

회전관성 및 전단변형이 변화곡률 아치의 고유진동수에 미치는 영향

Effects of Rotatory Inertia and Shear Deformation on Natural Frequencies of Arches with Variable Curvature

오 상 진¹⁾ · 이 병 구²⁾ · 이 인 원³⁾
Oh, Sang Jin Lee, Byoung Koo Lee, In Won

요 약 : 이 논문에서는 회전관성과 전단변형이 변화곡률 아치의 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다. 임의의 변화곡률을 갖는 등단면 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 유도된 미분방정식에 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 포물선, 원호 및 타원 아치를 적용하여 수치해석하였다. 해석결과로서 무차원 변수인 아치높이 지간길이비 및 세장비 변화에 따른 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

ABSTRACT : The main purpose of this paper is to investigate the effects of rotatory inertia and shear deformation on the natural frequencies of arches with variable curvature. The differential equations are derived for the in-plane free vibration of linearly elastic arches of uniform stiffness and constant mass per unit length. The governing equations are solved numerically for parabolic, circular and elliptic geometries with hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints. For each cases, the four lowest frequency parameters are presented as functions of the two dimensionless system parameters: the arch rise to span length ratio, and the slenderness ratio.

핵 심 용 어 : 아치, 변화곡률, 자유진동, 회전관성, 전단변형, 고유진동수, 진동형

KEYWORDS : arch, variable curvature, free vibration, rotatory inertia, shear deformation, natural frequency, mode shape

1) 한국과학기술원 토목공학과, 박사후 연수과정
2) 원광대학교 토목환경공학과, 교수
3) 한국과학기술원 토목공학과, 교수

본 논문에 대한 토의를 1998년 5월 31일까지 학회로 보내
주시면 토의회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

아치는 구조적으로 매우 이상적이며 미관이 아름답기 때문에 각종 구조공학 관련분야에서 보, 기둥, 평판 등과 함께 단위구조로 이용되고 있다. 일반적으로 아치는 진동에 대한 강성이 큰 구조로 알려져 왔으나, 하중계가 다양화됨에 따라 동적거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요구되고 있다. 구조물의 고유한 성질 중의 하나인 자유진동 특성은 동하중이 작용하는 구조물의 동적응답 해석시 매우 중요한 변수이며, 구조물의 설계과정 또는 공용중인 구조물의 안정성 평가 등에서도 중요한 평가지수로 이용되고 있다. 따라서 대상구조의 자유진동 특성을 파악하는 것은 진동공학 분야에서 가장 먼저 선행되어야 할 연구과제 중의 하나이다.

1928년 Den Hartog⁽¹⁾가 등단면 원호아치의 자유진동에 관한 논문을 발표한 이래 많은 연구자에 의해 아치의 자유진동에 관한 연구가 이루어져 왔다. Wolf⁽²⁾, Veletsos 등⁽³⁾, Issa 등⁽⁴⁾, Maurizi 등⁽⁵⁾, 이 등⁽⁶⁾, Chidamparam 등⁽⁷⁾은 원호아치, Volterra 등⁽⁸⁾, Romanelli 등⁽⁹⁾, Gutierrez 등⁽¹⁰⁾, Lee 등⁽¹¹⁾, 오⁽¹²⁾는 변화곡률 아치의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다. 이 연구결과들은 회전관성 및 전단변형을 고려하지 않은 해석모형에 대한 결과이다. 그러나 구조물의 자유진동 해석시 세장비가 작은 경우 또는 고차의 자유진동모드까지 정확한 해를 결정하기 위해서는 회전관성 및 전단변형을 고려한 해석모형을 채용해야만 한다.

아치의 자유진동에 관한 연구에서 회전관성 및 전단변형을 고려한 연구로서는 Austin 등⁽¹³⁾, Irie 등⁽¹⁴⁾, Sakiyama⁽¹⁵⁾, Kang 등⁽¹⁶⁾, Kawakami 등⁽¹⁷⁾의 연구들 들 수 있지만, 문헌 [15]를 제외하고는 비교적 이론전개가 용이한 원호아치를 대상으로 하고 있다.

이에 본 연구에서는 회전관성과 전단변형이 변화곡률 아치의 자유진동에 미치는 영향을 분석하

는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 진동시 아치 미소요소에 작용하는 합용력과 관성력의 동적평형 방정식을 이용하여 임의의 변화곡률을 갖는 등단면 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 유도된 미분방정식에 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 포물선, 원호 및 타원 아치를 적용하여 수치해석하였다.

2. 수학적 모형

그림 1(a)는 (x, y) 평면 위에 놓인 변화곡률을 갖는 아치의 기하학적 형상을 나타낸 것이다. 이 그림에서 l 과 h 는 각각 아치의 지간길이 및 높이이며, ρ 와 ϕ 는 각각 아치축상 임의점에서의 곡률반경 및 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도를 의미한다. 또한 w , v 및 θ 는 각각 진동시 아치축상 임의점에서의 곡률중심방향, 접선방향변위 및 단면회전각을 나타낸다.

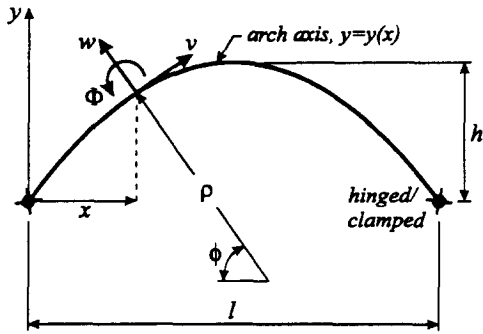
아치가 면내에서 진동하면 이들 변위에 의해 부재단면에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨모멘트 M 의 합용력이 발생하게 된다. 또한 질량을 가지고 있는 부재가 진동하므로써 부재미소요소에는 곡률중심방향 관성력 P_r , 접선방향관성력 P_t 및 회전관성우력 T 가 발생하게 된다. 그림 1(b)는 아치미소요소에 발생하는 이들 합용력과 관성력을 나타낸 것으로 이 힘들의 동적평형방정식을 세우면 다음 (1)~(3)식과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi} + Q + \rho P_t = 0 \quad (1)$$

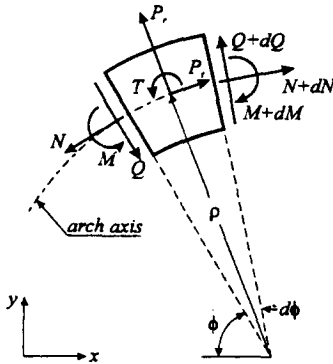
$$\frac{dQ}{d\phi} - N + \rho P_r = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - Q - T = 0 \quad (3)$$

전단변형을 고려하는 경우 부재의 단면회전각 θ 는 다음 (4)식과 같이 순수 휨에 의한 단면회



(a) 변화곡물 아치



(b) 아치미소요소에 발생하는 힘

그림 1. 변화곡물 아치 및 아치미소요소에 발생하는 힘

전각 ϕ 와 전단변형률 β 의 합으로 표현된다.

$$\phi = \psi + \beta \quad (4)$$

또한 단면회전각 ϕ 는 다음 (5)식과 같이 곡물중심방향 및 접선방향 변위의 항으로 나타낼 수 있다⁽¹⁸⁾.

$$\phi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (5)$$

따라서 β 는 다음과 같다.

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{dw}{d\phi} - v - \rho\psi \right) \quad (6)$$

부재단면에 발생하는 휨모멘트 M 및 축방향력 N 은 다음 (7)식 및 (8)식과 같고⁽¹⁹⁾,

$$M = -\frac{EI}{\rho} \frac{d\psi}{d\phi} \quad (7)$$

$$N = \frac{EA}{\rho} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) + \frac{EI}{\rho^2} \frac{d\psi}{d\phi} \quad (8)$$

전단력 Q 는 다음 (9)식과 같다.

$$Q = kAG\beta = \frac{kAG}{\rho} \left(\frac{dw}{d\phi} - v - \rho\psi \right) \quad (9)$$

위의 식들에서 E 와 G 는 각각 탄성계수 및 전단탄성계수, A 와 I 는 각각 단면적 및 단면2차모멘트이다. 그리고 (9)식에서 k 는 단면형상에 따른 상수로서 구형단면인 경우 0.833, 원형단면인 경우 0.9이고, I형 단면 또는 박스형 단면인 경우에는 웨브단면적과 전체단면적의 비이다⁽²⁰⁾.

아치가 조화진동을 한다고 가정하면 아치미소요소에 발생하는 단위길이당 관성력 및 회전관성우력은 다음 (10)~(12)식과 같이 구할 수 있다.

$$P_r = \gamma A \omega_i^2 w \quad (10)$$

$$P_t = \gamma A \omega_i^2 v \quad (11)$$

$$T = \gamma I \omega_i^2 \psi \quad (12)$$

위의 식들에서 γ 는 재료의 단위체적당 질량, ω_i 는 고유각진동수(rad/sec), i 는 모드번호이다.

지배방정식을 무차원형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$f = h/l, \quad s = l/\sqrt{I/A}, \quad \mu = kG/E \quad (13-15)$$

$$\delta = w/l, \quad \lambda = v/l \quad (16,17)$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (18-20)$$

$$C_i = \omega_i s l \sqrt{\gamma/E}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

(13)~(15)식의 f , s 및 μ 는 각각 아치높이 지간길이비(rise to span length ratio), 세장비(slenderness ratio)와 전단계수(shear parameter)이며, (21)식의 C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

(2)식에 (8)~(10)식, (1)식에 (8)식, (9)식과 (11)식, (3)식에 (7)식, (9)식과 (12)식을 대입하고, 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 각각 다음 (22)~(24)식의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{d\phi^2} &= \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \frac{d\delta}{d\phi} + \frac{1 - \xi^2 s^{-2} C_i^2}{\mu} \delta \\ &+ \frac{\mu + 1}{\mu} \frac{d\lambda}{d\phi} - \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \lambda \\ &+ \left(\xi + \frac{1}{\mu \xi s^2} \right) \frac{d\psi}{d\phi} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{d\phi^2} &= \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \frac{d\lambda}{d\phi} + (\mu - \xi^2 s^{-2} C_i^2) \lambda \\ &- (1 + \mu) \frac{d\delta}{d\phi} + \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \delta - \frac{1}{\xi s^2} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} \\ &+ \frac{2}{\xi^2 s^2} \frac{d\xi}{d\phi} \frac{d\psi}{d\phi} + \mu \xi \psi \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} &= \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \frac{d\psi}{d\phi} + (\mu s^2 - s^{-2} C_i^2) \xi^2 \psi \\ &- \xi \mu s^2 \frac{d\delta}{d\phi} + \xi \mu s^2 \lambda \end{aligned} \quad (24)$$

이상에서 (22)~(24)식은 회전관성 및 전단변형을 고려한 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식이며, 이 식들에 $\xi = \text{상수}$ 및 $d\xi/d\phi = 0$ 을 대입하면 문헌 [4]의 원호아치에 대한 지배 미분방정식으로 변환됨을 알 수 있다. 그리고 이 식들에서 ξ 와 $d\xi/d\phi$ 는 아치의 선형에 따른 변화곡률계수로서 적용대상 선형이 주어지는 경우

다음과 같이 결정할 수 있다.

(x, y) 평면에서 $y = y(x)$ 의 선형을 갖는 아치의 무차원 선형식은 다음 (25)식과 같으며, 아치축상 임의점에서의 ϕ 및 ξ 는 (26)식 및 (27)식과 같이 ξ 만의 함수로서 나타낼 수 있다.

$$\eta = \eta(\xi) \quad (25)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad (26)$$

$$\xi = \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (27)$$

그리고 나머지 변화곡률계수 $d\xi/d\phi$ 는 (26)식과 (27)식의 미분값들을 이용하여 (28)식으로부터 결정할 수 있다.

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \frac{d\xi}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (28)$$

아치 단부조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 회전단인 경우 진동변위 w , v 및 휨모멘트 M 이 "0"이므로 (7)식과 전술한 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \lambda = 0, \quad d\psi/d\phi = 0 \quad (29-31)$$

그리고 고정단인 경우 진동변위 w , v 및 ψ 가 "0"이므로 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \lambda = 0, \quad \psi = 0 \quad (32-34)$$

3. 적용선형 : 포물선, 원호 및 타원

(x, y) 평면 위에 놓인 지간길이 l , 높이 h 를 갖는 포물선 아치의 일반적인 선형식은 다음과

같다.

$$y = -(4h/l^2)x(x-l), \quad 0 \leq x \leq l \quad (35)$$

(35)식을 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$n = -4f\xi(\xi-1), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (36)$$

(26)~(28)식과 (36)식을 이용하면 포물선 아치에 대한 ϕ , ξ 및 $d\xi/d\phi$ 를 다음 (37)~(39)식과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \pi/2 - \tan^{-1}[-4f(2\xi-1)] \quad (37)$$

$$\xi = 0.125f^{-1}[1 + 16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (38)$$

$$d\xi/d\phi = 1.5(2\xi-1)[1 + 16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (39)$$

그림 2(a)는 (x, y) 평면 위에서 좌단을 원점으로 하고, 지간길이 l , 반경 ρ 및 높이 h 를 갖는 원호아치를 나타낸 것으로 이의 무차원 선형식은 (40)식과 같다.

$$\eta = \xi \sin \phi + f - \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (40)$$

그림 2(b)는 (41)식과 같이 정의된 (X, Y) 좌표계의 타원상에서 좌단을 원점으로 정의된 지간길이 l 및 높이 h 인 타원 아치를 나타낸 것이다.

$$\frac{(X+L/2)^2}{(L/2)^2} + \frac{Y^2}{H^2} = 1 \quad (41)$$

이 그림에서 (X, Y) 좌표계와 (x, y) 좌표계사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$X = \epsilon l + x, \quad Y = H - h + y \quad (42, 43)$$

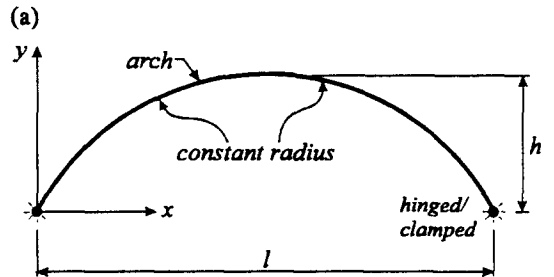
(41)~(43)식의 관계와 무차원 변수들을 이용하여 타원 아치의 선형식을 나타내면 다음 (44)식과 같다.

$$\eta = \frac{b_2}{b_1} [b_1^2 - (\xi - 1/2)^2]^{1/2} + f - b_2, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (44a)$$

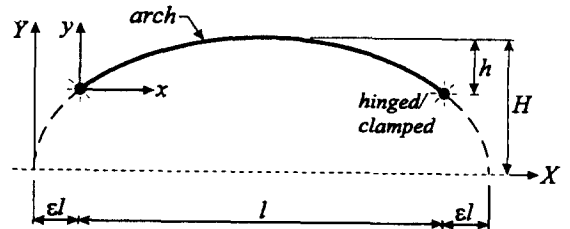
여기서,

$$b_1 = \frac{1+2\epsilon}{2}, \quad b_2 = \frac{f}{1 - \frac{2(\epsilon + \epsilon^2)^{1/2}}{1+2\epsilon}} \quad (44b, c)$$

(40)식, (44)식과 (26)~(28)식을 이용하면 원호 및 타원 아치에 대한 ϕ , ξ 및 $d\xi/d\phi$ 를 간단히 결정할 수 있다.



(a) 원호아치



(b) 타원아치

그림 2. 원호 및 타원아치

4. 해석방법 및 검증

이 논문에서는 지배미분방정식 (22)~(24)식으로부터 대상구조의 고유진동수를 산출하기 위하여 문헌 [11,12]에 수록된 해석방법을 이용하였으며, 이의 개략적인 내용은 다음과 같다. (22)~(24)식의 미분방정식에는 불확정량인 고유치 C_i 항이 포함되어 있으므로 먼저 이 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 좌단의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행한다. 가정한 C_i 값이 대상구조에 대한 고유치인지는 수치적분결과 얻어진 우단에서의 결과들이 경계조건을 만족하는지 여부로서 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용하였다.

본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학관련문제에서 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 고유치 C_i 를 찾기 위해서는 Regula-Falsi method를 이용하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 표 1에 유한요소법(ADINA)에 의한 결과와 비교하였다. 유한요소법에 의한 결과는 아치를 100개의 보요소로

표 1. 본 연구와 유한요소법(ADINA)에 의한 결과 비교

제 원	i	무차원 고유진동수, C_i	
		본 연구	ADINA
parabolic	1	21.83	21.81
hinged-hinged	2	56.00	55.80
$f=0.3, s=75$	3	102.3	101.7
$\mu=0.3$	4	113.4	113.4
circular	1	40.99	40.94
hinged-clamped	2	75.36	75.24
$f=0.15, s=100$	3	112.9	112.8
$\mu=0.3$	4	151.7	151.0
elliptic ($\epsilon=0.5$)	1	44.17	44.15
clamped-clamped	2	59.76	59.72
$f=0.05, s=120$	3	118.9	118.7
$\mu=0.3$	4	191.3	190.7

모형화하여 얻은 충분히 수렴된 결과이다. 이 표에서 본 연구결과와 유한요소법에 의한 해석결과는 잘 근접함을 알 수 있어 본 연구결과의 타당성을 검증할 수 있다.

5. 수치해석 예 및 고찰

그림 3~5는 각각 세장비 $s=75$ 인 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 포물선 아치의 아치높이 지간길이비에 따른 무차원 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 이 그림에서 실선과 일점쇄선은 회전관성과 전단변형을 고려한 경우로서 각각 전단계수 μ 가 0.1과 0.3인 경우이며, 점선은 회전관성과 전단변형을 무시한 경우로서 문헌 [12]의 결과를 이용한 것이다. 여기서 $\mu=0.1$ 은 개략적으로 강재로 이루어진 I형단면, $\mu=0.3$ 은 중실 구형단면임을 의미한다. 그리고 그림 3과 그림 5에서 □와 ○로 표시한 것은 진동형을 구분하기 위하여 사용한 기호로서 □표로서 연결된 것은 대칭진동형(symmetrical mode), ○표로 연결된 것은 역대칭진동형(anti-symmetrical mode)을 나타낸다. 한편 그림 4의 회전-고정 아치인 경우에는 단부조건의 비대칭성으로 진동형은 모두 비대칭진동형(unsymmetrical mode)이기 때문에 기호로서 구분하지 않았다.

그림 3과 그림 5에서 아치높이 지간길이비가 증가하는 경우 역대칭진동형의 고유진동수는 항상 감소하지만, 대칭진동형의 고유진동수는 증가와 감소 경향을 함께 나타냄을 알 수 있다. 그리고 회전관성 및 전단변형을 고려하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 감소하며, 전단계수 μ 가 작을수록 회전관성 및 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있다. 또한 진동형에 관계없이 고유진동수가 감소하는 구간에서는 회전관성 및 전단변형의 영향이 크고, 고유진동수가 증가하는 구간에서는 영향이 작음을 알 수 있다. 그림 3과 그림 5에서 대칭진동형과 역대칭진동형

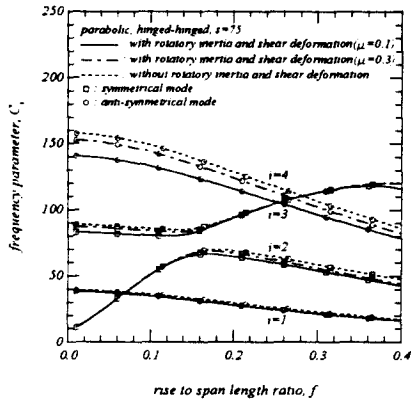


그림 3. f 와 C_i 의 관계(회전-회전)

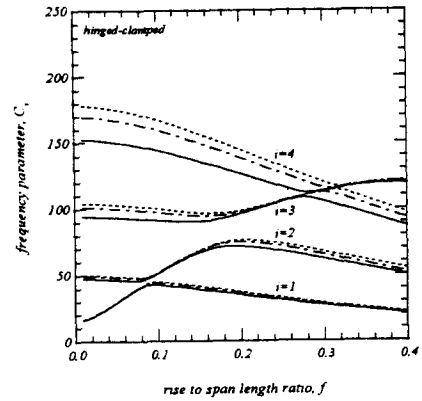


그림 4. f 와 C_i 의 관계(회전-고정)

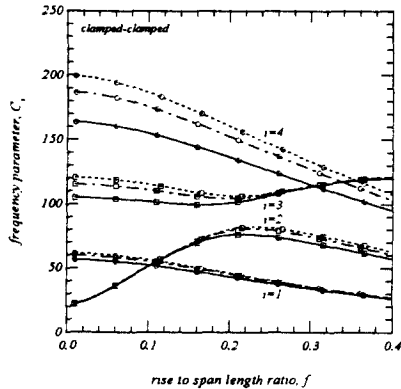


그림 5. f 와 C_i 의 관계(고정-고정)

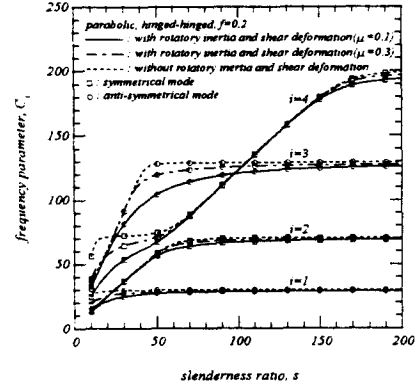


그림 6. s 와 C_i 의 관계(회전-회전)

의 고유진동수 곡선이 교차하는 지점을 발견할 수 있는데 이는 동일한 고유진동수에 대하여 2개의 진동모드 즉 대칭과 역대칭진동형이 존재함을 의미한다. 그리고 회전관성과 전단변형의 고려여부와 전단계수 μ 의 크기에 따라 고유진동수 곡선이 교차하는 지점 즉 아치높이 지간길이비가 달라짐을 알 수 있는데. 이는 중요한 의미를 갖는다. 예를 들어 그림 5의 $f=0.105$ 에서 회전관성 및 전단변형을 고려한 경우 ($\mu=0.1$)에는 역대칭진동형이 제1모드, 대칭진동형이 제2모드이지만, 회전관성 및 전단변형을 무시한 경우에는 대칭진동형이 제1모드, 역대칭진동형이 제2모드임을 알 수 있다. 이는 회전관성과 전단변형의 고려여부에 따라 진동형이 바뀔을 의미하며, $f=0.32$ 일 때 제3,

4모드에서도 이러한 변화가 있음을 알 수 있다. 한편 그림 4의 회전-고정 아치인 경우에도 비대칭진동형을 갖는다는 점만을 제외하고는 전반적으로 그림 3, 5와 동일한 경향을 보임을 알 수 있다.

그림 6~8은 각각 아치높이 지간길이비 $f=0.2$ 인 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 포물선 아치의 세장비에 따른 무차원 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 이 그림들에 사용된 기호 등의 내용은 그림 3~5와 같다.

이 그림들에서 세장비가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있으며, 일반적으로 세장비가 작을수록 회전관성 및 전단변형의 영향이 더 큼을 알 수 있다. 그리고 회전관성 및 전단변형을 고려하는 경우 고유진동수 곡선이

부드럽게 변화함을 알 수 있으며, 고유진동수가 가파르게 증가하다가 완만한 증가양상을 보이는 부근 즉 고유진동수 곡선이 볼록한 부근에서 회전관성 및 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있다.

한편 세장비가 일정값 이상이 되는 경우 회전관성과 전단변형의 고려여부에 관계없이 고유진동수 곡선은 모두 일정값으로 수렴해 감을 알 수 있어 세장비가 큰 구조인 경우에는 회전관성 및 전단변형의 영향이 작음을 알 수 있다. 또한 일정값으로 수렴하기 시작한 이후에는 고차모드일수록 회전관성 및 전단변형의 영향이 큼을 알 수 있다.

그림 9(a)~(c)는 각각 $f=0.2$, $s=50$ 인 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 포물선 아치의 진동형을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 실선은 회전관성과 전단변형을 고려한 경우 ($\mu=0.1$), 점선은 이들 영향을 고려하지 않은 경우 진동형을 나타낸 것이며, C_{α} 는 회전관성과 전단변형을 고려하지 않은 경우 무차원 고유진동수이다. 이 그림들에서 회전관성과 전단변형을 고려하므로서 일부모드의 진동형에 상당히 큰 변화가 나타났음을 알 수 있다.

그림 10은 세장비 $s=75$ 인 고정-고정 아치의 아치높이 지간길이에 따른 무차원 고유진동수 변화를 나타낸 것이며, 그림 11은 아치높이 지간

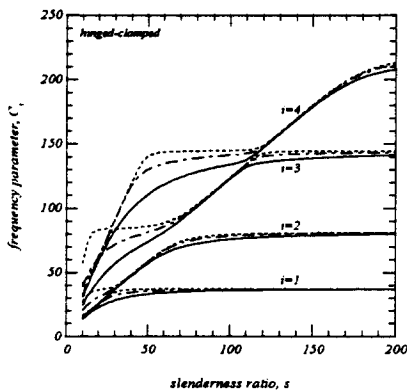


그림 7. s 와 C_i 의 관계(회전-고정)

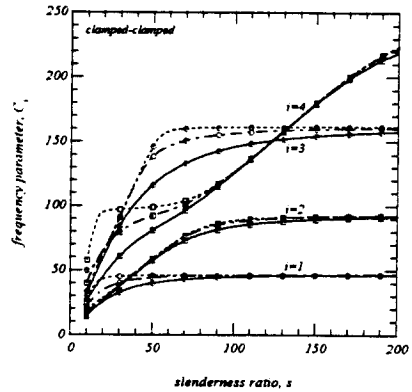


그림 8. s 와 C_i 의 관계(고정-고정)

길이비 $f=0.2$ 인 회전-고정 아치의 세장비에 따른 무차원 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 그림 10, 11의 결과들은 모두 $\mu=0.1$ 인 경우 회전관성과 전단변형을 고려하여 해석한 결과이며, 실선은 포물선, 점선은 원호, 점선은 타원 ($\epsilon=0.5$) 아치에 대한 결과이다.

그림 10에서 아치높이 지간길이가 작은 경우에는 아치선형에 따른 고유진동수 차이가 적으나, 아치높이 지간길이가 큰 경우에는 아치선형에 따른 고유진동수 차이가 상당히 큼을 알 수 있다. 그리고 그림 11의 세장비에 따른 고유진동수 곡선에서 제1고유진동수의 경우에는 선형에 따른 고유진동수 차이가 미소하지만, 고차모드에서는 상대적으로 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

이 논문에서는 회전관성과 전단변형을 고려한 임의의 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 미분방정식에 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 포물선, 원호 및 타원 아치를 적용하여 수치해석하였다. 수치해석결과로서 무차원 고유진동수와 아치높이 지간길이기 그리고 세장비 사이의 관계를 고찰하였으며, 회전관성 및 전단변형이 포물선

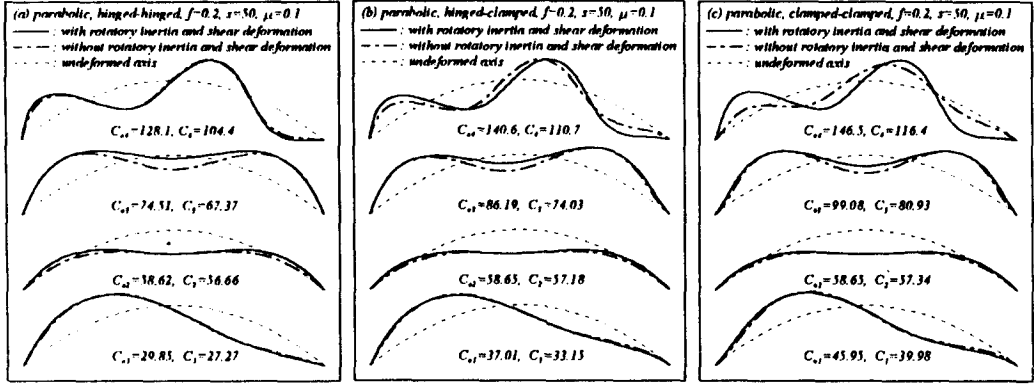


그림 9. 진동형의 예

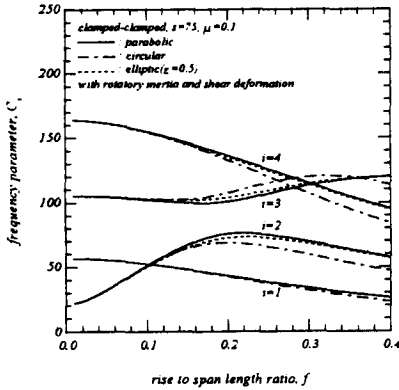


그림 10. 선형이 고정-고정 아치의 고유진동수에 미치는 영향

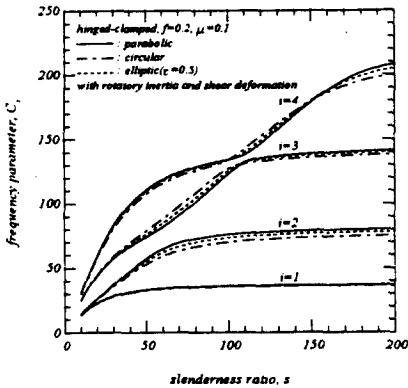


그림 11. 선형이 회전-고정 아치의 고유진동수에 미치는 영향

아치의 고유진동수 및 진동형에 미치는 영향을 분석하였다.

일련의 해석결과로부터 회전관성 및 전단변형

을 고려하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 감소하며, 전단계수가 작을수록 회전관성 및 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있었다. 또한 회전관성과 전단변형의 고려여부에 따라 진동형이 변환됨을 알 수 있었다. 세장비의 변화에 따른 고유진동수 변화에서는 고유진동수 곡선이 불룩한 부근에서 회전관성 및 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있었다. 또한 회전관성과 전단변형을 고려하는 경우 아치선형이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있었다.

감사의 글

이 논문은 한국과학재단 지원 국내 박사후 연구과정 중에 수행된 연구결과로서 연구비를 지원해 준 재단당국에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Den Hartog, J.P., 1928, "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs," Philosophical Magazine, Vol. 5, pp. 400~408.
- (2) Wolf, Jr., J.A., 1971, "Natural Frequencies of Circular Arches," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST9, pp.2337~2350.
- (3) Veletsos, A.S., Austin, W.J., Pereira,

- C.A.L. and Wung, S.J., 1972, "Free In-Plane Vibration of Circular Arches," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 98, No. EM2, pp.311~329.
- (4) Issa, M.S., Wang, T.M. and Hsiao, B.T., 1987, "Extensional Vibrations of Continuous Circular Curved Beams with Rotatory Inertia and Shear Deformation, I: Free Vibration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, No. 2, pp.297~308.
- (5) Maurizi, M.J., Rossi, R.E. and Bellés, P.M., 1991, "Lowest Natural Frequency of Clamped Circular Arcs of Linearly Tapered Width," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, No. 3, pp.357~361.
- (6) 이병구, 오상진, 서주석, 1990, "캔틸레버형 변 단면 곡선부재의 면내 자유진동," *한국강구조 학회 논문집*, 제2권 제2호, pp.138~145.
- (7) Chidamparam, P. and Leissa, A.W., 1995, "Influence of Centerline Extensibility on the In-Plane Free Vibrations of Loaded Circular Arches," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183, No. 5, pp.779~795.
- (8) Volterra, E. and Morell, J.D., 1960, "A Note on the Lowest Natural Frequency of Elastic Arcs," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 27, pp.744~746.
- (9) Romanelli, E. and Laura, P.A.A., 1972, "Fundamental Frequencies of Non-Circular, Elastic, Hinged Arcs," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24, No. 1, pp.17~22.
- (10) Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Bertero, R. and Villaggi, A., 1989, "In-Plane Vibrations of Non-Circular Arcs of Non-Uniform Cross-Section," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 129, No. 2, pp.181~200.
- (11) Lee, B.K. and Wilson, J.F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp.75~89.
- (12) 오상진, 1997, *변단면 아치의 자유진동에 관한 연구*, 원광대학교, 박사학위논문.
- (13) Austin, W.J. and Veletsos, A.S., 1973, "Free Vibration of Arches Flexible in Shear," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 99, No. EM4, pp.735~753.
- (14) Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., 1983, "Natural Frequencies of In-Plane Vibration of Arcs," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 50, pp. 449~452.
- (15) Sakiyama, T., 1986, "Free Vibration of Three-Hinged Arches," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 111, No. 2, pp.343~348.
- (16) Kang, K., Bert, C.W. and Striz, A.G., 1995, "Vibration Analysis of Shear Deformable Circular Arches by the Differential Quadrature Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp.353~360.
- (17) Kawakami, M., Sakiyama, T., Matsu- da, H. and Morita, C., 1995, "In-Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Sections," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 187, No. 3, pp.381~401.
- (18) Henrych, J., 1981, *The Dynamics of Arches and Frames*, Elsevier Scientific Publishing Company.
- (19) Borg, S.F. and Gennaro, J.J., 1959, *Advanced Structural Analysis*, D. Van Nostrand Company.
- (20) Gere, J.M. and Timoshenko, S.P., 1984, *Mechanics of Materials*, 2nd Edition, Brooks/Cole Engineering Division.

(접수일자 : 1997. 10. 13)