

# 고차전단변형을 고려한 복합적층판 및 셸구조의 좌굴해석

## Buckling Analysis of Laminated Composite Plate and Shell Structures considering a Higher-Order Shear Deformation

이 원 홍<sup>1)</sup> · 윤 석 호<sup>2)</sup> · 한 성 천<sup>3)</sup>  
*Lee, Won Hong                      Yoon, Seok Ho                      Han, Seong Cheon*

**ABSTRACT :** Laminated composite shells exhibit properties considerably different from those of the single-layer shell. Thus, to obtain the more accurate solutions to laminated composite shells problems, effects of shear strain should be considered in analysis of them. A higher-order shear deformation theory requires no shear correction coefficients. This theory is used to determine the buckling loads of elastic shells. The theory accounts for parabolic distribution of the transverse shear through the thickness of the shell and rotary inertia. Exact solutions of simply-supported shells are obtained and the results are compared with the exact solutions of the first-order shear deformation theory, and the classical theory. The present theory predicts the buckling loads more accurately when compared to the first-order and classical theory.

**KEYWORDS :** laminated composite shells, effects of shear strain, higher-order shear deformation, first-order shear deformation, buckling loads

### 1. 서      론

복합적층판 및 셸의 좌굴해석을 할 때 고전적 이론에서는 전단변형효과를 무시하였기 때문에 고유진동수와 좌굴하중은 정확해보다 매우 크게 나왔다. 복합적층구조물은 탄성계수와 전단탄성계수의 비가 매우 크므로(20~40배) 전단변형을

무시한 얇은 판이나 셸로 해석하면 그 결과는 많은 오차가 나타나게 된다. 따라서 본 연구에서는 복합재료로 구성된 적층판과 셸의 좌굴해석에 대하여 3차 전단변형이론에 의한 변위를 가정하여 단순지지 경계조건을 만족하는 변위형상함수를 푸리에급수로 전개하였다. 이로부터 평형 방정식을 유도하여 단면특성계수, 형상비, 층의 배열에

---

1) 진주산업대학 토목공학과 강사  
2) 경동대학교 토목설계과 전임강사  
3) 대원전문대학 토목과 전임강사

따른 복합적층판과 쉘의 좌굴하중을 계산하여 기존의 전단변형을 무시한 좌굴하중과 비교하고 복합적층구조물의 안정문제를 검토하기 위한 기술을 위하여 좌굴하중을 도표화 하고자 한다.

## 2. 본 론

### 2.1 기본이론

직교 좌표계를 갖는 쉘의 임의점(x,y,z)에서의 변위를 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

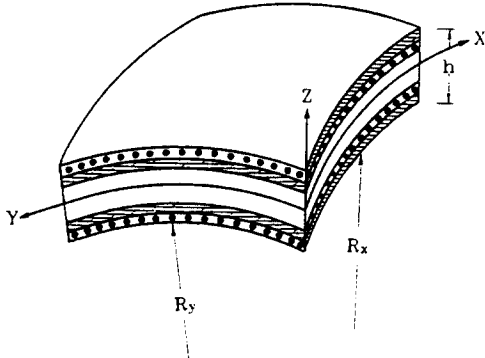


그림 1 적층쉘의 형상 및 기호

$$\begin{aligned}
 u_1(x,y,z) &= (1 + \frac{z}{R_x})u \\
 &+ z \left\{ -\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \phi_1 - \gamma \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left[ \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} \\
 u_2(x,y,z) &= (1 + \frac{z}{R_x})u \quad (1) \\
 &+ z \left\{ -\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \phi_2 - \gamma \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left[ \phi_2 + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} \\
 u_3(x,y,z) &= w
 \end{aligned}$$

여기서  $u_1, u_2, u_3$ 는 쉘의 임의점(x,y,z)에서의 X, Y, Z방향의 변위이며  $u, v, w$ 는 쉘의 중립면상의 점(x,y)에서의 변위이고  $\phi_1, \phi_2, R_x, R_y$ 는 X 및 Y방향의 중립면에 수직인 선분의 회전각 변위와 곡률반경을 나타내며 ( $u, v, w, \phi_1, \phi_2$ )는  $x$ 와  $y$ 의 함수이다.

식 (1)에서 고전적 이론은  $\alpha=1, \beta=0, \gamma=0$ 이며

1차 전단변형이론은  $\alpha=0, \beta=1, \gamma=0$ 이고, 고차 전단변형이론은  $\alpha=0, \beta=1, \gamma=1$ 이다.

또한, 고전적 이론은 1차 전단변형이론에서 식 (2)와 같이 대치하면 얻을 수 있다.

$$\phi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

구조계 전체에 대한 포텐셜에너지 ( $\Pi$ )는 변형 에너지라는 내적 포텐셜과 면내력  $n_1, n_2, n_3$ 에 의해 발생하는 외적 포텐셜의 합으로 나타낼 수 있으며 이는 식 (3)과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2} \int_V [\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_4 \epsilon_4 + \sigma_5 \epsilon_5 + \sigma_6 \epsilon_6] dx dy dz \\
 &- \frac{1}{2} \int_S [n_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2n_6 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + n_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)] dx dy \quad (3)
 \end{aligned}$$

전체 포텐셜에너지에 대하여 1차변분을 취하면 식 (4)와 같다.

$$\delta \Pi = 0 \quad (4)$$

식 (4)를 부분적분하여 정리하면 복합적층쉘의 평형방정식인 식 (5)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_6}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (n_1 \frac{\partial w}{\partial x} + n_6 \frac{\partial w}{\partial y}) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} (n_6 \frac{\partial w}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w}{\partial y}) \\
 &+ c_2 \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5) \\
 \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - \hat{Q}_1 &= 0 \\
 \frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - \hat{Q}_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 &= \beta M_1 - \gamma c_2 P_1, \\ \hat{P}_1 &= \gamma c_2 \hat{P}_1 + \alpha M_1, \\ \hat{Q}_1 &= \beta \hat{Q}_1 - \gamma c_1 K_1, \\ \bar{Q}_1 &= \beta(1-\alpha)Q_1 - \gamma c_1 K_1, \\ c_1 &= 4/h^2, \quad c_2 = c_1/3 \text{이다.} \end{aligned}$$

두께  $h$ 를 갖는 쉘의 내력은 식 (6)과 같이 각 응력을 두께에 대하여 적분하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^3) dz \quad (i=1,2,6) \\ (Q_1, K_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_3(1, z^2) dz \quad (6) \\ (Q_2, K_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4(1, z^2) dz \end{aligned}$$

$(N_i, M_i, P_i, Q_i, K_i)$ 는 적합조건식과 변형도-변위 관계식으로부터 변위에 관한 항으로 표시할 수 있으며 식 (6)에 응력-변형도 관계식과 변형도-변위 관계식을 대입하여 정리하면 단면력-변위 관계식을 얻을 수 있다. 단면력-변위 관계식의 강성값은 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) & \quad (7) \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z^2, z^3, z^4, z^5) dz \quad (i=1,2,6,5,4) \end{aligned}$$

여기서  $\bar{Q}_{ij}$ 는 구조축 방향의 강성이다.

## 2.2 크로스-플라이 적층판 및 쉘의 해석

파이버로 보강된 크로스-플라이 적층판 및 쉘은

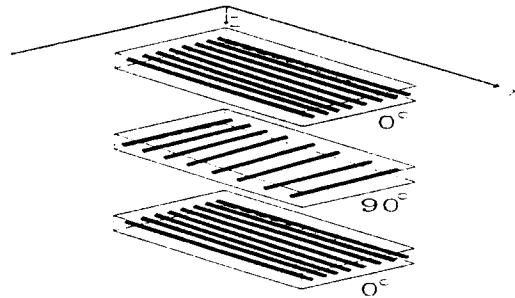


그림 2 직교이방성 적층형상

그림 2와 같이 각각  $0^\circ$ 와  $90^\circ$ 방향으로 보강되어 있는 판과 쉘을 말한다.

이와같은 크로스-플라이인 경우의 쉘의 강성값은 다음과 같이 되고,

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = E_{16} = E_{26} = 0$$

네변이 단순지지된 쉘의 변위 및 내력에 대한 경계조건은 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} u(x,0) = u(x,b) = v(0,y) = v(a,y) = 0 \\ w(x,0) = w(x,b) = w(0,y) = w(a,y) = 0 \\ \phi_1(x,0) = \phi_1(x,b) = \phi_2(0,y) = \phi_2(a,y) = 0 \\ w_x(x,0) = w_x(x,b) = w_y(0,y) = w_y(a,y) = 0 \\ N_2(x,0) = N_2(x,b) = N_1(0,y) = N_1(a,y) = 0 \\ P_2(x,0) = P_2(x,b) = P_1(0,y) = P_1(a,y) = 0 \\ M_2(x,0) = M_2(x,b) = M_1(0,y) = M_1(a,y) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

두께가 일정한 쉘의 변위를 식 (8)의 경계조건을 만족하는 이중삼각함수의 무한급수 형태로 가정하면 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn} f_1(X,Y) \\ v &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn} f_2(X,Y) \\ w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} f_3(X,Y) \\ \phi_1 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn} f_1(X,Y) \\ \phi_2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn} f_2(X,Y) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } f_1(X,Y) &= \cos \alpha x \sin \beta y, \\ f_2(X,Y) &= \cos \alpha x \sin \beta y \text{ 이고} \\ f_3(X,Y) &= \cos \alpha x \sin \beta y, \\ \alpha &= m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b \text{이다.} \end{aligned}$$

식 (9)의 변위를 평형 방정식인 식 (5)에 대입하여 행렬방정식 형태로 표시하면 식 (10)과 같다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} - N \cdot \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

여기서 매트릭스  $[C_{ij}]$ 는  $5 \times 5$ 의 계수행렬이고,  $[G_{ij}]$ 는 면내하중에 의한  $5 \times 5$ 의 강도행렬이다. 계수행렬  $[C_{ij}]$ 와 강도행렬  $[G_{ij}]$ 의 각 요소는 부록에 나타내었다.

### 2.3 역대칭 앵글-플라이 적층판의 해석

과이버로 보강된 역대칭 앵글-플라이 적층판은 각각  $\theta^\circ$ 와  $-\theta^\circ$  방향으로 보강되어 있는 1방향 보강판이 그림 3과 같이 적층되어 있다.

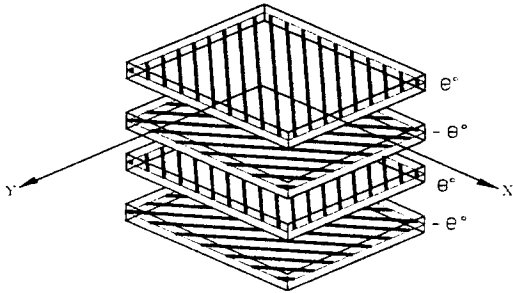


그림 3 역대칭 앵글-플라이 적층 형상

역대칭 앵글-플라이인 경우의 판의 강성값은 다음과 같이 되고,

$$A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = E_{11} = E_{12} = 0$$

$$E_{22} = E_{66} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = A_{45} = D_{45} = F_{45} = 0$$

네변이 단순지지된 판의 변위에 대한 경계조건은 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} u(0,y) &= u(a,y) = v(x,0) = (v,b) = 0 \\ w(x,0) &= w(x,b) = w(0,y) = w(a,y) = 0 \\ \phi_1(x,0) &= \phi_1(x,b) = \phi_2(0,y) = \phi_2(a,y) = 0 \\ w_x(x,0) &= w_x(x,b) = w_y(0,y) = w_y(z,y) = 0 \\ N_2(0,y) &= N_2(a,y) = N_1(x,0) = N_1(x,b) = 0 \\ P_2(0,y) &= P_2(a,y) = P_1(x,0) = P_1(x,b) = 0 \\ M_2(x,0) &= M_2(x,b) = M_1(0,y) = M_1(a,y) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

두께가 일정한 판의 변위를 식 (11)의 경계조건을 만족하는 이중삼각함수의 무한 급수 형태로 가정하면 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn} f_1(X,Y) \\ v &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn} f_2(X,Y) \\ w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} f_3(X,Y) \\ \phi_1 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn} f_1(X,Y) \\ \phi_2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn} f_2(X,Y) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $f_1(X,Y) = \sin \alpha x \cos \beta y$ ,  
 $f_2(X,Y) = \cos \alpha x \sin \beta y$ 이고  
 $f_3(X,Y) = \cos \alpha x \sin \beta y$ ,  
 $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ 이다.

식 (12)의 변위를 평형 방정식인 식 (5)에 대입하여 행렬방정식 형태로 표시하면 식 (10)과 같다.

### 2.4 수치해석 및 분석

해석방법에 대한 수치해석의 예는 boron fiber가 epoxy matrix에 재료축 방향으로 묻혀있는 경우로 각 층의 역학적 성질은 참고문헌의 결과와 비교하기 위하여 식 (13)과 같이 가정한다.

$$E_1=40E_2, G_{12}=G_{13}=0.6E_2, \\ G_{13}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25 \quad (13)$$

[0°/90°/0°/90°]으로 적층되어 있고 (a/h)가 10인 경우 복합적층판의 E<sub>1</sub>/ E<sub>2</sub> 변화에 따른 좌굴 하중을 무차원화하여 표 1에 나타내었다.

표 1 역대칭 직교이방성 복합 적층판의 좌굴하중 (N=n<sub>1</sub>b<sup>2</sup>/ E<sub>2</sub>h<sup>3</sup>)

Source \ E <sub>1</sub> /E <sub>2</sub>	3	10	20	30	40
Noor(9)	5.1738	9.0164	13.743	17.783	21.280
Present	5.2523	9.2315	14.254	18.667	22.579
FSDT(12)	5.2543	9.2552	14.332	18.815	22.806
CLPT(12)	5.5738	10.295	16.988	23.675	30.359

고전적 이론과 고차전단변형을 고려한 경우의 좌굴하중은 탄성계수의 비가 커질수록 더 큰 차이를 보이며 2차원해석법인 본 연구의 결과가 계산 과정은 복잡하지만 엄밀해로 알려진 Noor의 3차원해석 값과도 큰 차이를 보이지 않으므로 복합적층판의 좌굴해석시 필수적으로 고차전단변형이론을 고려해야만 한다.

[0°/90°/90°/0°]으로 적층되어있고 (a/h)가 10인 경우 복합적층판의 E<sub>1</sub>/ E<sub>2</sub> 변화에 따른 좌굴 하중을 무차원화하여 표 2에 나타내었다.

표 2 대칭 직교이방성 복합 적층판의 좌굴하중 (N=n<sub>1</sub>b<sup>2</sup>/ E<sub>2</sub>h<sup>3</sup>)

Source \ E <sub>1</sub> /E <sub>2</sub>	3	10	20	30	40
Noor(9)	5.2944	9.7621	15.0191	19.3040	22.8807
Present	5.3933	9.9406	15.2984	19.6744	23.3400
Reddy(11)	5.1143	9.7740	15.298	19.957	23.340
CLPT(11)	5.7538	11.492	19.712	27.946	36.160

Reddy의 유한요소법을 이용한 좌굴해석의 결과와 유사한 결과를 나타내었으나 3차원해석의 결과와 비교해볼 때 고차전단변형을 고려한 이중삼각함수 해석결과가 직교이방성 복합적층판의 해석시 정확한 결과를 나타냄을 알수있었다.

[0°/90°/90°/0°]으로 적층되어있고 (a/h)가 10이고 E<sub>1</sub>/ E<sub>2</sub>인 경우 복합적층판의 좌굴하중을 무차원화하여 표 3에 나타내었다.

표 3 대칭 직교이방성 복합 적층판의 좌굴하중 (N=n<sub>1</sub>b<sup>2</sup>/ E<sub>2</sub>h<sup>3</sup>)

Source \ E <sub>1</sub> /E <sub>2</sub>	Present	Ref.(5)	Khdeir(7)	Noor(9)
40	24.4354	24.5501	24.574	24.5929

적층판의 수가 5층인 경우에 본 연구의 고차전단변형을 고려한 해석법이 다른 여러 참고문헌에 비해 작은 좌굴하중을 나타내었다.

[0°/90°/90°/0°]와 [0°/90°/0°/90°]으로 적층되어있고 E<sub>1</sub>/ E<sub>2</sub>=40인 경우 복합적층판의 (a/h)를 변화시켜가며 좌굴하중을 무차원화하여 그림 4에 나타내었다. (a/h)의 비가 증가함에 따라 전단변형을 고려하지 않은 고전적 해법 (CLPT)과 일치한다.

대칭으로 적층된 복합적층판의 좌굴하중을 폭-두께비를 변화시켜가며 다른 참고문헌의 결과와 비교하여도 본 연구의 해석방법에 의한 좌굴하중이 작은 값을 가짐을 알수 있었고 대칭 복합적층

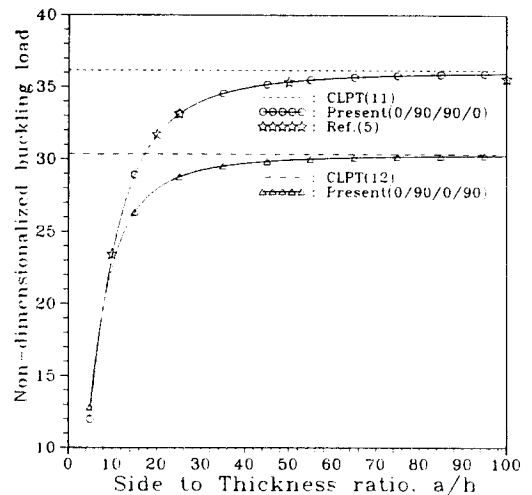


그림 4 판의 길이-두께비 변화에 따른 좌굴하중(N=n<sub>1</sub>b<sup>2</sup>/ E<sub>2</sub>h<sup>3</sup>)

판의 좌굴하중이 역대칭으로 배치된 복합적층판의 좌굴하중보다 크게 나타났다.

역대칭과 대칭으로 적층된 직교이방성 적층판의 형상비 변화에 따른 좌굴하중을 무차원화하여 그림 5에 나타내었다. 역대칭으로 적층된 경우의 좌굴하중값이 대칭인 경우 보다 작게 나타났다.

[30°/-30°.../-30°]으로 적층되어있고  $E_1/E_2$

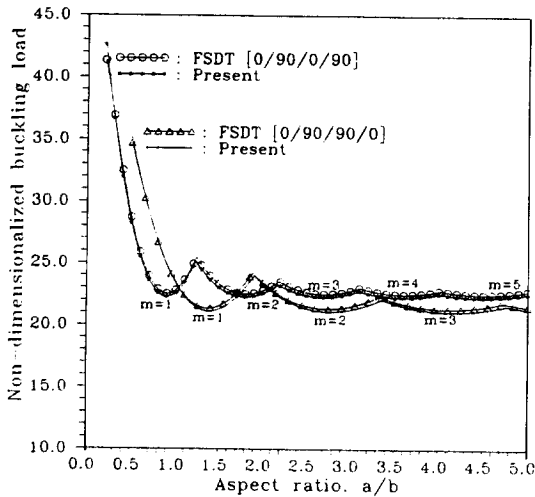


그림 5 역대칭 앵글-플라이의 길이-두께비의 변화에 따른 좌굴하중( $N=n_1b^2/E_2h^3$ )

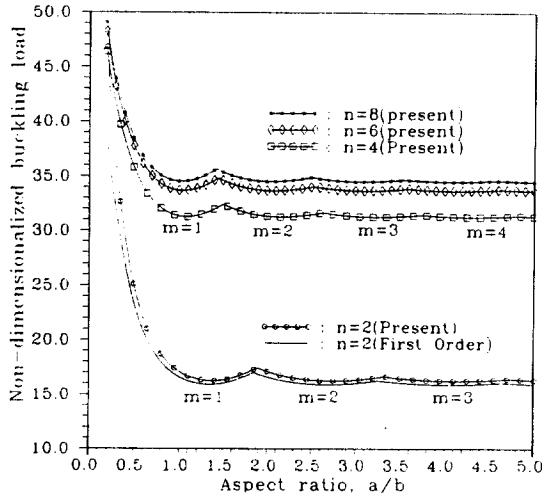


그림 6 역대칭 앵글-플라이의 길이-두께비와 층수 변화에 따른 좌굴하중( $N=n_1b^2/E_2h^3$ )

=40인 경우 복합적층판의 층수를 변화시켜가며 좌굴하중을 무차원화하여 그림 6에 나타내었다.

2층으로 적층된 경우에는 휨-면내력 복합강도에 의한 효과가 매우 커 좌굴하중이 작게 나타났고 층수가 증가할수록 휨-면내력 복합강도의 영향이 매우 빠르게 감소함을 알 수 있다.

[0°/90°/0°/90°]으로 적층되어있고 곡률반경-

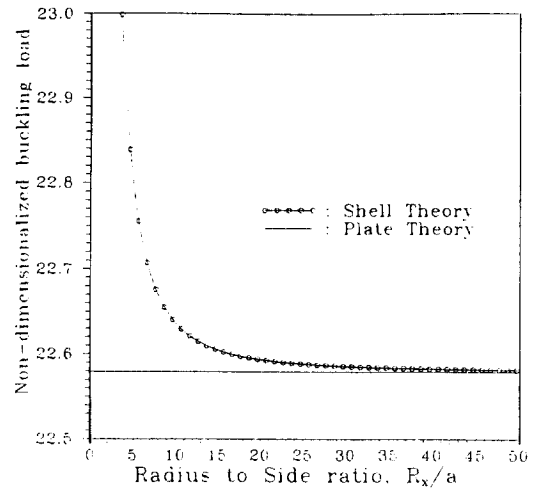


그림 7 [0°, 90°, 0°, 90°]로 적층된 셸의 곡률반경-길이비 변화에 따른 좌굴하중( $N=n_1b^2/E_2h^3$ )

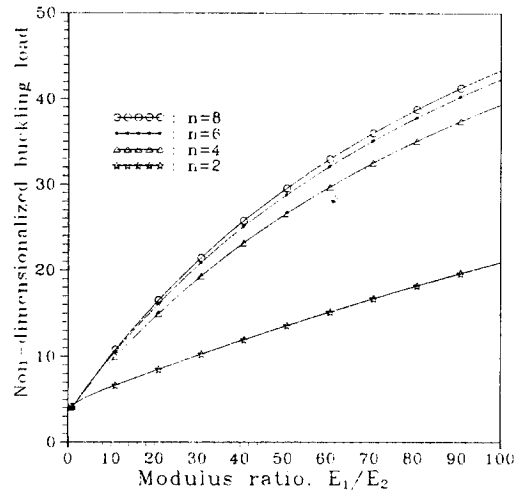


그림 8 적층셸의 탄성계수비와 층수 변화에 따른 좌굴하중 ( $N=n_1b^2/E_2h^3$ )

길이비 변화에 따른 좌굴하중을 무차원화하여 그림 7에 나타내었다. 곡률반경-길이비가 30이상인 경우에는 셸구조물의 좌굴하중이 판의 좌굴하중과 거의 일치하였다.

[0°/90°/.../90°]로 적층된 셸구조의 탄성계수 비 변화에 따른 좌굴하중을 구하여 그림 8에 나타내었다. 층수가 증가함에 따라 좌굴하중의 증가폭이 감소하며 최종적으로 직교이방성 셸의 좌굴하중값과 같아진다.

### 3. 결 론

본 연구에서는 비등방성 복합적층판 및 직교이방성 복합적층셸의 좌굴해석시 두께의 3차 항으로 표시된 전단변형함수를 이용한 전단변형효과를 고려하여 대칭과 역대칭으로 적층된 복합적층판 및 셸의 층수, 형상비와 탄성계수비를 변화시켜가며 좌굴해석을 한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 복합적층판 및 셸의 좌굴해석시 고차전단변형이론을 고려할 경우에는 일차전단변형이론에서 사용해야하는 전단보정계수를 사용할 필요가 없음을 알았다.

(2) 직교이방성 적층셸에서 역대칭으로 적층시켰을 경우의 좌굴하중이 대칭으로 적층되었을때의 좌굴하중보다 폭-두께비가 클 경우에는 작은값을 나타내었으나 폭-두께비가 작은 경우에는 큰 차이를 보이지 않으므로 복합적층셸의 설계시 폭-두께비의 변화에 따른 적층셸의 배치를 고려해야 한다.

(3) 고전적 이론과 1차전단변형을 고려한 이론에 의한 좌굴하중보다 고차전단변형이론에 의한 좌굴하중이 Noor의 3차원해법에 의한 좌굴하중에 매우 근접한 결과를 나타내므로 복합적층셸의 좌굴해석시 고차전단변형이론을 필수적으로 고려해야만 2차원해석법인 적층셸이론의 정확도를 향상시킬 수 있다.

(4) 직교이방성 복합적층판의 좌굴해석은 복합적층셸의 강도계수에서 곡률반경을 무한대로 증가시켜 사용할수있다.

### 참 고 문 헌

- [ 1 ] 장석윤, 윤석호, 한성천, "고차전단변형이론에 의한 비등방성 적층판의 해석", 한국강구조학회지 제6권 제1호(1994), pp 114-125.
- [ 2 ] 장석윤, 윤석호, 한성천, "고차전단변형을 고려한 직교이방성 적층판의 고유진동수 특성", 한국강구조학회지 제6권 제3호(1994), pp 185-196.
- [ 3 ] 지효선, 한성천, 장석윤, "고차전단변형을 고려한 SPHERICAL 적층셸의 자유 진동", 한국강구조학회 학술발표대회 논문집(1996), pp 123-132
- [ 4 ] 한성천, "비등방성 복합 적층셸의 해석", 서울시립대학교 박사 학위논문, 1996.8.
- [ 5 ] Kim, K.D., "Buckling Analysis of Composite Plates and Shells Using Finite Element Method", 한국강구조학회 논문집, 제6권, 제2호, 1994.6, pp.173-185
- [ 6 ] Ashton, J.E. and Whitney, J.M., *Theory of Laminated Plates*, Technomic Publishing Co., 1970, pp. 135-167.
- [ 7 ] Khdeir, A.A. and Librescu, L., "Analysis of Symmetric Cross Ply Laminated Elastic Plates Using Higher Order Theory: Part II Buckling and Free Vibration", *Composite Structures*, VOL 9, 1988, pp. 259-277
- [ 8 ] Langhaar, H.L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, 1962, pp. 233-247.
- [ 9 ] Noor, A.K., "Stability of Multi-layered Composite Plates", *Fiber Science and Technology*, VOL 8, 1975, pp. 81-89
- [ 10 ] Reddy, J.N., *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, 1984, pp.310-473.
- [ 11 ] Reddy, J.N., "Analysis of Laminated Composite Plates Using A Higher-Order Shear Deformation Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,

VOL 21, 1985, pp. 2201-2219.

- [12] Reddy, J.N., Miravete, A., *Practical Analysis of Composite Laminates*, CRC Presss, 1995, pp 51-141.
- [13] Reddy, J.N. and Phan, N.D., "Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to A Higher Order Shear Deformation Theory", *J. of Sound and Vibration*, VOL 98(2), 1985, pp. 157-170.
- [14] Robert, M. Jones, *Mechanics of Composite*

*Materials*, Scripta Book Co., 1975, pp. 55-88

- [15] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Edition , New York : McGraw-Hill, 1961, pp364-425.
- [16] Vinson, J.R., and Tsu Wei Chou, *Composite Materials and Their Use in Structures*, London : Applied Science Publishers LTD, 1975, pp155-309.
- [17] Ugral, A.C., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1981, pp106-122.



1. 크로스-플라이 적층셸의 행렬요소

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\
 C_{12} &= A_{12}\alpha\beta + A_{66}\alpha\beta \\
 C_{13} &= -A_{11}\left(\frac{\alpha}{R_1}\right) - A_{12}\left(\frac{\alpha}{R_2}\right) - (4\alpha/3h^2)(E_{11}\alpha^2 + E_{22}\beta^2 + 2E_{66}\alpha\beta) \\
 C_{14} &= -\alpha^2(-B_{11} + (4E_{11}/3h^2)) - \beta^2(-B_{22} + (4E_{22}/3h^2)) \\
 C_{15} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{21} - (4E_{12}/3h^2) - (4E_{66}/3h^2)) \\
 C_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\
 C_{23} &= -\beta\left(\frac{A_{k2}}{R_1} + \frac{A_{k2}}{R_2}\right) - \alpha\beta((4E_{12}/3h^2) + (8E_{66}/3h^2)) - (4\beta^3/3h^2)E_{22} \\
 C_{24} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{21} - (4E_{12}/3h^2) - (4E_{66}/3h^2)) \\
 C_{25} &= \alpha^2(B_{11} - (4E_{11}/3h^2)) + \beta^2(B_{22} - (4E_{22}/3h^2)) \\
 C_{33} &= \alpha^2(16H_{11}/9h^2) + \beta^2(16H_{22}/9h^2) + (32\alpha\beta^2/9h^2)(H_{12} + 2H_{66}) \\
 &\quad + \alpha^2(A_{55} - 8D_{55}/h^2 + 16F_{55}/h^2 - 8E_{11}/3h^2R_1 - 8E_{22}/3h^2R_2) \\
 &\quad + \beta^2(A_{44} - 8D_{44}/h^2 + 16F_{44}/h^2 - 8E_{11}/3h^2R_1 - 8E_{22}/3h^2R_2) \\
 &\quad + (A_{11}/R_1^2) + (2A_{12}/R_1R_2) + (A_{22}/R_2^2) \\
 C_{34} &= (4\alpha^2/3h^2)(-F_{11} + (4H_{11}/3h^2)) - (4\alpha\beta^2/3h^2)(F_{12} + 2F_{66}) \\
 &\quad + (16\alpha\beta^2/9h^2)(H_{12} + 2H_{66}) + A_{55}\alpha - (8\alpha D_{55}/h^2) + (16\alpha F_{55}/h^2) \\
 &\quad - \alpha((B_{11}/R_1) + (B_{22}/R_2) - (4/3h^2)(E_{11}/R_1) + (E_{22}/R_2)) \\
 C_{35} &= (4\beta^2/h^2)(-F_{22} + (4H_{22}/3h^2)) - (4\alpha^2\beta/3h^2)(F_{12} + 2F_{66}) \\
 &\quad + (16\alpha^2\beta/9h^2)(H_{12} + 2H_{66}) + A_{44}\beta - (8\beta D_{44}/h^2) + (16\beta F_{44}/h^2) \\
 &\quad - \alpha((B_{11}/R_1) + (B_{22}/R_2) - (4/3h^2)(E_{11}/R_1) + (E_{22}/R_2)) \\
 C_{44} &= -(8\alpha^2/3h^2)F_{11} - (8\beta^2/3h^2)F_{22} + (16/9h^2)(H_{11}\alpha^2 + H_{66}\beta^2) \\
 &\quad + D_{11}\alpha + D_{44}\beta + A_{55} - (8D_{55}/h^2) + (16F_{55}/h^2) \\
 C_{45} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) - (8/3h^2)(F_{12} + F_{66}) + (16/9h^2)(H_{12} + H_{66}) \\
 C_{55} &= \alpha^2(D_{11} - (8F_{55}/3h^2) + (16H_{11}/9h^2)) \\
 &\quad + \beta^2(D_{22} - (8F_{55}/3h^2) + (16H_{22}/9h^2)) \\
 &\quad + A_{44} - (8D_{44}/h^2) + (16F_{44}/h^2) \\
 G_{ij} &= \alpha^2 + (n_i/n_j)\beta^2, \quad G_{ii} = 0 \quad \text{for all } i, j = 1, 2, 3, 4, 5 (i \neq j \neq 3)
 \end{aligned}$$

2. 역대칭 앵글-플라이 적층판의 행렬요소

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\
 C_{12} &= A_{12}\alpha\beta + A_{66}\alpha\beta \\
 C_{13} &= -(4\alpha/3h^2)(3E_{16}\alpha^2\beta + E_{26}\beta^3) \\
 C_{14} &= 2\alpha\beta B_{16} - (8/3h^2)\alpha\beta E_{16} \\
 C_{15} &= \alpha^2 B_{16} + \beta^2 B_{26} - (4/3h^2)[\alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}] \\
 C_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\
 C_{23} &= (4/3h^2)[\alpha^2 E_{16} + 3\beta^2 \alpha E_{26}] \\
 C_{24} &= \alpha^2 B_{16} + \beta^2 B_{26} - (4/3h^2)[\alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}] \\
 C_{25} &= 2\alpha\beta B_{26} - (8/3h^2)\alpha\beta E_{26} \\
 C_{33} &= \alpha^2(4/3h^2)^2 H_{11} + \beta^2(4/3h^2)^2 H_{22} \\
 &\quad + 2\alpha^2\beta^2(4/3h^2)^2(H_{12} + 2H_{66}) \\
 &\quad + \alpha^2(A_{55} - 8D_{55}/h^2 + 16F_{55}/h^2) \\
 &\quad - \beta^2(A_{44} - 8D_{44}/h^2 + 16F_{44}/h^2) \\
 C_{34} &= A_{55}\alpha - (8\alpha D_{55}/h^2) + (4/h^2)\alpha^2 F_{55} \\
 &\quad - (4/3h^2)[\alpha^2 F_{11} + \alpha\beta^2(F_{12} + 2F_{66})] \\
 &\quad + (4/3h^2)^2[\alpha^2 H_{11} + \alpha\beta^2(H_{12} + 2H_{66})] \\
 C_{35} &= A_{44}\beta - (8\beta D_{44}/h^2) + (4/h^2)\beta^2 F_{44} \\
 &\quad - (4/3h^2)[\beta^2 F_{22} + \beta\alpha^2(F_{12} + 2F_{66})] \\
 &\quad + (4/3h^2)^2[\beta^2 H_{22} + \beta\alpha^2(H_{12} + 2H_{66})] \\
 C_{44} &= A_{55} + D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 - (8D_{55}/h^2) + (4/h^2)^2 F_{55} \\
 &\quad - (8/3h^2)(\alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{66}) + (4/3h^2)^2(H_{11}\alpha^2 + H_{66}\beta^2) \\
 C_{45} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) - (8/3h^2)\alpha\beta(F_{12} + F_{66}) \\
 &\quad + (4/3h^2)^2\alpha\beta(H_{12} + H_{66}) \\
 C_{55} &= A_{44} + D_{22}\beta^2 + D_{66}\alpha^2 - (8D_{44}/h^2) + (4/h^2)^2 F_{44} \\
 &\quad - (8/3h^2)(\beta^2 F_{22} + \alpha^2 F_{66}) + (4/3h^2)^2(H_{22}\beta^2 + H_{66}\alpha^2) \\
 G_{33} &= \alpha^2 + (n_2/n_1) + I_1 \\
 G_{ij} &= 0, \quad \text{for all } i, j = 1, 2, \dots, 5 (i \neq j \neq 3).
 \end{aligned}$$