

반응성 후류유동의 불안정성 해석

신동신*, 홍성제**, 박승호*

Stability Analysis of Reacting Wakes

D. S. Shin*, S. J. Hong** and S. H. Park*

Key Words : Reacting Wakes, Numerical Simulation, Instability

Abstract

This paper investigates the linear stability of wakes with special emphasis on the difference of velocity and density. Velocity and density profiles for laminar flows have gaussian profiles. Incompressible wakes have two generalized inflection points and two unstable modes—sinuous and varicose modes. Sinuous modes are more unstable than varicose modes irrespective of density variation, which shows wakes will be destabilized by sinuous modes. Large velocity difference and density difference leads to more unstable wakes due to large momentum difference.

1. 서론

후류(wake)는 가스터빈 연소실의 flame holder 등에서 발생한다. 후류유동의 안정성 혹은 불안정성은 미연가스와 기연가스의 혼합에 많은 영향을 끼치므로 상당히 중요하다. 이의 해석방법 중의 하나인 선형 불안정성 해석은 다른 수치해석에 비하여 빠르고 경제적으로 수행할 수 있으며, 직접수치해석과 같은 복잡한 수치해석에 필요한 정보나 조건을 제공할 수 있어 국외에서는 학계뿐 아니라 산업계에서도 많이 사용하고 있다. 또한 선형 불안정성 연구는 난류 자유 전단층 유동에 존재하는 large coherent structure의 특성을 정확하게 예측할 수 있어 난류의 중요한 특성을 예측하는 데에도 많은 도움을 주고 있다. 본 연구는 이러한 선형 불안정성 해석을 통하여 후류유동의 물리적인 현상을

이해하기 위한 것이다.

비압축성 및 압축성 전단층, 특히 혼합층의 불안정성 연구는 국외에서는 상당히 연구가 진행되어 왔다. 비압축성 혼합층에서 변곡점(inflectional point)이 존재할 경우 유동이 불안정하다는 것을 처음으로 보인 것은 Rayleigh⁽¹⁾이었다. Rayleigh는 연속한 속도장을 가지는 혼합층에 대해 비점성 평행 선형 불안정성 해석을 수행하였다. Michalke⁽²⁾는 비압축성 혼합층에서 tanh 함수를 사용하여 시간 및 공간에 대한 교란의 불안정성에 대하여 연구하였다. 그의 공간에서의 결과는 실험결과와 잘 일치하였다.

화학반응이 존재하는 혼합층에 대하여 Shin과 Ferziger⁽³⁾는 화학반응을 포함하는 경계층 방정식으로 부터 구한 기본 유동을 사용하여 반응혼합층의 불안정성을 해석하였다. 그들은 상당한 연소열이 존재하는 경우 generalized inflection point에 기인하는 outer mode가 비압축성 반응혼합층에 존재하는 것을 알아내고 그들로부터 연료와 공기의 혼합

* 홍익대학교 기계공학과

** 홍익대학교 대학원

상태를 예측하였으며, 연소열이 존재하는 경우 연료와 공기의 혼합은 화학반응이 없는 경우에 비교하여 그다지 크지 않을 것이라고 보고하였다.

이상과 같이 비압축성 및 압축성 반응혼합층에 대하여는 불안정성 해석 및 실험을 통하여 많은 연구가 진행되었으나 산업용 및 항공기용 가스 터빈 연소실내의 flame holder 주위에 존재하는 화학반응을 포함하는 비압축성 후류유동에 대하여는 그다지 연구가 진행되지 않은 상태이다. 따라서 본 연구는 밀도구배를 가지는 비압축성 후류유동에 있어서 속도변화 및 밀도의 변화가 있는 경우에 대하여 불안정성 해석을 수행하였다. 특히 밀도변화가 있는 후류유동은 연소기의 flame holder 주위의 유동 등에 적용할 수 있을 것이다.

2. 교란 방정식과 기본 유동

2.1 지배 방정식 및 수치해법

자유전단층 유동에서 점성은 교란을 약화시키는 역할만을 하기 때문에 본 연구에서는 단순한 비점성 안정성 문제만을 고려하였다. 지배 방정식은 Navier-Stokes 방정식에서 확산항을 제외한 Euler 방정식을 고려하였다. 층류유동의 압력은 일정하다고 가정한다. 질량, 운동량 보존식과 이상기체 방정식에서의 모든 변수들은 자유유동의 변수들 및 초기 속도분포의 vorticity thickness로 무차원화하면, 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = -(\gamma - 1) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$1 = \rho T \quad (4)$$

여기서, ρ , u_i , T 는 밀도, 속도 및 온도를 나타내며, 아래첨자 i 는 x , y , z 방향을 각각 의미한다. vorticity thickness는 다음과 같이 정의한다.

$$\delta_w^* = \frac{U_\infty^* - U_c^*}{|du^*/dy^*|_{\max}} \quad (5)$$

윗첨자 *는 변수가 차원을 가지고 있음을 의미한다. 교란 방정식을 유도하기 위해서 층류 유동이 평행하여 유동 방향에 수직인 방향의 구배만이 존재한다고 가정한다. 층류 유동의 속도, 밀도, 온도가 모두 지정되어야만 유동의 안정성을 해석할 수가 있다. 모든 변수들은 층류 유동의 값과 움직이는 파장의 형태를 가지는 작은 교란의 합으로 생각될 수가 있다.

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(y) + f(x, y, z, t) \quad (6)$$

$$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y) \exp[i(\alpha x + \beta y - \omega t)] \quad (7)$$

$\bar{f}(y)$ 는 층류 유동의 값이며, \hat{f} 는 오직 y 만의 고유 함수이다. 여기서 α 와 β 는 x 와 z 방향의 wave number를 나타내고, 주파수(frequency), ω 와 복소파장속도(Complex wave velocity), c 와는 $\omega = c\alpha$ 의 관계를 가진다. α 와 ω 는 시간 안정성 해석 및 공간 안정성 해석에 따라서 각각 실수와 복소수의 형태를 갖는다. 시간 안정성에 대한 해석인 경우 ω 는 복소수의 형태를 가지며, α 는 실수의 형태를 갖고, 공간 안정성에 관한 해석이면 α 가 복소수의 형태를 가지며, ω 는 실수의 형태를 가지게 된다. 각각의 성장율(amplification rates)은 ω_i 와 $-\alpha_i$ 가 된다. 본 연구에서는 공간적 안정성 해석을 고려하였다.

식 (6)과 (7)을 식 (1), (2), (3) 및 (4)에 대입하고, 교란의 곱을 무시하면 다음과 같은 압력에 대한 교란방정식을 구할 수 있다.

$$\hat{p}'' - \left\{ \frac{2\alpha \bar{u}'}{(\alpha \bar{u} - \omega)} + \frac{\bar{\rho}}{T} (\alpha \bar{u} - \omega)^2 [RXM] \right\} \hat{p} - (\alpha^2 + \beta^2) \hat{p} = 0 \quad (8)$$

경계조건은 위의 교란방정식의 경계에서의 극한값을 고려함으로써 구한다.

위의 문제는 고유치 문제가 되므로 shooting법과 Newton-Raphson법에 근거를 두는 반복법을 사용하여 풀도록 한다. 우선 고유치를 가정한 뒤, 가정한 고유치로 부터 경계조건을 구한다. ODE(Ordinary Differential Equation)를 사용하여

양쪽 경계로부터 중심(y=0)으로 방정식의 적분을 수행한 후, 양쪽 경계로부터 적분되어 구해진 \hat{p} 와 \hat{p}' 의 값을 비교하여 수렴여부를 결정한다. 모든 고유함수들은 \hat{u} 의 최대절대값이 1이 되도록 표준화 하였다.

2.2 기본 유동

불안정성 해석을 수행하는 기본 유동의 속도장은 다음과 같이 Gaussian Profile로 가정하였다.

$$\bar{U} = 1 - \Delta u_c e^{-y^2} \quad (9)$$

여기서, Δu_c 는 자유유동과 후류의 중심선에서 속도와의 차이를 나타내는 값으로 0.2, 0.4, 0.6, 0.8의 경우를 고려하였다. Fig. 1에 기본 유동의 속도형태를 표시하였다.

온도장도 역시 Gaussian Profile로 다음과 같이 가정하였다.

$$\bar{T} = 1 + \Delta T_c e^{-y^2} \quad (10)$$

여기서, ΔT_c 는 자유유동과 후류의 중심선에서의 온도와의 차이로 0, 1, 2, 3, 4의 경우를 고려하였다. 밀도는 무차원화된 이상기체의 방정식(식 (4))으로부터 구하였다. Fig. 2에 온도장을 표시하였다.

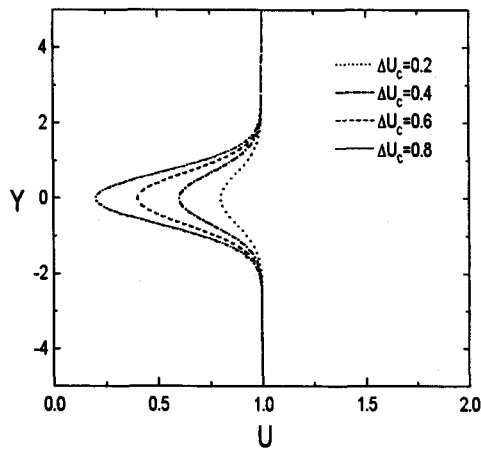


Fig. 1 Gaussian mean velocity profiles.

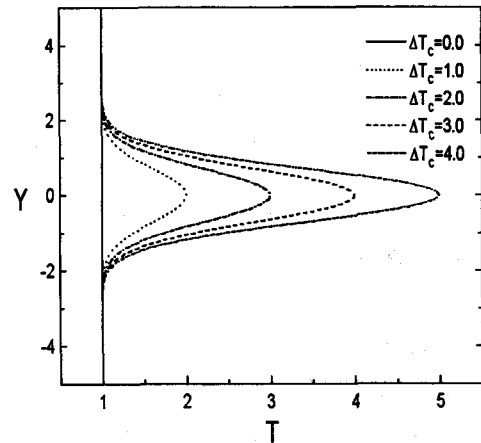


Fig. 2 Gaussian mean temperature profiles.

3. 후류 유동에 대한 불안정성 해석

3.1 변곡점

Rayleigh의 변곡점 정리⁽¹⁾에 의하면, 비압축성 유체가 불안정하기 위해서는 층류 유동이 변곡점을 가지고 있어야 한다. 이 조건은 유동영역 내에서 \bar{u}'' 이 적어도 한 번이상의 부호의 변화가 있거나 \bar{u}' 이 극값을 가지는 것을 요구한다. Fjørtoft⁽⁴⁾는 위의 조건을 더욱 제한하여 유동이 불안정하기 위해서는 유동 영역내에서 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 이어야 한다고 밝혔다. 여기서 $\bar{u}_s = \bar{u}(y_s)$ 로 y_s 는 \bar{u}'' 이 0이 되는 점이다. 기본 유동에 대해서 위의 조건들을 만족시키는 점들을 찾아보았다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 비압축성 유동의 경우, 후류유동은 중심선에서의 속도의 차이에 관계없이 중심선에 대하여 대칭인 일정한 점 ($y = \pm 0.707$)에서 변곡점을 2개 갖는다. 불안정성의 더욱 제한적인 조건인 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 를 조사한 결과 모두 제한적 조건을 만족하였으며, 따라서 후류 유동은 두 개의 불안정성 모드를 갖게 된다.

Δu_c	0.2	0.4	0.6	0.8
\bar{u}_s	0.8787	0.7574	0.6360	0.5147
y_s	± 0.707	± 0.707	± 0.707	± 0.707

Table 1. Inflection points and velocities at inflection points in cold flows.

밀도 변화가 있는 유동의 경우, 유동이 불안정해지기 위해서는 유동 영역내에서 층류 유동이 $(\rho \bar{u}') = 0$ 의 조건을 만족하고, 더욱 제한적인 조건인 $(\rho \bar{u}')(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 을 만족하여야 한다. 이는 층류 유동이 한 개 이상의 변곡점을 갖을 것을 요구한다. Δu_c 가 0.8인 경우에 기본 유동에서 이 조건을 만족시키는 점들을 찾아내어 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4에 보는 바와 같이 ΔT_c 가 증가함에 따라서 변곡점의 위치가 중심에서 멀어지는 것을 알 수 있다. 불안정성의 더욱 제한적인 조건인 $(\rho \bar{u}')(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 역시 모두 만족되어 반응성 후류 유동은 비반응성 유동과 마찬가지로 두 개의 불안정성 모드를 갖게 된다.

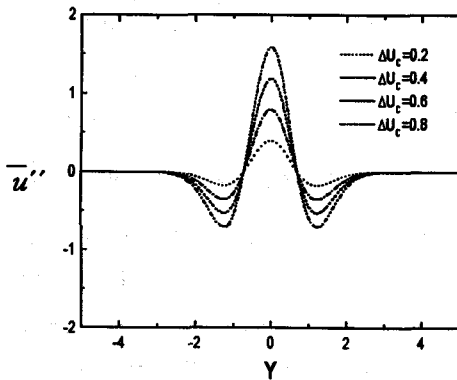


Fig. 3 Second derivatives \bar{u}'' in cold mean flows.

ΔT_c	0	1	2	3	4
\bar{u}_s	0.5147	0.6324	0.6829	0.7129	0.7334
y_s	± 0.707	± 0.8818	± 0.9620	± 1.0123	± 1.0483

Table 2. Inflection points and velocities at inflection points when density gradient exists. $\Delta u_c = 0.8$.

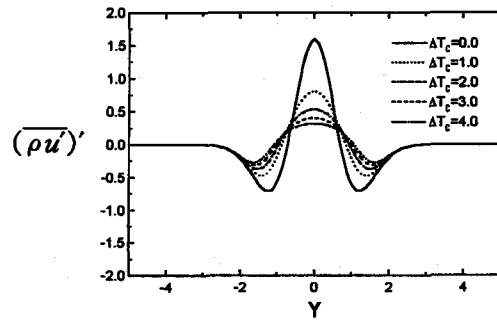
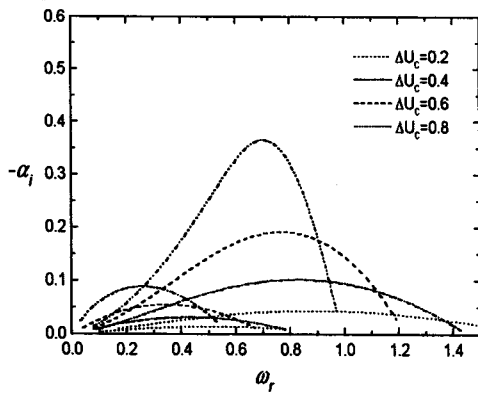


Fig. 4 Second derivatives $(\rho \bar{u}')'$ in mean flows with density gradients. $\Delta u_c = 0.8$.

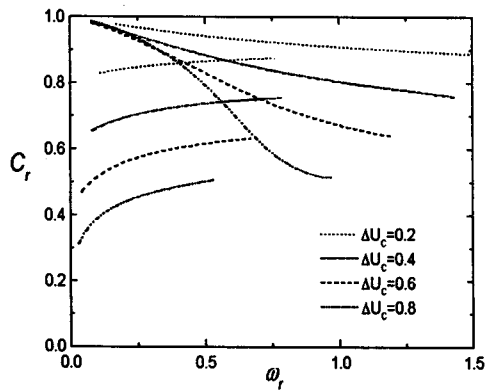
3.2 불안정성 해석

Fig. 5는 밀도 변화가 없는 경우 주파수 ω_r 에 대한 후류유동의 x 방향의 성장률 $-a_i$ 및 위상 속도 c_r 을 나타낸 것이다. 그림은 2개의 불안정성 모드가 존재함을 보여주고 있다. Fig. 5(a)에서 보는 바와 같이 Δu_c 가 증가함에 따라서 자유유동과 유동중심부와의 속도구배가 커지므로 성장률이 증가한다. Fig. 5(b)에서 윗 상단의 한 모드는 자유유동에 가까운 위상속도에서 시작하여 ω_r 이 증가함에 따라 변곡점에서의 자유유동의 속도로 접근함을 보이고 있다. 그림 하단의 모드도 후류 유동의 최저 속도에서 시작하여 변곡점에서의 속도로 접근함을 보여준다.

이 두 모드들의 각각의 특성을 파악하기 위하여 각 모드의 가장 불안정한 성장률을 선택하여 속도 및 압력의 고유 함수를 그려보았다.



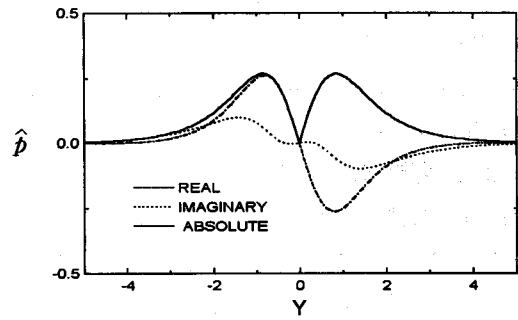
(a)



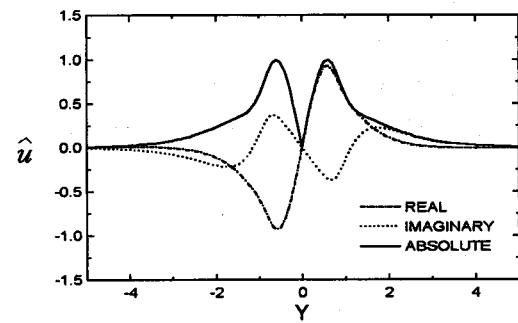
(b)

Fig. 5 (a) Amplification rates (b) phase speeds vs. frequency with velocity changes in cold flows.

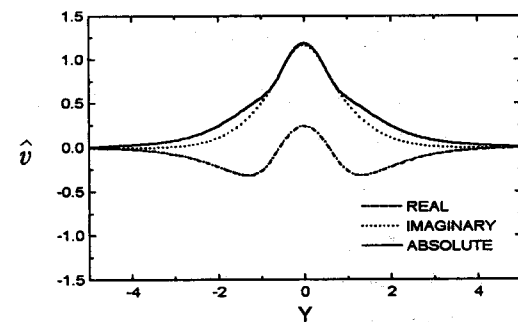
Fig. 6은 자유 유동에 가까운 위상 속도에서 시작하여 ω_r 이 증가함에 따라 변곡점에서의 자유유동의 속도로 접근하는 모드의 가장 불안정한 성장률의 경우의 교란의 고유함수 \hat{p} , \hat{u} , \hat{v} 를 각각 나타낸 것이다. 고유함수 \hat{p} 와 \hat{u} 가 후류의 중심선 ($y=0$)에서 0이 되기 때문에 이 모드를 sinuous 모드라 부른다. \hat{v} 는 \hat{u} 와 달리 후류의 중심선에서 0이 되지 않는다.



(a)



(b)



(c)

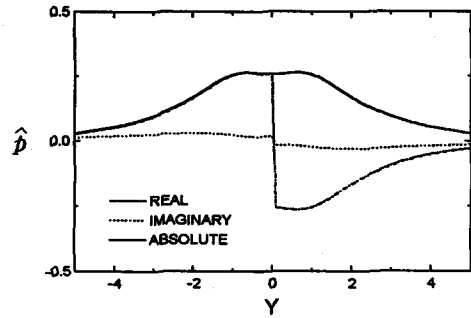
Fig. 6 Eigen functions of the most unstable sinuous mode in cold flows. (a) \hat{p} (b) \hat{u} (c) \hat{v} .

중심선에서의 속도에서 시작하여 변곡점에서의 속도로 접근하는 모드의 가장 불안정한 성장률의 경

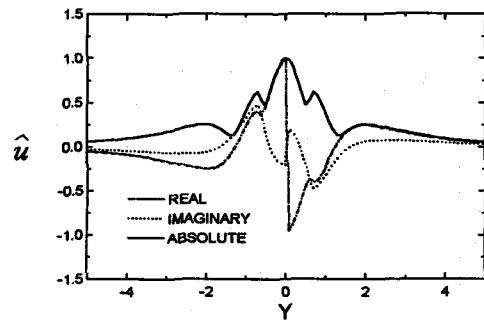
우의 교란의 고유 함수를 Fig. 7에 나타내었다. 이 모드는 sinuous 모드와 달리 후류의 중심선에서 속도교란의 함수인 \hat{v} 만이 0이 되므로 varicose 모드, 또는 wall 모드라 부른다.

후류유동의 경우 Fig. 5에서 볼 수 있는 바와 같이 sinuous mode의 가장 불안정한 모드가 varicose mode의 가장 불안정한 모드보다 불안정하며, 위상 속도가 빠르다. 따라서 후류유동은 자유유동에 가까운 위상속도를 가지는 sinuous mode들에 의하여 층류유동으로부터 천이를 거쳐 난류로 전개될 것을 추측할 수 있다. 또한 sinuous mode가 varicose mode보다 주파수가 크므로 파장이 짧게 된다. 속도구배는 sinuous mode와 varicose mode를 더욱 불안정하게 만들고 동시에 주파수도 짧게 함을 보이고 있다. Fig. 5의 위상속도는 속도구배가 커짐에 따라서 작아짐을 보이고 있다. Fig. 3의 변곡점이 중심선에 대하여 대칭이고 두 개의 변곡점에서의 위상속도가 같으므로, sinuous mode와 varicose mode는 각각의 변곡점에 대응하는 반응 혼합층의 복수불안정성 모드와는 달리 두 개의 변곡점에 함께 대응하는 불안정성 mode라 할 수 있다.

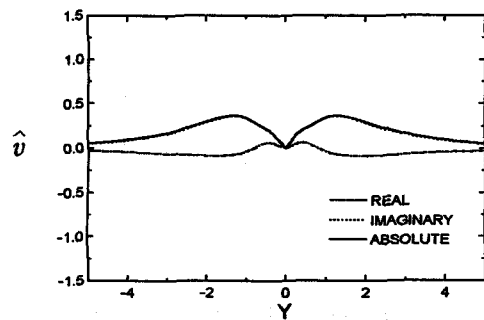
Fig. 8은 밀도 변화가 있는 경우 ($\Delta u_c = 0.8$)에 주파수 ω_r 에 대한 후류유동의 x 방향의 성장을 및 위상 속도를 나타낸 것이다. 역시 두 개의 불안정 모드가 존재함을 알 수 있다. ΔT_c 가 증가함에 따라서 유동은 더욱 불안정해지는 것을 알 수 있다. 이는 연소와 같은 열발생이 있을 경우 보염기 후방의 유동이 연소반응이 없는 경우에 비하여 더욱 불안정하여질 것을 시사하여 미연가스와 기연가스의 혼합이 향상될 수도 있음을 보여준다. 최대 성장률을 가지는 주파수는 Δu_c 가 증가하는 경우와 마찬가지로 ΔT_c 가 증가함에 따라 작아진다. 속도구배가 커지는 경우와 마찬가지로 밀도구배가 커지면 위상속도는 낮아짐을 알 수 있다. 하지만, 밀도 변화가 있는 유동의 경우에는 모드들이 각각의 변곡점의 속도로 접근하지는 않는다.



(a)

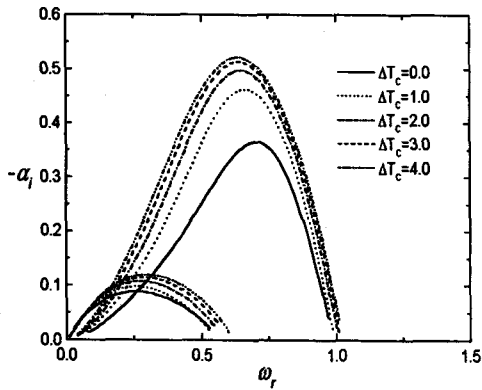


(b)

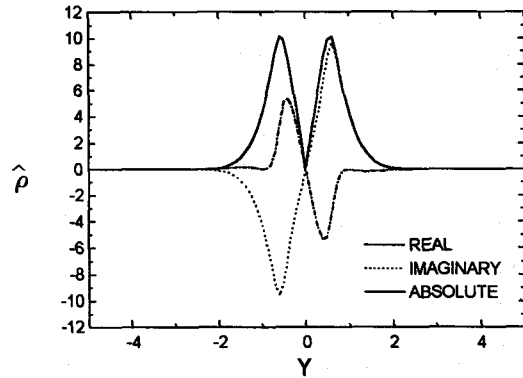


(c)

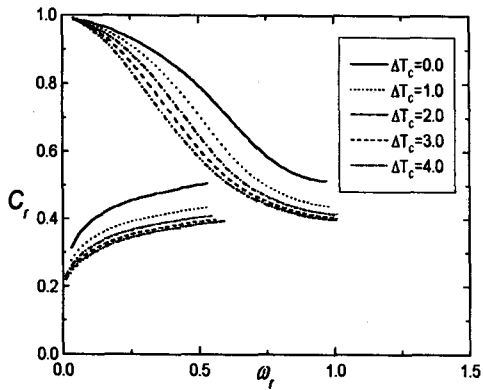
Fig. 7 Eigen functions of the most unstable varicose mode in cold flows. (a) \hat{p} (b) \hat{u} (c) \hat{v} .



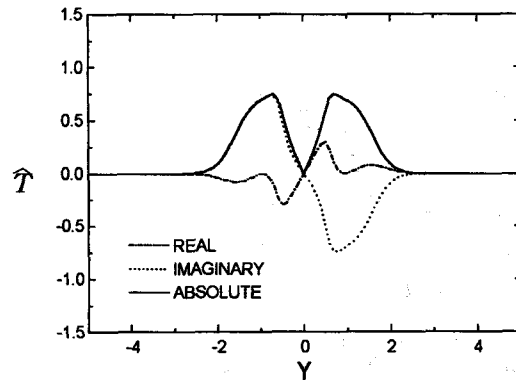
(a)



(a)



(b)



(b)

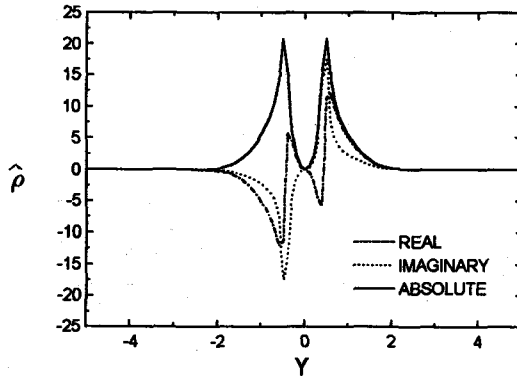
Fig. 8 (a) Amplification rates (b) phase speeds vs. frequency with velocity changes when density gradients exist.

Fig. 9 Eigen functions of the most unstable sinusoidal mode in flows with density gradient.

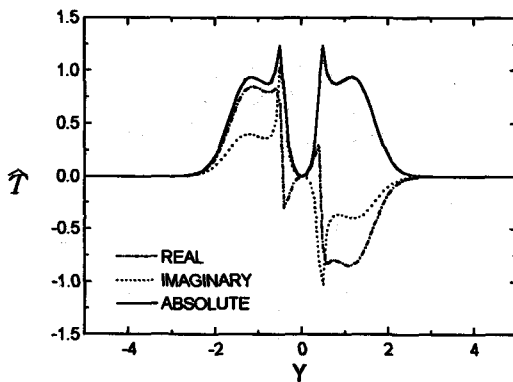
$\Delta u_c = 0.8, \Delta T_c = 4.$ (a) $\hat{\rho}$ (b) \hat{T} .

이들 모드의 가장 불안정한 성장률에 대한 고유함수는 밀도변화가 없는 경우와 마찬가지로 sinusoidal mode의 경우 고유함수 \hat{p} 와 \hat{u} 가 후류의 중심선($y=0$)에서 0이 되었으며, varicose mode의 경우도 그다지 큰 변화를 보이지 않았다. 밀도변화가 있으면 밀도 및 온도의 교란이 존재하므로 그들의 고유함수들을 살펴보았다. Fig. 9는 반응성 유동 ($\Delta T_c = 4$)인 경우의 sinusoidal mode의 가장 불안정

한 성장률을 선택하여 밀도 및 온도의 고유함수를 나타낸 것이다. 이들 고유함수가 역시 후류의 중심선 ($y=0$)에서 0이 되는 것을 알 수 있다. Fig. 10의 varicose mode의 밀도 및 온도의 교란 고유함수도 sinusoidal mode의 경우와 마찬가지로 후류의 중심선 ($y=0$)에서 0이 되나 그 형태는 다름을 보이고 있다. 반응성 유동에서도 sinusoidal mode가 varicose mode보다 불안정하기 때문에 위와 같은



(a)



(b)

Fig. 10 Eigen functions of the most unstable varicose mode in flows with density gradient.

$\Delta u_c = 0.8$, $\Delta T_c = 4$. (a) $\hat{\rho}$ (b) \hat{T} .

온도 및 밀도의 교란 고유함수 중에서도 sinuous mode의 고유함수들이 유동의 발달에 지배적인 것으로 사료된다.

4. 결론

밀도변화가 없는 경우 및 있는 경우의 비압축성 후류유동에 대하여 선형 불안정성 해석을 수행하였

다. 기본유동의 속도장 및 온도장은 해석적 함수의 형태를 사용하였다. 후류유동은 두 개의 변곡점을 가지며 불안정성 해석은 sinuous mode와 varicose mode의 두 개의 불안정성 모드가 있음을 보였다. 밀도 변화가 있는 경우나 밀도 변화가 없는 경우 모두 sinuous mode의 가장 불안정한 mode가 varicose mode의 가장 불안정한 모드보다 더 불안정함을 보여주어 후류 유동은 자유 유동에 가까운 위상 속도를 가지는 sinuous mode에 의해 지배될 것임을 예측할 수 있다. 속도구배가 클수록, 밀도구배가 클수록 운동량의 차이가 커지므로 후류 유동은 더욱 불안정하여진다.

후기

이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 신진교수과제(04-E-0471) 연구비에 의하여 연구되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) L. Rayleigh, "On the Stability, or Instability of Certain Fluid Motions," Proc. London Math. Soc. 11, 1980, pp. 57-70.
- (2) A. Michalke, "On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile," J. Fluid Mech. 19, 1965, pp. 543-556.
- (3) D. S. Shin and J. H. Ferziger, "Linear Stability Analysis of Reacting Mixing Layer," AIAA Journal, 29, 1991, pp. 1634-1642.
- (4) Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1982, Hydrodynamic Stability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, UK.