財務管理硏究 第十四卷 第一號(1997. 6), 207~217

효율적 시장가설과 서브마팅게일의 검증

옥 기 율* · 송 영 효**

<요 약>

본 연구에서는 효율적 시장가설을 검증할 때 일반적으로 이용하는 주가의 로그변환방법은 마팅게일과 서브마팅게일을 구분할 수 없다는 것을 이론적으로 보여주고, 이러한 문제를 해결하기 위해서는 로그변환없이 일차 차분을 한 시계열 데이타를 이용하는 것이 바람직하다는 것을 제시한다. 또한 마팅게일과 서브마팅게일의 구분하기 위해서는 주가 차분 시계열 데이타의 공분산이라는 검정통계량을 이용하는데, 이 공분산이라는 검정통계량을 이용하여 실증적으로 검증을 하기 위해서는 이 통계량의 분포를 알아야 한다. 본 연구에서는 bootstrap방법론을 이용하여 이 공분산의 분포를 구하는 방법론을 제시한다.

Ⅰ. 서 론

자본시장의 효율성 여부에 대한 이슈는 수학과 재무이론을 접목시키는 근간으로서 재무이론의 수학화 및 계량화에 크게 영향을 미쳤다고 할 수 있다. 또한 이는 투자이론의 실증적 연구의 큰 축을 이루며 수많은 논란을 야기시켰으며 이 논란은 곧 수많은 논문으로 연결되었다. 초기의 효율적 자본시장에 대한 검증은 주가의 '무작위 횡보(random walk)' 검증에 그 초점을 맞추어 왔는데 이는 곧 주가행태가 마팅게일을 따르는지 아니면 그렇지 아닌지의 여부를 검증하는 양상을 띠었다.[1] 효율적 시장가설을 검증하는 거의 대부분의 연구들은 주가에 자연로그를 취한후 차분하는 방식을 이용해왔다(Fama(1965), Fama & French(1988), Amihud & Mendelson(1987)). 그러나 이러한 연구들이 효율적 시장가설을 검정하는데 이용한 주가데이타의 로그

* 삼성증권 리서치센타
** 홍익대학교 상경학부 교수
1) 자세한 설명은 Fama(1970)를 참조.

변환방법(log adjustment process)은 주가의 행태가 마팅게일을 따르는지의 여부를 분석하여, 마팅게일을 따르면 효율적 시장가설을 지지하는 것으로 해석을 한다. 즉, 주가 로그 차분으로 구한 주식수익률로 이들의 공분산을 구하여 이 공분산이 0이라는 귀무가설을 기각하지 못하면 효율적 시장가설을 지지하는 것으로 보는데, 이 공분산이 0이라는 것은 주가행태가 마팅게일 특성과 서브마팅게일 특성의 두 효율적 시장가설을 다 지지함으로 인해 주가행태가 마팅게일을 따르는지 아니면 서브마팅게일을 따르는지를 구체적으로 구분하지는 못한다. 그러므로 효율적 시장가설은 실제로 서브마팅게일하에서 마팅게일을 검증하는 내포가설(nested hypothesis)이라고 할 수 있다.

Samuelson(1973)은 효율적 시장가설에 대한 이론적인 모델을 제시했는데 이는 곧 효율적 자본시장에서 가격행태가 (서브)마팅게일을 따르는지의 여부로 간단히 설명될 수 있다. 서브(sub)라는 개념은 투자에 대한 위험회피성(risk aversion) 및 이자율은 0이 아니다(non-zero interest rate)라는 현실적인 가정하에서 주가는 양의 drift를 가진다는 것을 의미한다. 그러므로 이러한 개념, 즉 주식에 투자하는데 있어서 위험에 대한 투자자의 위험회피성및 양의 이자율 특성의 여부를 분석하고자 할 때는 주가의 행태가 마팅게일을 따르는지 아니면 서브마팅게일을 따르는지를 구분할 필요가 있다.[2)]

따라서 본 연구에서는 효율적 시장가설을 검증할 때[3)], 효율적 시장가설 검증의 전형적인 방법론인, 로그변환후 차분한 시계열의 상관계수에 기초를 둔 검증방법론은, 마팅게일과 서브마팅게일을 구분할 수 없다는 것을 이론적으로 먼저 보이고, 로그변환없이 주가에 차분을 취한 시계열 데이타를 이용한 방법론은 효율적 시장가설하에서 마팅게일과 서브마팅게일을 구분할 수 있다는 것을 보여준다. 또한 마팅게일과 서브마팅게일의 구분을 위해 본 연구에서는 주가의 차분 시계열 데이타의 공분산이라는 검정통계량을 제시하는데, 이 공분산이라는 검정통계량을 이용하여 실증적으로 검증을 하기 위해서는 이 통계량의 분포를 알아야 한다. 그래서 많은 통계학자에 의해 체계적으로 정립된 bootstrap이라는 통계적 방법론을 이용하여 이 통계량의 분포를 구하는 절차를 보여준다.

---

2) 주가의 행태가 투자자의 위험회피성및 양의 이자율의 경제적 의미를 반영하고 있느냐를 알아보기 위해서는 위에서 기술한 바와 같이 마팅게일과 서브마팅게일을 구분할 필요가 있다. 효율적 자본시장하에서 서브마팅게일 혹은 마팅게일 조건을 각각 만족시키는 투자자의 절대적·상대적 위험회피성, 배당정책, 현가화한 선물가격 및 이자율 등의 재무학적 상태에 대한 자세한 설명은 Malliaris(1981, pp 437-442)를 참조.

3) 구체적으로는 약형의 효율적 시장가설 검증을 의미한다.

Ⅱ. 마팅게일과 서브마팅게일

1. 주가 로그 차분을 이용한 방법론

마팅게일과 서브마팅게일을 구분할 수 있는 방법론을 제시하기 위해 먼저 효율적 시장가설 검증의 전형적인 방법론인 주가에 로그를 취해 차분한 수익률의 시계열 상관계수에 기초를 둔 검증방법론을 분석해 본다.

설명의 단순화를 위해 주가가 선형 drift를 가지는 로그 정규 발산 과정(constant parameter log-normal diffusion process)을 따르며, 주가(X_t)는 초기값 X_0를 가지는 추계적 차분방정식 (1)을 따른다고 가정한다.

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dZ_t \tag{1}$$

여기에서 μ는 기대 수익률, μX_t는 순간 기대 drift율(instantaneous expected drift rate), σ는 주가 변동성, 그리고 $\sigma^2 X_t{}^2$는 순간 분산율(instantaneous variance rate)이며, Z_t는 평균이 0이고 분산이 t인 위너과정(Wiener process)을 따른다.

식 (1)은 식 (2)로 표현된다.

$$X_t = X_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma Z_t] \tag{2}$$

여기에서 주가 X의 로그값의 차분으로 이루어진 주식수익률의 일차 시계열 상관계수의 행태를 유추하기 위해 식 (3)을 도출한다.

$$1nX_t - 1nX_0 = 1n(X_t/X_0) = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma(Z_t - Z_0 \tag{3}$$

시점 0은 t로(0=t), t는 t+s로(t=t+s) 시점을 바꾸면 식(3)은 식 (4)로 표현할 수 있다. 여기에서 s>0이다.

$$\ln X_{t+s} - \ln X_t = \ln(X_{t+s}/X_t) = (\mu - \sigma^2/2)s + \sigma(Z_{t+s} - Z \tag{4}$$

Brownian motion을 따르는 Z_t의 증분(increment)은 서로 독립이고, 식(3)과 (4)에서의 주가 로그 차분의 drift요소는 확정적(deterministic)이기 때문에 식 (3)과 (4)에서의 주가 로그 차분 사이의 공분산은 μ의 값에 관계없이 0이다. 주가 로그 차분 사이의 공분산이 0이라는 것은 주가 행태가 마팅게일 특성($\mu=0$)과 서브마팅게일 특성($\mu \neq 0$)의 두 효율적 시장가설을 다 지지한다. 그러므로 여기에서 주목해야 할 점은 주가 로그 차분을 한 시계열 데이타를 이용한 효율적 시장가설 검증은 주가행태의 공분산이 0인지 아닌지의 여부를 검증함으로써 시장의 효율성 여부를 검증할 수는 있으나 그것이 마팅게일을 따르는지 아니면 서브마팅게일을 따르는지를 구분할 수는 없다.

2. 마팅게일과 서브마팅게일의 구분

여기에서 우리는 본 연구의 목적인 주가 행태가 마팅게일을 따르는지 아니면 서브마팅게일을 따르는지를 구분할 수 있는 방법론을 제시한다.

먼저 주가 X_t가 식(2)에서처럼 선형 drift를 가지는 로그 정규 발산 과정을 따른다고 가정하고, 식(2)를 시점을 바꾸어 식(5)로 다시 표현한다.[4]

$$X_{t+s} = X_t \exp[(\mu - \sigma^2/2)s + \sigma(Z_{t+s} - Z_t) \tag{5}$$

여기에서 주가의 로그 차분이 아닌 원 주가 차분들, $X_{t+s} - X_t$과 $X_t - X_0$의 공분산을 구한다. 물론 0기에서의 주가 X_0는 비확률적(non-stochastic)이다.

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+s} - X_t, X_t - X_0) &= Cov(X_{t+s} - X_t, X_t) \\ &= Cov(X_{t+s}, X_t) - Var(X_t \end{aligned} \tag{6}$$

4) 식(4)를 이용하여 식(5)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+s}, X_t) &= Cov(X_t \exp[(\mu - \sigma^2/2)s + \sigma(Z_{t+s} - Z_t)], X_t \\ &= E(\exp[(\mu - \sigma^2/2)s + \sigma(Z_{t+s} - Z_t)])\, Var(X_t) \\ &= \exp(\mu - \sigma^2/2)s E(\exp[\sigma(Z_{t+s} - Z_t)])\, Var(X_t) \\ &= e^{(\mu - \sigma^2/2)s} e^{\sigma^2 s/2}\, Var(X_t) \qquad (7) \\ &= e^{\mu s} Var(X_t) \end{aligned}$$
[5)]

그러므로,

$$Cov(X_{t+s} - X_t, X_t - X_0) = [e^{\mu s} - 1]\, Var(X_t \qquad (8)$$

식(7)에서 세번째 등식에서의 기대치 부분의 계산은 정규분포 $N(0, \sigma^2 s)$을 따르는 확률 변수의 적률함수(moment generating function)를 이용한다.[6)]

식(8)을 보면 알 수 있듯이 $\mu > 0$인 경우에는 $Cov(X_{t+s} - X_t, X_t - X_0) > ($이고 $\mu = 0$인 경우에는 $Cov(X_{t+s} - X_t, X_t - X_0) = ($임을 알 수 있다. 그러므로, 주가의 차분 시계열을 이용한 검증만이 서브마팅게일($\mu > 0$)과 마팅게일($\mu = 0$)을 구분할 수 있다. 앞서 언급했듯이, 로그 정규 발산과정을 따르는 주가 행태하에서는 주가 로그 차분의 drift요소는 확정적이기 때문에 주가 로그 차분 사이의 공분산은 μ의 값에 관계없이 0이다. 여기에서 알 수 있듯이 추세를 가지는 주가 drift효과는 원 주가 차분의 시계열에서는 발견할 수 있지만, 로그로 변환하여 차분한 시계열에서는 알 수가 없다. 따라서 효율적 시장가설을 검증하는데 있어서, 주가의 행태가 투자자의 위험회피성 및 양의 이자율의 경제적 의미까지 분석하고자 할 때에는 원 주가 차

---

5) 첫 번째 식에서 두 번째 식으로 유도되는 과정은 확률변수 Z와 X가 서로 독립일 때, $Cov(ZX, X) = E(Z)\, Var(X)$의 관계에 의해 설명된다. 즉,

$$\begin{aligned} Cov(ZX, X) &= E[(ZX - E[ZX])(X - E[X])] \\ &= E[ZX^2 - XE[ZX] - ZXE[X] + E[ZX]E[X]] \\ &= E[ZX^2] - E[X]E[ZX] - E[ZX]E[X] + E[ZX]E[X]] \\ &= E[Z]E[X^2] - E[X]E[Z]E[X] - E[Z]E[X]E[X] + E[Z]E[X]E[X \\ &= E[Z](E[X^2] - E[X]^2) \\ &= E[Z]\, Var[X] \end{aligned}$$

첫번째 식에서의 $\exp[(\mu - \sigma^2/2)s + \sigma(Z_{t+s} - Z_t)]$와 X_t는 서로 독립이다.

6) 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 적률함수는 아래와 같다.

$\varphi(t) = E(e^{tX}) = \exp(\sigma^2 t^2/2 + \mu t)$

분의 공분산을 구함으로써 구체적으로 주가 행태가 마팅게일을 따르는 지 아니면 서브마팅게일을 따르는 지를 분석해야 한다.7)

3. 선형 drift을 가지는 일반적인 시계열 차분의 검증방법

여기에서는 주가 행태가 선형 drift를 가지는 로그 정규 발산 과정을 따르지 않는다고 하더라도 선형 drift를 가지는 일반적인 추계적 과정을 따르기만 하면 주가 차분 시계열의 공분산은 식(8)에서 보여 주는 특성을 가진다는 것을 보여준다. 다시 말하면, 시계열 데이타가 선형 drift을 가지고 아래 식(9)에서 보여주는 순간분산율 λ의 모수가 시간 t와 시계열 X_t에 의존한다는 속성만 가지면 원 데이타의 차분을 이용하여 공분산을 계산할 수 있고, 또한 이 시계열 데이타가 마팅게일 특성을 가지는지 아니면 서브마팅게일의 특성을 가지는지를 분간할 수 있다는 것을 수식으로 보여 준다. 일반적인 재무이론에서 많이 이용되고 있는 선형 drift를 가지는 로그 정규분포는 선형 drift를 가지는 추계적 과정의 특수한 형태라고 할 수 있다.

X_t는 $Var(X_t)<\infty$이며 식(9)에서와 같이 선형 drift를 가지고 λ의 모수가 시간 t와 시계열 X_t에 의존하는 속성을 가지는 일반적인 추계적 과정을 따른다고 가정하자.

$$dX_t = \mu X_t dt + \lambda(t, X_t) dZ_t \tag{9}$$

여기에서 $\lambda(t, X_t)$는 X_t와 t에 의존하는 확률함수(random function)이다.

식(9)의 양변에 적분을 취하면 식(10)이 된다.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \lambda(s, X_s) dZ_s \tag{10}$$

---

7) 로그변환 후 차분한 시계열을 이용한 효율성 검증이 선행되지 않으면, $\mu>0$인 경우에는 공분산이 0보다 크다는 것이지, 이것에 의해 주가 행태가 서브마팅게일을 따른다고는 할 수 없다. 그러므로, 주가에 로그변환후 연속적 차분을 한 시계열의 일차 상관관계를 도출하여 시장 효율성을 먼저 검증한 후 이를 기초로 주가 차분의 공분산을 이용하여 서브마팅게일 여부를 검증해야 한다. 이러한 점을 지적해 주신 익명의 심사위원에게 감사 드린다.

여기에서 $\lambda(t, X_t)$는 예측불가(non-anticipating)하고,

$\int_0^t E(\lambda^2(s, X_s))ds < \infty$을 만족하면,

$E(\int_0^t \lambda(s, X_s)dZ_s) = 0$이다.

식(10)에 기대치를 취하면 식(11)이 된다.

$$E(X_t) = E(X_0) + \int_0^t \mu E(X_s)ds \tag{11}$$

여기에서 $y_t = E(X_t)$로 두고 미분을 하여 미분방정식을 만들어 풀면, 식(11)은 식(12)가 된다.

$$E(X_t) = E(X_0)e^{\mu t} \tag{12}$$

또한 여기에서 연속 주가 차분사이의 공분산을 계산하기 위한 또 하나의 절차로 식(13)에서 $X_{t+s}X_t$의 기대치를 계산한다.

$$\begin{aligned} E[X_{t+s}X_t] &= E[X_t + \int_t^{t+s}(\mu X_v dv + \lambda(v, X_v)dZ_v))X_t] \\ &= E(X_t^2) + E[\mu X_t \int_t^{t+s} X_v dv] + E[X_t \int_t^{t+s} \lambda(v, X_v)dZ_v) \\ &= E(X_t^2) + \mu \int_t^{t+s} E[X_t X_v]dv + 0 \end{aligned} \tag{13}$$

위 식도 미분한 후 미분방정식을 만들어 풀면 식(14)가 된다.

$$E[X_{t+s}X_t] = E[X_t^2]e^{\mu s} \tag{14}$$

Lemma :

$Cov(X_{t+s}, X_t) = e^{\mu s}Var(X_t)$

증명 :

$$\begin{aligned} E[X_{t+s}X_t]-E[X_{t+s}]E[X_t] &= E[X_t^2]e^{\mu s}-E[X_0]e^{u(t+s)}E[X_t \\ &= e^{\mu s}[E[X_t^2]-E[X_0]e^{ut}E[X_t]] \\ &= e^{\mu s}[E[X_t^2]-E[X_t]^2] \\ &= e^{\mu s}Var(X_t) \end{aligned} \tag{15}$$

Proposition 1.

$$Cov(X_{t+s}-X_t, X_t-X_0) = [e^{\mu s}-1]Var(X_t \tag{16}$$

증명 :

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+s}-X_t, X_t-X_0) &= Cov(X_{t+s}, X_t-X_0)-Cov(X_t, X_t-X_(\\ &= Cov(X_{t+s}, X_t)-Var(X_t) \\ &= e^{\mu s}Var(X_t)-Var(X_t) \\ &= (e^{\mu s}-1)Var(X_t) \end{aligned}$$

Proposition 1이 보여 주는 것은, 원 시계열의 차분은 $\mu=0$일 경우에는 상관관계가 없으며, $\mu>0$인 경우에는 양의 상관관계를 가진다는 것을 의미한다. 그러므로 식(9)를 만족하는 즉, 선형 drift를 가지는 일반적인 추계적 과정을 만족하는 시계열 데이타는 모두 이러한 특성을 가지므로 마팅게일이냐 아니면 서브마팅게일이냐를 확연하게 구분할 필요가 있을 때는 원 시계열 데이타의 차분을 이용하여야 한다는 것을 제시해 준다.

지금까지 본 연구에서는 효율적 시장가설을 검증하는데 있어서 마팅게일과 서브마팅게일을 구분하기 위해서는 원 주가의 일차 차분 시계열의 공분산이라는 검정통계량을 이용해야 한다는 것을 보여주었는데, 앞서 언급한 바와 같이 실증적으로 마팅게일과 서브마팅게일을 구분하기 위해서는 이 공분산이라는 검정통계량이 어떠한 분포를 가지는 가를 알아야 가능하다. 우리는 bootstrap이라는 통계적 방법론을 이용하여 이 공분산의 분포를 추정하는 방법론을 Ⅲ장에서 제시한다.

Ⅲ. Bootstrap과 검증방법론

1. Bootstrap

Bootstrap은 Efron(1979)에 의해 제안되고 그 이후로 많은 통계학자에 의해 체계적으로 정립되었다. Beran(1984)에 의하면, bootstrap 방법을 이용한 실제 확률분포의 추정은 일치성(consistency)과 최적성(optimality)을 가진다고 한다.

여기에서 우리는 bootstrap 방법을 이용해서 앞서 추정하려고 하는 $Cov(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$의 평균과 분산 즉, 분포를 구할 수 있다.

먼저 통계량 $\hat{Cov}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^{iid} \sim F$이고 F는 미지의 확률분포 함수라고 하자.

$\hat{Cov}$의 표준편차는 $Sd = \sigma(F, n, \hat{Cov}) = \sigma(F)$이다.

이는 표본의 수가 n이고, $\hat{Cov}$의 표준편차는 미지의 확률분포 F의 함수임을 보여 준다.

표준편차의 bootstrap 추정치는 실함수 F는 알려져 있지 않지만 표본 n개의 실제 데이타로 이루어진 F_n으로부터 복원추출형식으로 n개를 무작위로 끄집어내어 또 다른 bootstrap 표본을 만드는데 이러한 절차를 계속해서 K(충분히 큰 수)번 반복하여 K개의 n개로 이루어진 표본을 만든다면, $SD = \hat{\sigma}(F_n)$이다.

여기에서 F_n은 F의 비모수(nonparametric) 최우추정치(maximum likelihood estimate)이기 때문에 $\hat{SD}$는 Sd의 최우추정치라고 할 수 있다.[8)]

2. 검정통계량의 분포

위에서 설명한 바와 같이 bootstrap을 이용하여 주가의 행태가 마팅게일을 따르는지 아니면 서브마팅게일을 따르는 지로 구분할 수 있도록 하는 통계량의 분포를 구하는 절차는 다음과 같다.

---

8) 자세한 설명은 Efron(1982, pp.27-28)을 참조.

먼저, F_n으로부터, 즉 일련의 차분 시계열 데이타로 모여진 n개의 표본으로부터 복원추출형식으로 하나씩 무작위로 n개의 데이타를 끄집어 내어 가상의 표본을 만든다. 이것을 bootstrap 표본이라고 한다.

둘째, 이 추출한 n개로 이루어진 표본으로부터 $\hat{Cov}^{*}$ 를 계산한다.

이 두 절차를 독립적으로 K(충분히 큰 수)번 반복하면 bootstrap 반복치 $\hat{Cov}^{*1}, \hat{Cov}^{*2}, \ldots, \hat{Cov}^{*K}$를 구할 수 있는데, 이를 이용해 bootstrap 추정치인 표준편차 $\hat{SD} = \left\{ \frac{1}{K-1} \sum_{K=1}^{K} \left\{ \left[\hat{Cov}^{*k} - \hat{Cov}^{*\bullet} \right]^2 \right\} \right\}^{1/2}$를 구할 수 있으며, 또한 평균 $\hat{Cov}^{*\bullet} = \frac{1}{K} \sum_{K=1}^{K} \hat{Cov}^{*k}$도 구할 수 있다.

이러한 bootstrap에 의한 통계적 방법은 Efron(1979,1982), Beran(1984), Bickel& Freedman(1981), Hall(1986), 그리고 Bose(1988)등의 통계학자들에 의해 그 이론의 정당성 및 우월성이 증명되었다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 효율적 시장가설을 검정하는데 있어서 주가의 로그변환방법은 주가 행태의 마팅게일과 서브마팅게일 여부를 구분할 수 없다는 것을 이론적으로 설명하였고, 로그변환없이 주가 데이타 자체에 차분을 한 시계열 데이타를 이용해야 만이 마팅게일과 서브마팅게일을 구분할 수 있다는 것을 보였다. 또한 마팅게일과 서브마팅게일을 구분하기 위해서는 원 주가의 일차 차분 시계열의 공분산이라는 검정 통계량을 이용해야 하는데, 실증적인 검증을 위해서는 통계량의 분포가 무엇인지를 밝히는 것이 선행되어야 추정이 가능하다. 이 문제를 해결하기 위해 또한 본 연구는 많은 통계학자들에 의해 이론적인 정당성 및 우월성이 입증된 bootstrap방법을 이용하였다.

참 고 문 헌

Amihud, Y. & H. Mendelson, 1987, "Trading Mechanisms and Stock Returns : An Empirical Investigation," *Journal of Finance*, 42:533-553.

Beran, R., 1984, "Bootstrap methods in statistics," Jber. d. Dt. Math. Verein., 86:14-30.

Bickel, P. & D. Freedman, 1981, "Some asymptotic theory for the bootstrap," *Annals of Statistics*, 9:1196-1217.

Bose, A., 1988, "Edgeworth correction by bootstrap in autoregressions," *Annals of Statistics*, 16:1709-22.

Efron, B., 1979, "Bootstrap methods; Another look at the jackknife," *Annals of Statistics*, 7:1-26.

Fama, E., 1965, "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38:34-105.

Fama, E., 1970, "Efficient Capital Markets : A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance*, 25:383-417.

Fama, E. & K. French, 1988, "Permanent and Temporary Components of Stock Prices," *Journal of Political Economy*, 96:246-273.

Hall, P., 1986, "On the number of bootstrap simulations required to construct a confidence interval," *Annals of Statistics*, 4:1453-62.

Malliaris, A., 1981, "Martingale Methods in Financial Decision-Making," *SIAM Review*, 23:434-443.

Samuelson, P., 1973, "Proof that Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly," Bell Journal of Economics, 4:369-374.