeta_{10}u_{n+1} \\ +\zeta_{10}u_{n+2} \end{bmatrix}_{j+1} + [-\omega_{10}u_n]_{j+2} = 0 \quad (3.1)$$

$$[-(\omega_{41} + \omega_{51})v_{\theta}]_{j-2} + \begin{bmatrix} (16\omega_{41} + 3\zeta_{11} + 8\omega_{51})v_{\theta} \\ -4\zeta_{11}v_{\theta+1} \\ +\zeta_{11}v_{\theta+2} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} (\omega_{31} - \omega_{61})v_{\theta-1} \\ -(2\omega_{31} - \omega_{11}) + 30\omega_{41} \\ +(\omega_{31} + \omega_{61})v_{\theta+1} \end{bmatrix}_j$$

$$+ \begin{bmatrix} (16\eta_{10} + 3\zeta_{11} - 8\eta_{51})v_{\theta i} \\ + 4\zeta_{11}v_{\theta i+1} \\ - \zeta_{11}v_{\theta i+2} \end{bmatrix}_{j+1} + [-(\omega_{41} - \omega_{51})v_{\theta i}]_{j+2} = 0 \quad (3.2)$$

$$[-(\omega_{41} + \omega_{51})u_{r i}]_{j-2}$$

$$+ \begin{bmatrix} (16\omega_{41} + 3\zeta_{11} - 8\omega_{51})u_{r i} \\ - 4\zeta_{11}u_{r i+1} \\ + \zeta_{11}u_{r i+2} \end{bmatrix}_{j+1} + \begin{bmatrix} -(\omega_{21} - \omega_{31})u_{r i-1} \\ -(2\omega_{31} + \omega_{11} + 30\omega_{41})u_{r i} \\ + (\omega_{21} + \omega_{31})r_{\theta i+1} \end{bmatrix}_j$$

$$+ \begin{bmatrix} (16\omega_{41} - 3\omega_{11} - 8\omega_{51})u_{r i} \\ + 4\zeta_{11}u_{r i+1} \\ - \zeta_{11}u_{r i+2} \end{bmatrix}_{j+1} + [-(\omega_{41} - \omega_{51})u_{r i}]_{j+2} = 0 \quad (3.3)$$

$$[-\eta_{21}v_{\theta i}]_{j-2}$$

$$+ \begin{bmatrix} (16\eta_{11} + 3\zeta_{10})v_{\theta i} \\ - 4\zeta_{10}v_{\theta i+1} \\ + \zeta_{10}v_{\theta i+2} \end{bmatrix}_{j+1} + \begin{bmatrix} (\eta_{31} - \eta_{21})v_{\theta i-1} \\ -(2\eta_{31} - \eta_{41})v_{\theta i} \\ + (\eta_{31} + \eta_{21})v_{\theta i+1} \end{bmatrix}_j$$

$$+ \begin{bmatrix} (16\omega_{11} - 3\zeta_{10})v_{\theta i} \\ + 4\zeta_{10}v_{\theta i+1} \\ - \zeta_{10}v_{\theta i+2} \end{bmatrix}_{j+1} + [-\eta_{11}v_{\theta i}]_{j+2} = 0 \quad (3.4)$$

여기서,

$$\omega_{10} = \frac{1}{12} A_{66} \frac{1}{r^2 \Delta \theta^2}$$

$$\omega_{11} = A_{26} \frac{1}{r^2}$$

$$\omega_{20} = \frac{1}{2} A_{11} \frac{1}{r \Delta r}$$

$$\omega_{21} = \frac{1}{2} (A_{26} + 2A_{16}) \frac{1}{r \Delta r}$$

$$\omega_{30} = A_{11} \frac{1}{(\Delta r)^2}$$

$$\omega_{31} = A_{16} \frac{1}{(\Delta r)^2}$$

$$\omega_{40} = A_{22} \frac{1}{r^2}$$

$$\omega_{41} = \frac{1}{12} A_{26} \frac{1}{r^2} \frac{1}{(\Delta \theta)^2}$$

$$\zeta_{10} = \frac{1}{2} A_{16} \frac{1}{r \Delta r \Delta \theta}$$

$$\omega_{51} = \frac{1}{12} (A_{22} + A_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta \theta}$$

$$\zeta_{11} = \frac{1}{4} (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{r \Delta r \Delta \theta}$$

$$\omega_{61} = \frac{1}{2} A_{26} \frac{1}{r \Delta r}$$

$$\eta_{11} = A_{22} \frac{1}{r^2} \frac{1}{12} \frac{1}{(\Delta \theta)^2}$$

$$\eta_{21} = A_{66} \frac{1}{r^2}$$

$$\eta_{31} = \frac{1}{2} A_{66} \frac{1}{r \Delta r}$$

$$\eta_{41} = A_{66} \frac{1}{(\Delta r)^2} \quad \text{이다.}$$

식 (3.1)~(3.4)에서 요소의 자유경계에 대하여 차분식을 대입하는 경우 3개의 가상점이 발생한다. 이런 경우에는 외력을 가하는 절점을 제외한 나머지 양쪽의 가상점, 즉 절점 (i-1, j-1), (i-1, j+1)은 전진차분식을 대입하여 내부점으로 치환하였다.

한편, 2차원 극좌표계를 사용하는 경우, Δr , $\Delta \theta$, r 은 식 (3.5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta r = \frac{r}{(K_i - 1)}, \quad \Delta \theta = \frac{\theta}{(K_j - 1)}, \quad r_i = i \cdot \Delta r \quad (3.5)$$

여기서, K_i , K_j 는 각각 반경방향과 접선방향으로의 요소 전체의 절점수를 나타낸다.

외력이 가해지는 절점에서 생기는 $u_{i-1, j}$, $v_{i-1, j}$ 와 같은 가상점들은 외력에 의한 변위형상을 예측할 수 없으므로 전진 또는 후진차분법을 사용하여 단순하게 처리할 수 없다. 그러므로 이 미지의 가상점은 자유경계에서의 외력과 내력의 관계식을 사용하여 내부점으로 치환해야 한다. 이러한 미지의 가상점을 처리하기 위하여 식 (2.1)의 미분항에 중앙차분식을 사용하였으며 식 (3.6)과 같다.

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta r} \cdot \{-u_{i-1, j} + u_{i+1, j}\} \\ + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{26} \end{bmatrix} \frac{1}{2r\Delta \theta} \cdot \{-v_{\theta i, j-1} + v_{\theta i, j+1}\}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{26} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot u_{rj} \\
& + \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{66} \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta\theta} \cdot \{-u_{rj-1} + u_{rj+1}\} \\
& + \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{66} \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta r} \cdot \{-v_{\theta j-1} + v_{\theta j+1}\} \\
& - \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{66} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot v_{\theta j}
\end{aligned} \quad (3.6)$$

식 (3.6)에서 N_{θ} 는 본 연구의 경계조건에서 고정경계에 수직으로 작용하는 힘이므로 여기서는 존재하지 않음으로 보아 생략하였다.

식 (3.6)을 가상점에 해당하는 $\begin{bmatrix} u_{r-1,j} \\ v_{\theta-1,j} \end{bmatrix}$ 에 대하여 다시 정리하면 식 (3.7)과 같다.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_{r-1,j} \\ v_{\theta-1,j} \end{bmatrix} &= -2\Delta r [\alpha] \begin{bmatrix} N_{r,j} \\ N_{\theta,j} \end{bmatrix} + [\alpha] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \end{bmatrix} \cdot u_{r+1,j} + [\alpha] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{66} \end{bmatrix} \cdot v_{\theta+1,j} \\
& + [\alpha] \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{26} \end{bmatrix} \frac{\Delta r}{r\Delta\theta} \{-v_{\theta,j-1} + v_{\theta,j+1}\} \\
& + [\alpha] \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{66} \end{bmatrix} \frac{\Delta r}{r\Delta\theta} \{-u_{r,j-1} + u_{r,j+1}\} \\
& - [\alpha] \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{66} \end{bmatrix} \frac{2\Delta r}{r} \cdot v_{\theta,j}
\end{aligned} \quad (3.7)$$

여기서, $[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{16} \\ \alpha_{16} & \alpha_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} \\ A_{16} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1}$ 이다.

식 (3.7)을 식 (3.1)~(3.4)의 자유경계에서의 가상점에 대입하면 가상점은 없어지고 가상점 대신 외력에 관한 식을 포함하는 내부점의 차분식으로 전환하여 표현된다. 식 (3.7)을 식 (3.1)~(3.4)에 각각 대입하여 정리하면 식 (3.1)~(3.4)는 식 (3.8)~(3.11)과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
& [-\omega_{10}u_{rj}]_{j-2} \\
& + \begin{bmatrix} (16\omega_{10} + 3\zeta_{10})u_{rj} \\ -c_4(A_{11}\zeta_7 + A_{16}\zeta_8)u_{rj} \\ + \frac{1}{2}c_5(A_{11}\zeta_7 - A_{26}\zeta_8)u_{rj} \\ -4\zeta_{10}u_{rj+1} + \zeta_{10}u_{rj+2} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -(2\omega_{30} - \omega_{40})u_{rj} \\ + 2c_2(A_{11}\zeta_5 - A_{16}\zeta_6)u_{rj} \\ -c_3(A_{11}\zeta_7 - A_{26}\zeta_8)u_{rj} \\ + c_1(A_{11}\zeta_1 - A_{16}\zeta_2)u_{rj+1} \\ - \frac{1}{2}c_2(A_{11}\zeta_1 - A_{26}\zeta_2)u_{rj+1} \\ + (\omega_{30} + \omega_{20})u_{rj+1} \end{bmatrix}_j \\
& + \begin{bmatrix} (16\omega_{10} - 3\zeta_{10})u_{rj} \\ + c_4(A_{11}\zeta_7 + A_{16}\zeta_8)u_{rj} \\ + \frac{1}{2}c_5(A_{11}\zeta_7 - A_{26}\zeta_8)u_{rj} \\ + 4\zeta_{10}u_{rj+1} - \zeta_{10}u_{rj+2} \end{bmatrix}_{j+1} + [-\omega_{10}u_{rj}]_{j+2} \\
& = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)A_{11}\alpha_{11}N_{rj} \\ (k_1 - k_2)A_{16}\alpha_{16}N_{rj} \end{bmatrix} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-(\omega_{41} + \omega_{51})v_{\theta j}]_{j-2} \\
& + \begin{bmatrix} (16\omega_{41} + 3\zeta_{11} + 8\omega_{51})v_{\theta j} \\ -c_4(A_{11}\zeta_5 + A_{16}\zeta_6)v_{\theta j} \\ + \frac{1}{2}c_5(A_{11}\zeta_5 - A_{26}\zeta_6)v_{\theta j} \\ -4\zeta_{11}v_{\theta j+1} + \zeta_{11}v_{\theta j+2} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -(2\omega_{31} - \omega_{11} + 30\omega_{41})v_{\theta j} \\ -2c_2(A_{11}\zeta_7 + A_{16}\zeta_8)v_{\theta j} \\ -c_3(A_{11}\zeta_7 - A_{26}\zeta_8)v_{\theta j} \\ - \frac{1}{2}c_2(A_{11}\zeta_3 + A_{26}\zeta_4)v_{\theta j+1} \\ + (\omega_{31} - \omega_{61})v_{\theta j+1} \end{bmatrix}_j \\
& + \begin{bmatrix} (16\eta_{41} - 3\zeta_{11} - 8\eta_{51})v_{\theta j} \\ + c_4(A_{11}\zeta_5 + A_{16}\zeta_6)v_{\theta j} \\ + \frac{1}{2}c_2(A_{11}\zeta_5 - A_{26}\zeta_6)v_{\theta j} \\ + 4\zeta_{11}v_{\theta j+1} - \zeta_{11}v_{\theta j+2} \end{bmatrix}_{j+1} + [-(\omega_{41} - \omega_{51})v_{\theta j}]_{j+2} \\
& = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)A_{11}\alpha_{16}N_{\theta j} \\ (k_1 + k_2)A_{16}\alpha_{66}N_{\theta j} \end{bmatrix} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-(\omega_{41} + \omega_{51})u_{rj}]_{j-2} \\
& + \begin{bmatrix} (16\omega_{41} + 3\zeta_{11} - 8\omega_{51})u_{rj} \\ -c_4(A_{16}\zeta_7 + A_{66}\zeta_8)u_{rj} \\ + \frac{1}{2}c_5((A_{26} + 2A_{16})\zeta_7 + A_{66}\zeta_8)u_{rj} \\ -4\zeta_{11}u_{rj+1} + \zeta_{11}u_{rj+2} \end{bmatrix}_{j-1} \\
& + \begin{bmatrix} -(2\omega_{31} + \omega_{11} + 30\omega_{41})u_{rj} + 2c_2(A_{16}\zeta_5 + A_{66}\zeta_6)u_{rj} \\ -c_3((A_{26} + 2A_{16})\zeta_5 + A_{66}\zeta_6)u_{rj} \\ - \frac{1}{2}c_2((A_{26} + 2A_{16})\zeta_1 + A_{66}\zeta_2)u_{rj+1} \\ -c_1(A_{16}\zeta_1 + A_{66}\zeta_2)u_{rj+1} + (\omega_{21} + \omega_{31})u_{rj+1} \end{bmatrix}_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} (16\omega_{41} - 3\omega_{11} - 8\omega_{51})u_{ri} \\ + c_4(A_{16}\xi_7 + A_{66}\xi_8)u_{ri} \\ + \frac{1}{2}c_5\{(A_{26} + 2A_{16})\xi_7 + A_{66}\xi_8\}u_{ri} \\ + 4\zeta_{11}u_{ri+1} - \zeta_{11}u_{ri+2} \end{array} \right]_{j+1} + [-(\omega_{41} - \omega_{51})u_{ri}]_{j+2} \\
& = \left[\begin{array}{l} -(k_1 + k_2)\{A_{16} + A_{26} + 2A_{16}\}\alpha_{11}N_{ri} \\ - (k_1 + k_2)A_{66}\alpha_{16}N_{ri} \end{array} \right]_j \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-\eta_{11}v_{\theta i}]_{j-2} \\
& + \left[\begin{array}{l} (16\eta_{11} + 3\zeta_{10})v_{\theta i} \\ + c_4(A_{16}\xi_5 + A_{66}\xi_6)v_{\theta i} \\ + \frac{1}{2}c_5\{(A_{26} + 2A_{16})\xi_5 + A_{66}\xi_6\}v_{\theta i} \\ - 4\zeta_{10}v_{\theta i+1} + \zeta_{10}v_{\theta i+2} \end{array} \right]_{j-1} \\
& + \left[\begin{array}{l} -(2\eta_{31} - \eta_{41})v_{\theta i} - 2c_2(A_{16}\xi_7 + A_{66}\xi_8)v_{\theta i} \\ - c_3\{(A_{26} + 2A_{16})\xi_7 + A_{66}\xi_8\}v_{\theta i} \\ + \frac{1}{2}c_2\{(A_{26} + 2A_{16})\xi_3 + A_{66}\xi_4\}v_{\theta i+1} \\ + c_1(A_{16}\xi_3 + A_{66}\xi_4)v_{\theta i+1} + (\eta_{31} + \eta_{21})v_{\theta i+1} \end{array} \right]_j \\
& + \left[\begin{array}{l} (16\omega_{11} - 3\zeta_{10})v_{\theta i} \\ - c_4(A_{16}\xi_5 + A_{66}\xi_6)v_{\theta i} \\ + \frac{1}{2}c_5\{(A_{26} + 2A_{16})\xi_5 + A_{66}\xi_6\}v_{\theta i} \\ + 4\zeta_{10}v_{\theta i+1} - \zeta_{10}v_{\theta i+2} \end{array} \right]_{j+1} + [-\eta_{11}v_{\theta i}]_{j+2} \\
& = \left[\begin{array}{l} -(k_1 + k_2)\{A_{16} + A_{26} + 2A_{16}\}\alpha_{16}N_{\theta i} \\ - (k_1 - k_2)A_{66}\alpha_{16}N_{\theta i} \end{array} \right]_j \quad (3.11)
\end{aligned}$$

여기서 $\xi_1 = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{16}A_{16}$ $\xi_2 = \alpha_{16}A_{11} + \alpha_{66}A_{16}$
 $\xi_3 = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{16}A_{66}$ $\xi_4 = \alpha_{16}A_{11} + \alpha_{66}A_{66}$
 $\xi_5 = \alpha_{11}A_{12} + \alpha_{16}A_{26}$ $\xi_6 = \alpha_{16}A_{12} + \alpha_{66}A_{26}$
 $\xi_7 = \alpha_{11}A_{16} + \alpha_{16}A_{66}$ $\xi_8 = \alpha_{16}A_{16} + \alpha_{66}A_{66}$
 $c_1 = \frac{1}{\Delta r^2}$ $c_2 = \frac{1}{r\Delta r}$ $c_3 = \frac{1}{\Delta r^2 r^2}$
 $c_4 = \frac{1}{r\Delta r\Delta\theta}$ $c_5 = \frac{1}{r^2\Delta\theta}$ $k_1 = \frac{2}{\Delta r}$
 $k_2 = \frac{1}{r}$ 이다.

식 (3.8)~(3.11)은 자유 경계에서의 가상점들을 내부점의 값으로 환원시킨 것이다. 요소의 자유 경계점에서는 식 (3.8)~(3.11)을 사용하며, 내부저에서는 중앙차분법으로 구성한 식 (3.1)~(3.4)을 이용한다. 이렇게 구성한 유한차분식을 요소

전체 강성행렬에 배열하였으며 간단한 기호로 표현하면 식 (3.12)과 같다.

$$\begin{aligned}
& [A_e]\{X_{J-2}\} + [B_e]\{X_{J-1}\} + [C_e]\{X_J\} + [D_e]\{X_{J+1}\} \\
& + [E_e]\{X_{J+2}\} = \{P_J\} \\
& [A_i]\{X_{J-2}\} + [B_i]\{X_{J-1}\} + [C_i]\{X_J\} + [D_i]\{X_{J+1}\} \\
& + [E_i]\{X_{J+2}\} = \{P_i\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

여기서, $\{X\}$ 는 반경방향과 접선방향의 변위를, $\{P\}$ 는 하중벡터를 나타내는 행렬이다. $[A_e] \sim [E_e]$ 는 두 개의 자유도를 나타내는 2×2 의 행렬이며, 식 (3.12)는 요소의 내부점을 나타내는 행렬이 된다. 요소의 경계조건이 2번 고정, 2번 자유인 경우에는 전체 요소의 절점수를 $KI \times KJ$ 라고 한다면, 고정경계에 대한 방정식 수를 생략 할 수 있으므로 방정식의 개수는 $2 \times KI \times K(J-2)$ 개가 된다. 이렇게 구성한 각각의 행렬식들을 전체 행렬에 배열하면 식 (3.13)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[S] \cdot [X] = [P] \quad (3.13)$$

여기서,

$$[S] = \left[\begin{array}{cccccc} C_e & D_e & E_e & & & \\ B_e & C_i & D_i & E_i & & \\ A_i & B_i & C_i & D_i & E_i & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & A_i & B_i & C_i & D_i & E_i \\ & & & & & & & & & B_i & C_i & D_i & E_i \\ & & & & & & & & & & & & C_e & D_e & E_e \end{array} \right]_{(2 \times KI \times (KJ-2))^2}$$

$$[X] = \left[\begin{array}{c} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \vdots \\ X_{J-3} \\ X_{J-2} \\ X_{J-1} \end{array} \right]_{2 \times KI \times (KJ-2)} \quad [P] = \left[\begin{array}{c} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ \vdots \\ P_{J-3} \\ P_{J-2} \\ P_{J-1} \end{array} \right]_{2 \times KI \times (KJ-2)} \quad (3.14)$$

변위 $[X]$ 는 전체 행렬 $[S]$ 의 역행렬을 구함으로써 얻어질 수 있다. 식으로 표현하면 식 (3.15)과 같다.

$$[X] = [S]^{-1} \cdot [P] \quad (3.15)$$

식 (3.15)을 이용하여 반경방향의 변위 u_r 과 접선 방향의 변위 v_θ 를 구할 수 있다. 본 연구에서는 수치해석방법 중 Skyline Solver를 이용하여 역행렬을 구하였다. 여기서 구한 변위를 식 (2.1)에 대입하면 요소의 단면력 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ 를 구할 수 있게 된다.

4. 해석 예 및 결과 분석

4.1 해석 예 및 수렴도

그림 4.1은 적층곡선요소의 대칭적층결합구조를 그림으로 나타낸 것이다. 수치해석을 위한 곡선요소의 각층의 재료의 일반화한 역학적 성질은 $E_1/E_2=25, \nu_2=0.25, G_{12}/E_2=2.5$ 이다. 그리고 각각의 동일한 성질을 갖는 층이 한층 또는 여러 층으로 복합적층되었으며, 외부 경계조건은 2번 고정과 1번 자유인 경우와도 비교하였다. 또, 하중은 면내에 수평으로 작용하도록 하였으며 등분포하중이며 부분등분포하중이 작용하는 경우의 해석도 가능하다.

그림 4.2는 해석모델로서 자유경계에 외력을 가한 경우이다. 곡선요소는 반경 방향으로 두 경계선이 이루는 중심각은 θ 이고, 접선 방향의 내측 경계와 외측 경계가 원점으로부터의 길이가 1 : 1이다.

그림 4.3은 유한차분법을 이용하여, 절점수 변화에 따른 외력이 가해지는 자유경계에서의 면내중앙처집값의 수렴 정도를 나타낸 것이다. 여기서 요소의 화이버 보강 각도는 0/90/90/0인 경우이다. 그림 4.3에서 45×45를 수렴하는 값으로 보았

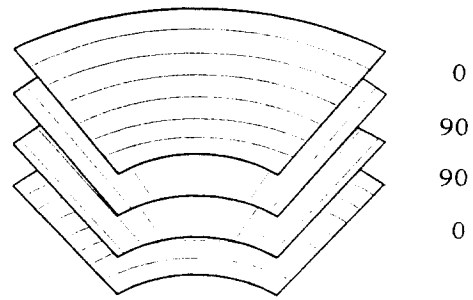


그림 4.1 복합적층결합구조

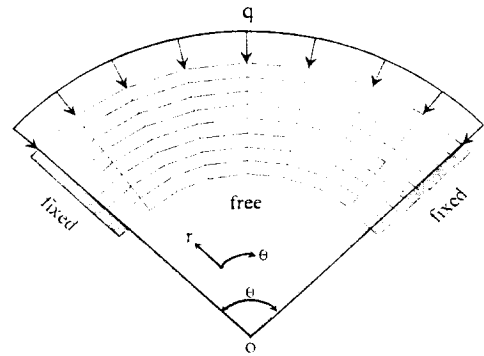


그림 4.2 해석 모델

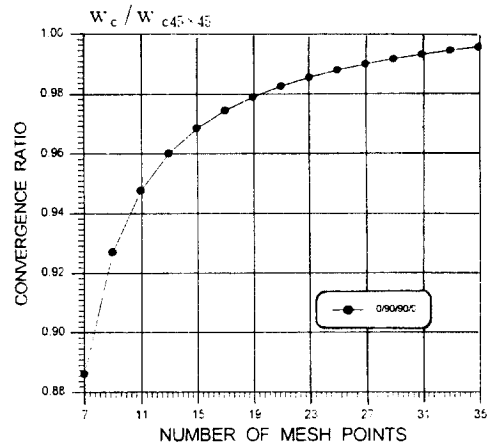


그림 4.3 절점 수에 따른 수렴도

을 경우, 요소의 절점수에 따른 정확도를 나타낸 것이다. 그림 4.3에서 수렴값을 1.0으로 보았을 경우, 절점수를 7×7로 나누었을 때, 이미 88%이상으로 수렴하며 35×35일 때는 99%이상으로 수렴

함을 알 수 있다. 표 4.1은 절점수에 따른 외력이 가해지는 절점에서의 중앙처짐의 무차원값과 수렴값과의 정확도를 도표화한 것이다.

표 4.1 절점수에 따른 처짐값 $u_c E_2^3 10^2 / qa^4$

절점수	중앙처짐값	정확도(%)
7×7	0.025911191	88.61
9×9	0.027107426	92.70
11×11	0.027714622	94.78
13×13	0.028077614	96.02
15×15	0.028320158	96.85
17×17	0.028495039	97.45
19×19	0.028627972	97.91
21×21	0.028732903	98.26
23×23	0.028818082	98.55
25×25	0.028888739	98.79
27×27	0.028948372	98.99
29×29	0.028999424	99.17
31×31	0.029043656	99.32
33×33	0.029082376	99.45
35×35	0.029116575	99.57
45×45	0.029241580	-

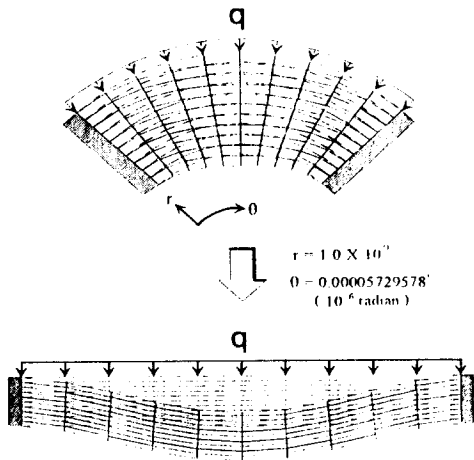


그림 4.4 곡선요소에서 사각형 요소로의 변환

4.2 Deep Beam과의 처짐 비교

본 연구의 해석모델은 평면응력 및 변형문제가므로 보의 처짐과 비교가 가능하다. 만약, 곡선 요소의 곡률반경을 거의 무한대로 놓고 각도를 아주 작게 놓을 경우 본 연구의 곡선요소는 사각형요소

로 볼 수 있다. 그림 4.4는 곡선요소를 사각형요소로 나타낸 것이다. 그림 4.4와 같이 곡선 요소의 원점에서부터 내측경계까지의 반경을 1.0×10^3 으로 놓고, 각도를 $0.0005729578^\circ (10^{-6} \text{ 라디안})$ 로 놓았을 때부터 곡선 요소는 사각형 요소로 대체된다. 이렇게 이루어지는 사각형 요소는 사각형보라 할 수 있으며 폭과 길이의 비가 1 : 10으로 Timoshenko Beam, 즉, 전단변형에 의한 처짐을 고려한 보(Deep Beam)가 된다. 그림 4.5는 곡선요소를 사각형 요소로 변화시킨 다음 전단 변형을 고려한 보와의 처짐을 비교한 것이다. 요소의 일방향과 이방향 탄성계수를 일치시켜 등방성으로 하고, 물성을 동일시하였을 때, 요소의 평면응력 및 변형은 보의 응력 및 변형과 일치하기 때문에 검증을 위한 비교가 가능하다. 위의 검증에서 본 연구 프로그램으로 사각형보의 처짐 해석이 가능함을 알 수 있다. 그림 4.5는 45×45 의 절점으로 비교한 것이고, 그림 4.6은 요소의 중앙 처짐과 절점수에 따른 사각형보의 중앙 처짐과의 수렴 정도를 확인하기 위하여 그림으로 비교하여 나타낸 것이다. 또한, 표 4.2는 그림 4.6의 요소의 중앙처짐값과 사각형 보의 처짐과의 수렴 정도를 표로 나타낸 것이다. 그림 4.6에서 보는 바와 같이 요소의 절점수가 증가할 수록 요소의 중앙 처짐은 사각형보의

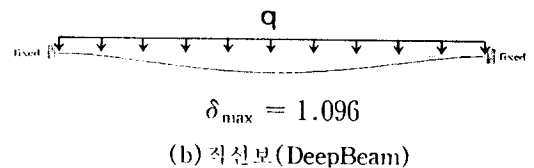
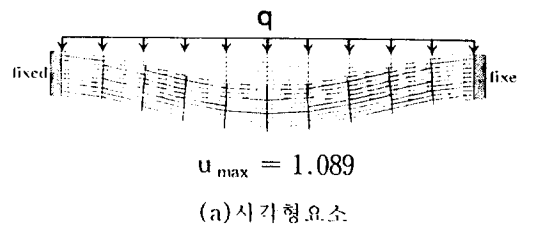


그림 4.5 직선보와의 처짐 비교

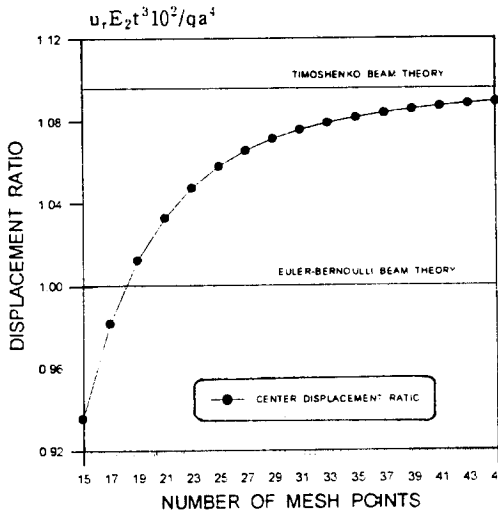


그림 4.6 절점수에 따른 Deep Beam과의 처짐 비교

표 4.2 절점수에 따른 중앙처짐($u_c E_2 t^3 10^2 / qa^4$)

절점 수	중앙 최대 처짐값	정확도(%)
15×15	0.9355779	85.36
17×17	0.9817435	89.57
19×19	1.0122831	92.36
21×21	1.0330609	94.26
23×23	1.0475967	95.62
25×25	1.0580320	96.53
27×27	1.0657008	97.23
29×29	1.0714557	97.76
31×31	1.0758556	98.16
33×33	1.0792760	98.47
35×35	1.0819749	98.72
37×37	1.0841331	98.92
39×39	1.0858798	99.08
41×41	1.0873089	99.21
43×43	1.0884898	99.31
45×45	1.0894744	99.40
TIMOSHENKO BEAM THEORY	1.096	100.00

중앙 최대처짐의 정해에 수렴한다는 것을 알 수 있다. 전단 변형으로 인한 중앙처짐의 영향은 약 9.6%이며, 19×19 일 때부터 전단에 의한 처짐이 고려되는 경향을 나타내었다. 표 4.2에서 보면, 전단 변형을 고려한 직선 보의 중앙 처짐과 31×31 이상부터는 98%이상 수렴하는 것으로 나타났다.

4.3 직교하는 방향으로의 화이버 보강각도의 변화에 따른 처짐 비교

일반적으로 구조 재료는 화이버의 보강 방향이 구조축과 직교하는 방향으로 이방성인 경우가 많이 사용되고 있다. 그림 4.7에서와 같이 직교하는 방향으로 보강한 경우의 면내처짐은 0/90/90/0 또는, 90/0/0/90일 때 가장 작게 나타났으며 그 다음으로 45/45/45/45 일 때 처짐이 작게 나타났다. 또한, 30/-60/-60/30 인 경우와 60/-30/-30/60인 경우는 중앙점을 기준으로 대칭으로 나타났다. 여기서 t 는 요소의 두께, a 는 원점에서 내측 반경까지의 거리를 나타낸다.

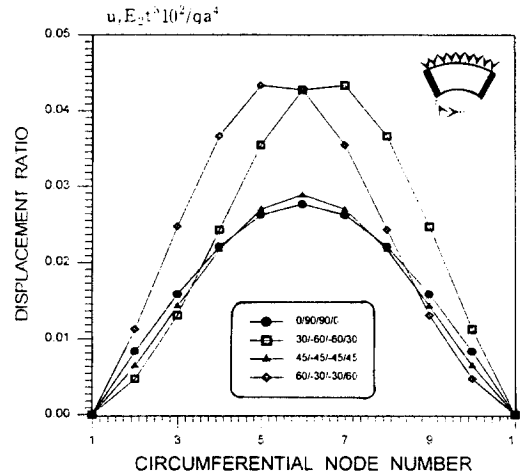


그림 4.7 직교하는 방향으로 보강한 경우의 무차원 면내중앙처짐(11×11)

4.4 경계조건에 따른 처짐 비교

본 연구에서는 2변 고정, 2변 자유경계인 경우와 1변 자유 3변 고정 경계에 대하여 처짐을 비교 분석하였다. 직교이방성, 즉 0/90/90/0로 보강한 경우에 대하여, 19×19의 절점수로 두 가지 경계 조건에 대한 요소 전체적인 처짐 형상 나타낸 것이 그림 4.8이다. 그림 4.9에서 보는 바와 같이 2변 고정, 2변 자유인 경우의 전체 처짐값이 3변 고

정 1변 자유인 경우보다 크다는 것을 알 수 있다. 또한 2변 고정, 2변 자유인 경우 절점수가 증가함에 따라서 일정한 비율로 처짐이 감소하다가 마지막 절점에서는 거의 처짐이 동일하게 나타난 것에 반하여 3변 고정 1변 자유인 경우는 마지막 절점까지 일정한 비율로 처짐이 감소하는 것으로 나타났다. 2변 고정, 2변 자유인 요소의 중앙처짐이 3변 고정 1변 자유인 요소의 중앙 처짐보다 약 3배 정도 크게 나옴을 알 수 있다.

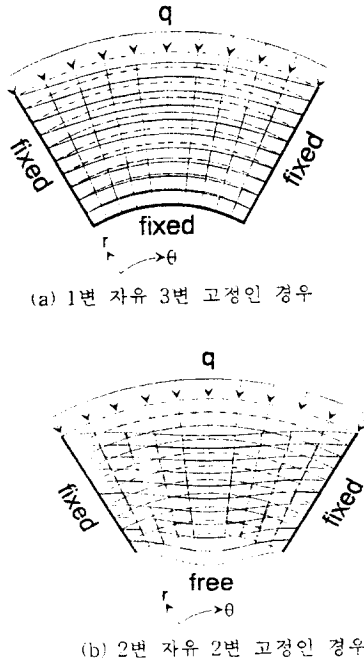


그림 4.8 경계조건에 따른 요소 전체의 처짐형상

4.5 요소의 반경길이 변화와 중심각 변화에 따른 처짐 비교

곡선 요소의 해석에 있어 요소의 역학적 성질의 변화도 요소의 거동에 많은 영향을 준다. 여기서는 요소의 역학적 성질들을 다양하게 변화시켰을 때의 처짐을 화이버로 각도 보강을 한 경우와 보강하지 않은 경우에 대하여 비교하였다. 요소의 반경의 변화에 따른 분석, 그리고 요소의 중심각

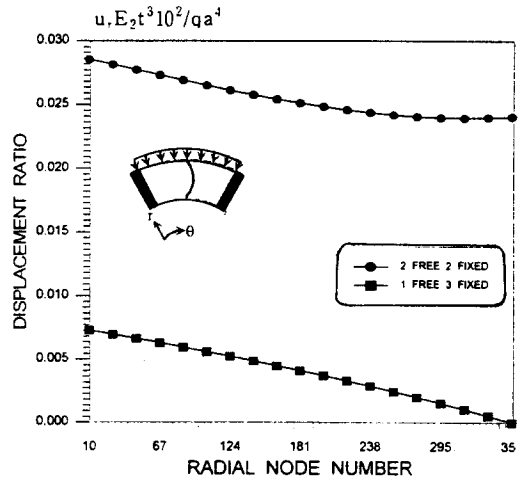


그림 4.9 경계조건에 따른 반경방향의 중앙 처짐값(21×21)

을 변화시켰을 때의 면내처짐분석을 하였다. 먼저, 곡선 요소의 접선 방향의 내측 경계와 외측 경계의 원점으로부터의 길이의 비를 변화시켰을 때 나타나는 중앙 처짐 값을 비교하였다. 여기서 외측 경계의 원점으로부터의 반경은 일정하게 두고, 접선 방향의 내측 경계의 원점으로부터의 반경을 변화시켰을 경우에 관하여 분석하였다. 요소의 중심각은 45°로 하였으며, E_1/E_2 의 값이 25, G_{12}/E_2 의 값이 2.5인 경우에 관하여, 임의의 각도로 보강된 경우이다. 또, 요소는 한 층으로 적층시켰으며 0°, 30°, 60°, 90°로 각각 보강하였을 경우, 외력이 가해지는 자유 경계에서의 최대 처짐 값들을 비교하였다. 그림 4.10에서와 같이 요소의 외측 경계에서부터 원점까지의 길이를 R_1 이라 하고, 내측경계에서부터 원점까지의 길이를 R_2 라고 하였을 경우, 그림의 수평축은 R_1 의 길이를 10으로 일정하게 놓았을 때의 R_2 의 길이의 변화를 나타낸 것이다. 그림 4.10에서, R_2 의 길이가 변화함에 따라서 처짐은 감소하는 것으로 나타났다. 화이버를 보강하지 않았을 경우, 보강하였을 경우보다 처짐이 크게 나왔으며, R_1 에 비하여 R_2 의 길이가 상대적으로 적어 얇은 경우 그 차이가 큼을 알 수 있다. 각도를 보강함에 따라서 처짐은 일정한 비율로 줄어들며,

30°~90° 사이에 처짐의 차이는 크지 않았다. 처짐 값은 R_1 과 R_2 의 비율이 같은 경우부터 거의 일정하게 나타났다. 그러므로 곡선 요소의 내측길이가 짧은 경우가 상대적으로 긴 경우보다 화이버로 보강하는 것이 유리하다는 것을 알 수 있다.

요소의 반경방향의 길이는 일정하게 두고, 접선 방향의 중심각을 변화시켰을때의 자유경계에서의 최대처짐을 비교하였다. 요소의 각도를 30°~150° 까지 15° 간격으로 변화시키고, 0/90/90/0로 적층시켰을때, 요소의 반경 방향으로의 중앙 처짐

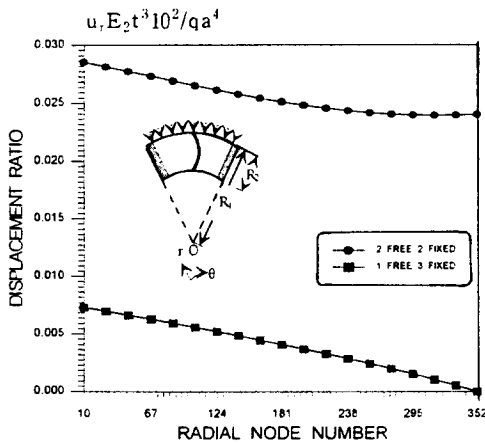


그림 4.10 요소의 반경 길이 변화에 따른 처짐의 비교

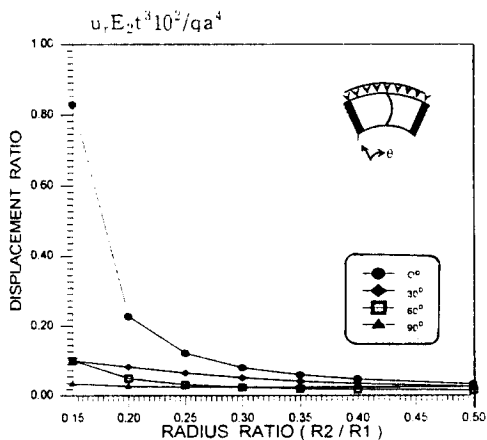


그림 4.11 요소의 각도 변화에 따른 반경방향의 처짐 비교 (11×11)

을 비교하였으며, 그림 4.11와 같다.

그림 4.11에서 요소의 각도를 증가시킬수록 처짐은 일정한 비율로 증가하는 것으로 나타났다. 처짐값은 요소의 각도가 30° 씩 증가할수록 1/2로 일정하게 줄어서 약 0.04에서 일정하게 수렴하였다. 표 4.3은 각도 변화에 따른 중앙처짐값을 나타낸 것이다.

극 좌표계를 이용한 곡선 요소는 요소의 각도 변화에 따라서 처짐에 많은 영향을 준다는 것을 알 수 있다. 본 연구의 결과에 의하면, 곡선 요소의 각도는 화이버의 보강 각도와도 밀접한 관계가 있어 적층시켰을 경우, 요소의 각도에 따른 보강 각도를 고려해야만 한다. 또한 곡선 요소를 임의의 각도로 보강하여 적층시키는 경우, 보강하지 않았을 경우보다 특히 전단탄성계수에 의한 처짐에 유리함을 알 수 있다.

표 4.3 요소의 각도 변화에 따른 처짐값

요소의 각도	자유경계에서의 중앙 처짐
30°	0.015598947
45°	0.022778339
60°	0.027714622
75°	0.030957928
90°	0.033133381
105°	0.034644028
120°	0.035716897
135°	0.036472631
150°	0.036971686

4.6 단면력의 분석

요소를 직교하는 방향으로 보강한 경우, 즉 0/90/90/0, 30/-60/-60/30, 45/-45/-45/45, 경우에 대한 것과 화이버 보강을 하지 않은 0/0/0/0 경우에 대한 단면력 N ,을 각각 비교하였다. 그림 4.12는 직교하는 방향으로 보강한 경우에 대하여 요소의 내부 절점에서의 단면력 N ,을 외력이 가해지는 자유경계에서 반경 방향으로 나타낸 것이다. 그림 4.12에서 보는 바와 같이 화이버 각도로 보강한 경우와 그렇지 않은 경우, 외력이 가해지는 부분에서는 각도로 보강하는 경우가 더 큰 단면력을

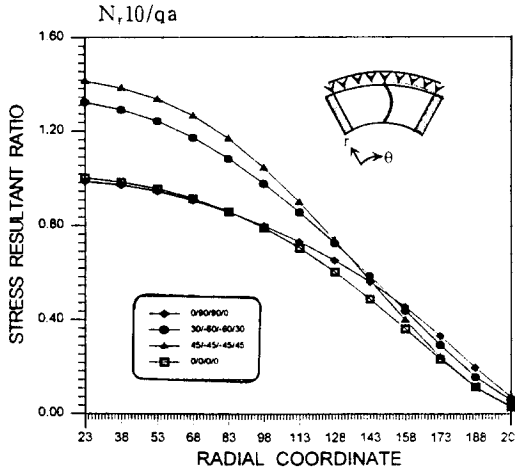


그림 4.12 직교하는 방향으로 보강한 경우의 단면력(N_r)

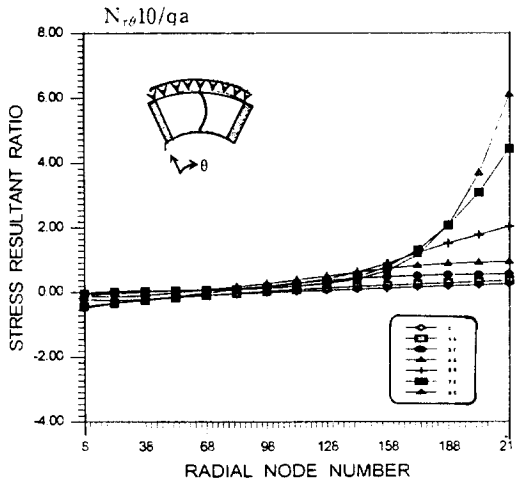


그림 4.13 한층으로 보강한 경우 각도에 따른 반경방향으로의 최대단면력(N_r)

갖게 되지만, 절점수가 증가함에 따라서 대응하는 자유 경계에서는 단면력의 차이가 거의 없음을 알 수 있다.

그리고, 곡선요소를 하나의 층으로 각도 보강한 경우에 관한 단면력 N_r 에 관하여 분석하였다. 보강 방향은 $0^\circ \sim 90^\circ$ 로 점차 변화시켰으며, 그림 4.13은 내부 절점에서의 단면력 N_r 을 반경방향으로 중앙에서의 최대 단면력으로 나타낸 것이다.

그림 4.13과 같이 $0^\circ \sim 90^\circ$ 로 한층으로 보강하는 경우, 단면력 N_r 은 전체적으로 큰 차이는 없이 비슷한 경향으로 요소의 내부로 갈수록 단면력이 조금씩 증가하는 것을 알 수 있다. 외력이 가해지는 자유 경계에서의 단면력은 0° 일때가 가장 크며 90° 일때가 가장 작은 것으로 나타났다. 그러나 절점의 수가 증가할수록 90° 일때의 단면력이 점차 증가하여 대응하는 자유경계에서는 가장 크게 나타났으며 0° 일때가 가장 작게 나타났다.

다음으로, 한 층으로 된 요소에 대하여 반경 길이 변화에 따른 단면력을 분석하였다. 원점으로부터 요소의 외측 경계까지의 반경을 일정하게 두고, 원점으로부터 내측 경계까지의 반경을 일정한 비율로 변화시켰을 때 나타나는 단면력의 형상을 임의의 각도 변화에 따라서 비교하였다. 그림 4.14은 R_1 의 길이를 일정하게 두고 R_2 의 길이를 변화시켰을 때의 단면력 N_r 을 나타낸 것이다. 여기서 단면력 N_r 은 한층으로 된 경우에 대하여, 화이버 보강 방향에 따라서 외력이 가해지는 자유 경계의 중앙 최대값이다.

그림 4.14에서 단면력 N_r 은 반경길이의 비율이 증가함에 따라서 일정한 비율로 감소한다는 것을 알 수 있다. 또한, 곡선 요소의 중심각을 60° 로 하였을 경우, 화이버 보강을 하지 않은 경우가 보강한 보다 단면력이 작게 나왔다. 그리고 90° 로 보강한 경우가 가장 적은 단면력을 나타내었으며, 90° 로 보강한 경우는 내측 반경의 길이변화에 따라 단면력은 거의 일정함을 알 수 있다.

그림 4.15는 직교 이방성(0/90/90/0)으로 보강한 경우에 대하여, 요소의 내측 반경 길이 변화에 따른 단면력 N_r 을 R_1 과 R_2 의 변화에 따라서 나타낸 것이다. 그림 4.15에서, 요소의 원점에서부터의 내측 반경의 길이를 크게 함에 따라서 단면력 N_r 은 일정한 비율로 줄어드는 것으로 나타났다.

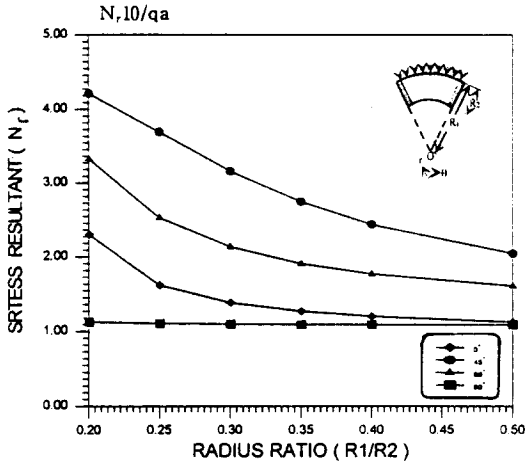


그림 4.14 반경 길이 변화에 따른 단면력 N_r .

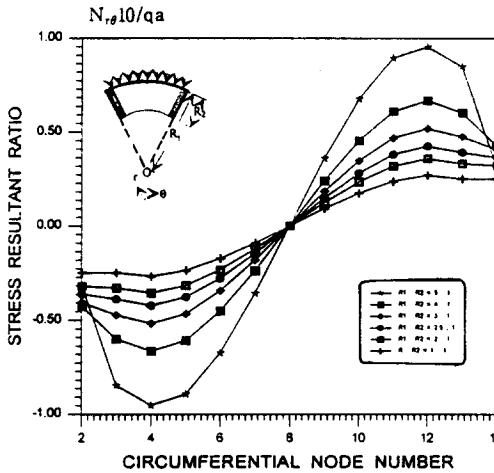


그림 4.15 내측 반경 길이 변화에 따른 자유경계에서의 단면력 N_r .

5. 결 론

본 연구에서는 복합적층곡선요소의 면내 거동을 Δ^2 및 Δ^4 의 오차를 갖는 유한 차분식을 사용하여 처짐 및 단면력을 해석하였다. 유한 차분식을 사용하여 해석할 경우, 경계조건에 관한 처리가 매우 중요하다. 특히 자유 경계를 갖는 경우에는 자유경계에서 기존의 전진 또는 후진 차분식만을 사용해서는 안되며 중앙차분식을 이용하여 자유

경계점에서의 가상점을 내부점으로 치환시키면서 외력과 내력이 평형을 이루는 새로운 차분계수를 유도해야만 한다.

본 연구의 해석을 위해 도입한 유한 차분법에서 요소의 내부점 및 경계점의 수평축방향으로는 Δ^4 의 오차를 갖는 차분식을 사용함으로써 정밀도를 더욱 높였다. 결과에 의하면 7×7 의 절점에서 이미 88%이상의 수렴을 보였으며 고정단의 처짐 형상도 더욱 정확하게 나타남을 알 수 있다.

본 연구의 프로그램은 사각형 요소의 2차원 해석과 전단 변형을 고려한 두꺼운 보(Timoshenko Beam)의 해석이 가능하다. 곡선 요소의 반경을 아주 크게 잡고, 중심각을 아주 작게 놓았을 경우, 사각형 요소의 해석에 이용할 수 있다. 또, 요소의 성질을 등방성으로 하면 전단 변형을 고려한 두꺼운 보의 처짐 해석이 가능하다. 전단 변형에 의하여 9.6%의 처짐이 증가되었으며 23×23 의 절점에서 약 96% 수렴하였다. 직교하는 방향으로 보강한 경우는 요소의 중심각의 변화에 매우 다양한 처짐을 보였다. 요소의 내부로 갈수록 처짐은 감소하게 되며 $0/90/90/0$ 인 경우는 처짐의 감소 비율이 $30/-60/-60/30$ 이나 $45/-45/-45/45$ 에 비하여 작게 나타나 우수한 강성을 나타내었다. 경계조건에 관한 분석에서는 2번 자유 2번 고정 경계인 경우가 1번 자유 3번 고정 경계인 경우보다 반경 방향으로 약 3배정도 처짐이 크게 나타났다. 곡선 요소의 외측반경(R_1)과 요소의 내측으로부터 외측까지의 길이(R_2)의 비의 변화에 따른 해석에서 90° 로 보강하는 경우가 가장 작은 처짐을 나타냈으며, 길이 비의 변화에 대해서도 일정한 처짐값을 보였다. 특히 R_2 의 길이가 R_1 에 비하여 상대적으로 짧은 경우 화이버로 보강하는 것이 보강하지 않은 경우보다 유리하다는 것을 알 수 있었다. 요소의 중심각의 변화와 화이버 각도의 관계는 강성에 상당한 영향을 주므로 요소의 중심각과 화이버 보강 단면력은 화이버 보강 방향과 요소의 역학적 성질 변화에 따른 요소의 처짐과 같은 양상의 변위를 나타내었다. 극좌표계를 이용한

면내 하중을 받는 구조물이 높은 강성을 갖기 위하여 직교 이방성 또는 그와 유사한 방향으로 복합 재료를 배치하는 것이 유리하지만, 곡선 요소의 내측 및 외측 반경 길이의 비율과 중심각의 변화에 따라서 재료의 배치를 고려하는 것이 공학적으로 더욱 합리적이고 경제적인 설계가 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] 장석윤, 이원홍, “전단 변형을 고려한 주변 고정 비등방성 대칭 적층 곡선판의 해석,” 한국강구조학 회 논문집, 제4권 제1호(1992), PP 143-154
- [2] L.R. Calcote., “The Analysis of Laminated Composite Structures,” Van Nostrand Reinhold Company, 1969, pp7-71
- [3] R.M. Jones., “Mechanics of Composite Materials,” Scripta Book Company, 1973, pp 36-47, pp147-172
- [4] J.R. Vinson., and T.W. Chow., “Composite Materials and Their Use in Structures,” Applied Science Pulishers Ltd, London, 1975
- [5] R. Szilard., “Theory and Analysis of Plates,” Prentise-Hall, Inc. 1974
- [6] Timoshenko Stephen P., and S. Woinowsky-Krieger, “Theory of Plates and shells,” 2nd. ed., McGraw-Hill, 1961, pp 318-324
- [7] J.N. Reddy., “Energy and Variational Method in Applied Mechnics,” John Willy & Sons, 1984, pp354-427
- [8] S.W. Tsai., “Composite Design,” Think Composite, 1988, SEC24
- [9] J.M. Whitney., “The Effect of Transverse Shear Deformation on Bending of Laminated Plates,” J. Composite Materials, Vol.3, 1969
- [10] N.J. Pagano., “Exact Solution for Composite Laminated in Cylindrical Bending,” J. Composite Materials, July, 1969
- [11] J.E. Ashton., “Approximate Solutions for Unsymmetrically Laminated Plates,” J. Composite Materials, Vol.3, 1969
- [12] J.M. Whitney., “Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates,” Technomic Publishing Co., Inc., 1987, pp17-85
- [13] J.N. Reddy., “Practical Analysis of Composite Laminates,” CRC Press, 1995, pp1-140
- [14] D. Hull., “An Introduction to Composite Materials,” Cambridge Univ. Press, 1992, pp102-197
- [15] R.M. Christensen., “Mechanics of Composite Materials,” Krieger Pub. Company, 1991, pp152-223