

## 카오스 이론의 Lyapunov 지수를 응용한 안정상태 시뮬레이션의 출력분석\*

Output Analysis for Steady-State Simulation Using Lyapunov Exponent in Chaos  
Theory

이영해\*\*, 오형술\*\*\*

Young-Hae Lee\*\* and Hyung-Sool Oh\*\*\*

### Abstract

This paper proposes a sequential procedure which can be used to determine a truncation point and run length to reduce or remove bias owing to artificial startup conditions in simulations aimed at estimating steady-state behavior. It is based on the idea of Lyapunov exponent in chaos theory. The performance measures considered are relative bias, coverage, estimated relative half-width of the confidence interval, and mean amount of deleted data.

### 1. 서론

시뮬레이션 기법을 이용하기 위해서는 대상 시스템의 초기상태(initial conditions)를 안정상태의 값으로 설정해 주어야 만 하나 시뮬레이션을 수행하기 전에 안정상태의 값으로써 대상 시스템의 상태를 초기화하는 것은 사실상 불가능하다. 따라서, 시뮬레이션 수행

시 시스템의 초기상태를 임의의 값으로 설정해주게 되며, 이때 설정해주는 초기상태에 따라서 대상 시스템의 수행결과 및 해석결과는 전혀 다를 수도 있다. 특히, 안정상태 시뮬레이션(steady-state simulation)에 의해서 모수를 추정하는 경우에는 초기상태의 설정에 따른 편의(bias)가 심각한 문제로 지적되어오고 있다[6,12]. 따라서, 현재의 시뮬레이션 기

\* 이 연구는 1994년도 학술진흥재단 연구비 지원에 의해 수행되었음.

\*\* 한양대학교 산업공학과

\*\*\* 수원전문대학 공업경영과

법이 더욱 많은 분야에서 응용되어지고, 적용된 시스템의 평가결과가 더욱 정확하기 위해서는 첫째, 안정상태의 출력자료만을 가지고 분석해야 하며, 이를 위해서는 초기상태에 의한 영향이 제거되는 시점("truncation point" 또는 "warm up period")을 정확하게 결정해주어야 한다. 두번째로, 시뮬레이션의 길이가 충분치 않은 경우의 출력자료는 대상 시스템의 특성을 제대로 나타낼 수 없으며, 이때의 출력자료는 대상 시스템에 대한 모수 추정시 편의를 일으키는 또다른 원인이 된다. 따라서, 현재의 시뮬레이션 길이로 대상 시스템의 안정상태를 표현하기에 충분한 지의 여부를 결정할 수 있는 방법을 강구해야 한다.

본 논문에서는 안정상태 시뮬레이션 기법 적용시 가장 문제가 되고 있는 위의 2가지 문제점을 해결함으로써 시뮬레이션 기법의 유효성을 개선시키고자 하는것이 연구의 목적이며, 이를 위해 카오스 이론의 Lyapunov 지수를 본 연구에 응용하였다.

Truncation point의 결정 방법에 대한 기존연구로서 Gafarian[4]은 안정상태 시뮬레이션에서 점추정치에 미치는 초기조건의 영향을 줄이는 4가지의 방법을 제시했으나 제시된 방법 모두 현실적으로 큰 효과가 없는 것으로 판명되었다. Welch[14,15]는 시뮬레이션 출력자료  $X_1, X_2, \dots$ 의 기대치로부터 계산되어진 이동평균이 모수치의 수준에 이르러서는 평평해진다는 생각에 근거하여 truncation point를 결정하는 방법을 제시하였다. 그러나, 모든 반복 실험의 결과에 대해서 동일한 truncation point를 적용한다는 문제점이 있다. Kelton 과 Law[16]는 반복-제거 방법을

위한 truncation point와 반복회수의 결정방법을 제시하였으나 출력자료의 기대치를 단조 증가 함수로 가정하였기 때문에 현실문제에 적용하는 데에는 적합치 않다.

Schruben[7,8,17]은 truncation point의 결정 방법을 제시한 것은 아니지만, 초기조건의 설정값에 따른 편의가 출력자료에 포함되어있는지의 여부를 표준화 시계열 자료(standardized time series)와  $\chi^2$  분포에 의해서 검정하는 방법을 개발하였다. Cash[3]는 Schruben[7]의 표준화 시계열 자료 방법과 F 분포를 이용하여 초기상태에 의한 편의가 출력자료에 포함되어 있는지의 여부를 검정하는 4가지 방법을 제시하였으며, 여기서 제시된 방법을 이용하여 truncation point를 결정하는 방법도 함께 제시하였다.

## 2. 카오스 이론 및 Lyapunov 지수

### 2.1 카오스 운동의 특성

카오스(chaos)는 자연계에서 흔히 관찰되는 불규칙적이고 무질서한 현상들로서 최근에 들어서야 체계적으로 연구되기 시작하였으나, 컴퓨터의 발전과 맞물려 폭발적으로 성장하고 있다. 그 예로서는 유체의 난류, 뇌파의 불규칙한 리듬, 전기회로의 기이한 잡음, 주가 및 경제지표의 동향 등을 들 수 있다. 이처럼, 초기조건에서의 작은 차이가 마지막 현상속에 매우 거대한 차이를 만들어 내거나 또는 외관상 무질서해 보이는 현상 가운데 숨겨진 질서구조를 갖고있는 운동이 카오스 운동(chaotic motion)으로서 비선형 시스템에서만 발생하는 운동이다.

카오스 용어에 대해서 보편적으로 정의된

개념이 아직까지는 없으나 “초기상태의 아주 작은 변화에 대해서도 민감하게 작용하는 결정적 시스템(deterministic system)에서의 비주기적 움직임(aperiodic long-term behavior)”을 카오스라고 정의할 수 있으며, 이 정의에 대해서는 대부분의 사람들이 동의하고 있다 [11].

시간의 흐름에 따라 변화하는 시스템의 특성을 분석하기 위하여 사용하는 시계열 자료는 일반적인 운동의 경우 시스템의 특성중 부분만을 보여준다고 할 수 있다. 하지만 그 운동이 불규칙한 운동이 아닌 카오스 운동일 때, 시계열 자료로 부터 시스템 전체의 특성에 대한 정보를 얻어내는 것이 가능하다. Packard[13]에 의해서 제안된 이 방법을 위상공간 재구성(phase space reconstruction) 방

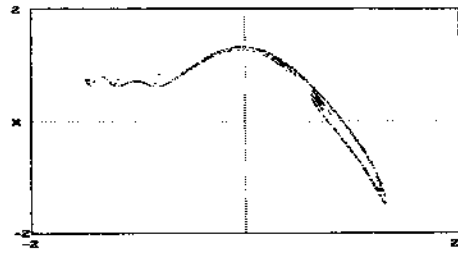
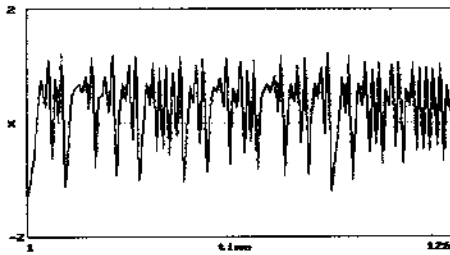
법이라 하며 그 원리는 다음과 같다. 시스템의 상태가 2개의 변수  $(x,y)$ 로 표현되는 2차원 위상공간 내에서 결정론적 운동을 하는 시스템을 가정하자. 시스템의 운동이 결정론적이라는 것은 시스템의 상태  $(x(t_\tau),y(t+\tau))$ 가 시간  $t$ 에서의 상태에 의존하여 유일하게 결정된다는 것을 의미하며, 이는 다음과 같은 관계를 만족시키는 함수  $f(x,y)$ 와  $g(x,y)$ 가 존재한다는 것을 의미한다.

$$x(t + \tau) = f(x(t),y(t))$$

$$y(t + \tau) = g(x(t),y(t))$$

첫번째 방정식으로 부터 다시 다음과 같은 관계를 유추할 수 있다.

(a) Chaotic motion



(b) Random motion

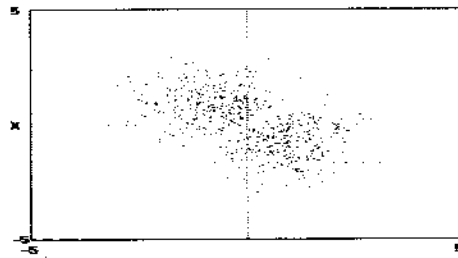
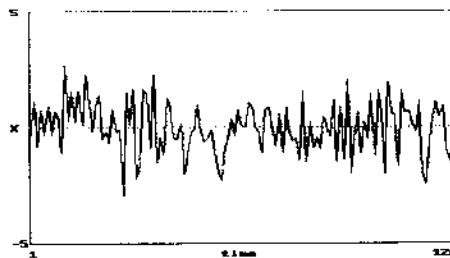


Figure 2.1 The characteristic of chaotic motion and random motion

$$y(t) = f(x(t), x(t + \tau))$$

즉,  $x(t + \tau)$ 가  $x(t)$ 와  $y(t)$ 에 의해 결정된다는 것은  $y(t)$ 가  $x(t)$ 와  $x(t + \tau)$ 에 의해서 결정된다는 것과 동일시 될 수 있다. 따라서, 다음과 같이 매 시간  $\tau=1$ 마다 측정된  $x$  값만으로 구성된 2차원 벡터의 시계열 자료인

$$(x(0), x(1)), (x(1), x(2)), (x(2), x(3)), \dots$$

는 원래 2차원 위상공간에서 시스템의 운동을 나타내는 시계열 자료인

$$(x(0), y(0)), (x(1), y(1)), (x(2), y(2)), \dots$$

와 동일한 정보를 갖고 있다고 할 수 있다.

일반적으로, 배후의 운동 방정식이 알려지지 않은 시계열 자료에 대해 시간  $t$ 에서의 상태벡터는 다음 식 (2.1)과 같이 재구성되어지며, 이때의 시스템 운동이 불규칙 운동이 아닌 경우 Figure 2.1에서 보는 것처럼 재구성된 위상공간에서 시스템을 지배하는 배후의 숨은 질서를 파악할 수 있다[13].

$$\xi(t) = (x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (d-1)\tau)) \tag{2.1}$$

여기서,  $\tau = \text{delay time}$   
 $d = \text{embedding dimension}$

### 2.2 Lyapunov 지수의 특성

카오스 운동은 초기조건에 매우 민감하여 초기의 아주 근사한 상태가 시간이 지남에 따라 급격히 다른 상태로 진화하는 특성이 있다. 이와 같은 카오스 운동의 민감도를 정

량화 하는 척도가 Lyapunov 지수이며, 이는 다음과 같이 정의한다[5].

위상공간에서 인접한 두 궤적(trajjectory)의 점들간의 거리는 시간이 지남에 따라 지수함수적으로 발산하게 되는데, 초기에 두 점간의 거리를  $d(0)$  라고 하면  $t$  시간 후의 거리  $d(t)$  는 다음과 같다.

$$d(t) = d(0)e^{\lambda t}$$

여기서 단위시간당 궤적간의 발산율인  $\lambda$ 를 Lyapunov 지수라고 하며,  $\lambda > 0$  이면 카오스 운동을 의미한다. 그러나, 실제로  $d(t)$  는 무한히 길어지지 않고 시스템의 운동과 관련된 위상공간의 크기에 포화하게 되는데, 이와 같은 제한된 공간에 의한 비선형 효과를 피하기 위해 식 (2.2)에 의해  $\lambda$ 를 계산하는 것이 더욱 유용하다.

$$\lambda = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{k=1}^m \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \tag{2.2}$$

$L(t_{k-1})$  : 기준궤적의 초기위치와 기준궤적에서 가장가까운 궤적간의 유클리디안 거리(Euclidean distance)

$L'(t_k)$  : 시간  $t_k$  경과 후 기준 궤적의 위치와 가장 가까운 궤적간의 유클리디안 거리

$$t_k = t_{k-1} + T$$

$T$  :  $\lambda$ 를 계산하기 위해 사용하는 궤적의 전개시간(evolution time)

Figure 2.2 는 Lyapunov 지수 계산에 가장 널리 이용되는 Wolf[10]의 방법을 개략적으로 보여주고 있다. 먼저 재구성된 위상공간 내에서 기준궤적을 선택한다. 시간  $t_0$ 에서 기

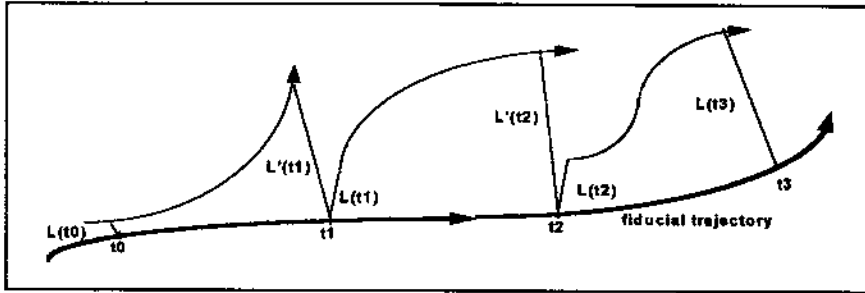


Figure 2.2 A schematic representation of the evolution and replacement procedure

준계적과 인접한 점을 찾아 정해진 시간  $T$  만큼 두개의 궤적을 따라간다. 기준궤적에 인접한 점이 시간  $t_1 = (t_0 + T)$ 에서 기준궤적과 충분히 멀어지면 거리  $L'(t_1)$ 와  $L(t_0)$ 간의 비율에 대해  $\log$  를 취하여  $T$  로 나누면 이것이 시간  $t_0$ 에서  $t_1$ 까지 Lyapunov 지수의 평균 값이 된다. 이때,  $T$  가 너무 길어서  $L'(t_1)$ 가 너무 크게되거나,  $L(t_0)$ 가 카오스 운동의 불안정 방향으로 미쳐 발산하지 못할 정도로  $T$  가 너무 작지 않도록 적절한 값을 선택해주어야만 한다. 시간  $t_1$ 에서 가정 인접한 다른 점을 택해 같은 과정을 반복한다. 이와 같이 재구성된 모든 점들에 대해 인접점을  $m$  번 교체하면서 위의 과정을 반복하면 최대 Lyapunov 지수를 얻는다.

Lyapunov 지수의 개념은 고유치의 개념을 일반화 한 것으로서[9], 기존의 고유치 개념은 고정된 하나의 값에 의해서만 시스템의 안정성을 평가하는 개념이기 때문에 카오스 운동을 하는 시스템의 안정성 평가에는 적합하지 않다. 따라서, 카오스 운동을 하는 시스템의 안정성의 평가에 고유치의 개념을 이용하기 위해서는 시스템의 궤적 전체에 걸쳐서 안정성을 평가할 수 있도록 고유치의 개념을

일반화 시켜야 한다.

### 2.3 Lyapunov 지수와 출력분석간의 관계

출력분석을 위하여 본 논문에서 사용하는 반복-제거 방법을 실제 적용하는데 있어서 가장 중요한 문제는 각 반복으로 부터 얻은 출력자료에서 초기상태에 의해 생기는 불안정상태(transient state) 부분의 출력자료를 제거하는 것이다. 시뮬레이션이 진행되는 과정중에 truncation point 를 축차적으로 정확히 결정할 수 있다면 현재의 시뮬레이션에 의한 출력자료가 시스템의 안정상태만을 포함하게 되며, 시뮬레이션의 경제적 길이를 결정하는 문제도 간단해지게 될 것이다. 따라서, 본 논문에서는 대상 시스템의 운동특성을 정상운동과 카오스운동으로 구별하는 척도인 Lyapunov 지수의 특성을 truncation point 의 자동검출 기법 개발에 응용하였다.

본 논문에서는 Lyapunov 지수가 시스템 전체 구간에 대한 평균 지수변화율에 의해 시스템의 특성을 평가한다는 점에 착안하여 출력자료간의 지수변화율에 의해 truncation point 를 축차적으로 결정하고자 하는 것이다.

이를 위하여 본 논문에서 사용하는 수식의 지수변화율 값의 변화가 불안정상태와 안정상태의 동적 특성을 반영할 수 있는지의 여부를 파악하기 위해서 시계열 자료와 위상공간 재구성 방법에 의해서 평가하였다. 평가 결과로부터 본 논문에서 사용하는 식 (3.1) 과 (3.2) 에 의해 원래의 출력자료가 갖는 동적 특성의 평가가 가능하며, 위상공간 재구성 방법에 의해 평가한 결과에서도 이론치 근처에서 큰 편차없이 진동하는 출력자료의 특성을 제대로 반영하고 있음을 알 수 있다 [1].

### 3. Truncation point 의 자동검출 방법

시뮬레이션이 진행되는 과정중에 출력자료간의 지수 변화율에 의하여 truncation point 를 결정하기 위한 방법으로서 본 논문에서 제시하는 방법을 살펴보면 다음과 같다.

#### 3.1 방법 1 (M1)

Truncation point 를 결정하기 위한 첫번째 방법은 (3.1)식을 이용하는 방법으로서 연속되는 2개의 출력자료간의 지수변화율을 이용하는 방법이다.

$$\lambda_i = \log_2 \frac{x_{i+1}}{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, RL-1 \quad (3.1)$$

$x_i$  :  $i$ 번째 출력자료의 값

$RL$  : 시뮬레이션의 길이

Truncation point를 축차적으로 결정하기 위해 M1 방법에서 사용하는 결정기준은 다음과 같다.

(1) 결정기준 ( $C_1$ ) :  $\lambda_i$  는 규정치보다 작거나 같아야만 한다.

안정상태 이후 시스템의 동적 특성은 임의의 분포에 수렴하기 때문에 지수 변화율의 값이 일정한 범위내에서 존재하게 된다[1,2]. 지수 변화율에 대한 범위로서 본 연구에서 고려하는 규정치는 평균 변화율 5% 를 기준으로 하여 계산되어진 값이다.

$$-0.036 \leq \log_2 \frac{[a(1 \pm 0.025)]}{a} \leq 0.036$$

(2) 결정기준 ( $C_2$ ) :  $C_1$ 의 조건을 만족시키는  $\lambda_i$ 가 양의 값이나 음의 값을 연속적으로 30 번 이상 가져서는 안된다.

시스템의 상태가 안정상태이면 시스템의 특성이 임의의 분포에 수렴하기 때문에 지수 변화율의 변화에 특정한 경향이 나타나서는 안된다. 따라서, 특정한 경향을 배제하기 위한 기준으로서의  $C_2$  값은 현재의 출력자료에 대해 본 연구에서 허용하는 평균 변화율 5% 를 기준했을 때 연속적으로 증가하여 현재의 출력값의 2배가 되는 시점인  $p$  를 기준으로 설정하였다.

$$x_p = (1 + 0.025)^p x_0$$

$$(1 + 0.025)^p = 2$$

$$p = \frac{\ln 2}{\ln(1 + 0.025)} \cdot 29$$

Truncation point 를 결정하는 M1 방법을 단계별로 살펴보면 다음과 같다.

#### [단계 1]

출력자료에 대하여 지수 변화율  $\lambda_i$ 를 계산

한 다음, 연속적으로  $\lambda_i$ 가 -0.036과 0.036 사이의 값을 갖는 회수  $N$  를 계산한다.

[단계 2]

$\lambda_i$ 의 값이 연속적으로 양의 값을 갖거나 음의 값을 갖는 회수  $M$  을 계산한다.

[단계 3]

$N$  의 길이가 200 이상이고  $M$  의 길이가 30 이내의 조건을 만족시키는 처음의 시점  $i$  를 truncation point 로 결정하고 끝낸다.

3.2 방법 2 (M2)

M2 방법은 배치별 평균 지수 변화율을 이용하는 것으로서 출력자료를 크기가  $l$  인  $n$  개의 배치로 나눈 다음, 각 배치에 대하여 (3.2) 식의 값을 이용하여 truncation point 를 결정한다[1,2].

$$\lambda_i = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \log_2 \frac{x_{(i-1)l+j}}{x_{(i-1)l+1}}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l \quad (3.2)$$

$x_{(i-1)l+j}$  :  $i$ 번째 배치내의  $j$ 번째 출력자료

Truncation point 의 축차적 결정을 위해 M2 방법에서 사용하는 결정기준은 다음과 같다.

- 결정기준 : 배치별 평균 지수 변화율  $\lambda_i$ 는 규정치보다 작거나 같아야만 한다.

안정상태 이후 시스템의 동적 특성은 임의의 분포에 수렴하기 때문에 배치별 평균 지수 변화율도 일정한 범위내에 존재하게된다 [1,2]. 배치별 평균 지수 변화율에 대한 범위로서 본 연구에서 고려하는 규정치도 평균변화율 5% 를 기준하여 계산되어진  $\pm 0.036$  을 사용한다.

M2 방법에 의하여 truncation point 를 결

정하는 절차는 다음과 같다.

[단계 1]

출력되는 자료를 크기가  $l(l=30,40,50)$  인 배치로 나눈다.

[단계 2]

출력자료에 대하여 지수 변화율  $\lambda_i$ 를 계산한 다음 연속적으로  $\lambda_i$ 가 -0.036과 0.036 사이의 값을 갖는 회수  $N$  를 계산한다.

[단계 3]

$N \times l$ 의 크기가 200 이상의 조건을 만족시키는 처음의 배치 시작점을 truncation point 로 결정하고 끝낸다.

3.3 Cash 방법

Cash의 방법은 표준화 시계열 자료를 이용하는 Schruben 방법에 기초하여 제시된 방법으로서 출력자료를 크기가  $l$  인  $n$  개의 배치로 나눈 다음, 배치수의 비율  $f = 0.25$  에 대하여 계산되어진 분산 추정치  $V_{max}$ 에 의해 F 검정을 시행한다. 이때 만약 초기해에 의한 편의가 존재하지 않는다는 가설이 기각되면 원래의 출력자료의 25% 를 제거한 다음, 나머지 출력자료에 대하여 동일한 검정을 적용한다. 나머지의 출력자료에 대한 검정 결과로서 가설이 채택되면  $f = 0.5$  와  $f = 0.75$  에 대하여 동일한 방법으로 F 검정을 적용시켜 truncation point를 결정하는 방법이다[3].

$$V_{max} = \frac{Q_{max}}{3n}$$

$$Q_{max} = \sum_{i=1}^n \frac{l \hat{S}_i^{*w}}{\hat{K}_i(l - \hat{K}_i)}$$

$$\hat{S}_i = \hat{K}_i S_{i, \hat{K}_i}$$

$$\hat{K}_j = \max\{jS_{i,j}\} \text{ for } j$$

$$S_{i,j} = \bar{x}_{i,j} - \bar{x}_{i,j}$$

$x_{(i-1)l+i}$  :  $i$  번째 배치내의  $l$  번째 출력자료.

#### 4. 안정상태 길이의 결정 방법

시뮬레이션에 의한 출력분석을 할때 대상 시스템의 대략적인 특성파악을 목적으로 하는 경우 출력자료가 서로 독립이라면 정해진 길이의 시뮬레이션을 한번만 수행하는 것으로도 충분하겠지만, 요구되는 신뢰도의 추정치를 얻고자 하는 경우에는 적정한 길이의 시뮬레이션을 여러번 반복 수행해야만 한다. 반복 수행시 초기치에 의한 불안정상태의 길이는 각 반복별로 달라지며, 이로 인하여 요구되는 신뢰도의 추정치를 얻기위해 필요한 시뮬레이션의 길이도 반복별로 달라진다. 따라서, 경제적이고 효율적인 출력분석을 위해서는 각 반복별로 적정한 truncation point 와 시뮬레이션의 길이를 결정해주어야만 한다. 이를 위하여 본 논문에서는 반복별로 달라지는 truncation point 와 시뮬레이션 길이의 축차적 결정방법을 제시하였다.

지금까지의 시뮬레이션 길이 RL 의 결정 문제는 초기화에 의한 불안정상태의 영향이 충분히 제거될 수 있는 길이의 결정문제였다. 그러나, truncation point 의 축차적 결정으로 인하여 초기치에 의한 불안정상태가 충분히 제거되기 때문에 기존의 시뮬레이션 길이 RL 의 결정문제는 요구되는 신뢰도를 만족시키기 위해 필요한 truncation point 이후의 안정상태 길이 SL 의 결정문제로 단순화 된다. 본

논문에서는 요구되는 수준의 신뢰도를 만족시키기 위해 필요한 최소의 안정상태 길이 SL 은 다음의 방법에 의하여 결정한다.

[단계 1]

초기의 안정상태 길이를 SL(SL=200) 로 하여 시뮬레이션을 수행한다.

[단계 2]

출력자료를 배치의 크기가  $l(l=40)$  인  $n$  개의 배치 (SL= $l \times n$ )로 나눈 다음, 각 배치에 대하여 M2 방법에 의한 평균 지수 변화율을 계산한다.

[단계 3]

배치별 평균 지수 변화율로 형성된 새로운 확률표본에 대하여 독립성 검정을 위한 런 검정을 실행한다. 가설이 채택되면 안정상태 이후의 시뮬레이션 길이를  $SL^* = SL$ 로 결정하고 끝내며, 가설이 기각되면 안정상태의 길이 SL을  $\Delta SL(\Delta SL=40)$ 씩 증가시키면서 반복 수행한다.

Truncation point 이후의 출력자료 SL 에 의해 평가된  $n$  개의 배치별 평균 지수 변화율에 대하여 런 검정을 하는 경우, 런의 수를 NR 라 하면 확률변수 NR 의 기대치와 분산은 다음 식과 같다[6].

$$\begin{aligned} E(NR) &= \frac{2n-1}{3} \\ \text{Var}(NR) &= \frac{16n-29}{90} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$n \geq 20$  인 경우 NR 는 대략적으로 정규분포를 하기 때문에 표준 정규분포를 사용하여 출력자료의 변화에 대한 독립성 검정을 할 수 있다.



### 5. 실험 및 결과분석

본 논문에서는 반복-제거 방법에 의한 출력분석시 초기치에 의한 편의문제와 시뮬레이션 길이의 결정문제를 해결할 수 있는 방법을 제시하였다. 제시된 방법의 결과를 평가하기 위하여 이론치를 알 수 있는 M/M/1 대기행렬 시스템에 대하여 Cash 방법[3]에 의한 결과와 비교하였다.

#### 5.1 평가척도

제시된 방법의 결과를 평가하기 위해서 점 추정치의 상대적인 편의, 신뢰구간의 유효범위와 상대적인 구간의 폭, 출력자료의 평균 제거량을 평가척도(performance measure)로 고려한다.

##### (1) 상대편의

상대편의(relative bias : RB)는 본 논문에서 제시된 방법에 의해 평가된 점 추정치와 이론치  $\mu$ 간의 차우침에 대한 상대적 크기를 평가하기 위한 척도로서 R 번의 실험결과에 대하여 평가한 평균치이다.

$$RB = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R |\hat{\mu}_i - \mu| \mu \quad (5.1)$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} \bar{x}(j)$$

$$\bar{x}(j) = \frac{1}{(RL_j - l_j)} \sum_{t=l_j+1}^{RL_j} x_t(j)$$

여기서,

R : 하나의 추정치를 평가하기 위하여  $k_i$  번의 반복실험을 하는 반복-제거 방법의 총 실험회수.

$k_i$  : 추정치를 평가하기 위하여 i 번째 실험

에서 수행된 시뮬레이션의 반복회수.

$RL_j$  :  $k_i$  번의 반복실험중 j 번째 실험에서의 시뮬레이션 길이.

$l_j$  :  $k_i$  번의 반복실험중 j 번째 실험에서 제거되는 출력자료의 량.

$l_j$  : j 번째 실험에서 t 번째의 출력자료의 값.

##### (2) 상대구간 폭

상대구간 폭(estimated relative half-width : ERHW)은 i 번째 실험에서  $k_i$  번의 반복으로 추정되는 신뢰구간의 상대적인 폭의 크기를 평가하기 위한 것이다. 이론치를 모르는 경우 출력분석의 결과를 평가할 수 있는 척도로서 R 번의 실험결과에 대하여 평가한 평균치이다.

$$ERHW = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{[t(k_i - 1, 1 - \alpha/2) S_i] / \sqrt{k_i}}{\hat{\mu}_i} \quad (5.2)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{k_i - 1} \sum_{j=1}^{k_i} [\hat{\mu}_i - \bar{x}(j)]^2$$

##### (3) 유효범위

유효범위(coverage : COV)는 R 번의 실험중 모수를 포함하는 신뢰구간의 비율로서 신뢰율 90%에 대하여 평가한다.

##### (4) 평균 제거량

초기치에 의한 불안정상태를 제거하기 위하여 출력자료 중 일부를 버릴 때 필요 이상의 출력자료를 버리는 것은 비 경제적이다. 따라서, 추정치의 편차에 대한 척도인 상대편의와 상대구간 폭 그리고 신뢰구간의 정확성에 대한 척도인 유효범위 등과 함께 출력분석 방법의 효율성을 평가하기 위한 척도로서 출력자료의 평균 제거량(mean truncation

: MT)을 고려한다.

## 5.2 Truncation point 자동검출 방법의 평가

본 논문에서 제시하는 방법 M1 과 M2 의 결과를 평가하기 위하여 적용하는 모형은  $M/M/1(\infty)$  대기행렬 시스템 으로서 이용률 (utilization) = 0.5, 0.7, 0.9 의 3가지 경우에 대해서 서로 다른 난수를 사용하여 960 회 시뮬레이션을 수행하였다. 각 방법의 출력분석 결과를 평가하기 위하여 이용하는 자료는 서비스를 받고 시스템을 떠나는 고객의 평균 대기시간으로서 30명 간격으로 수집하였다. Truncation point 결정 방법의 결과를 반복회수  $k = 5, 8, 10$  의 3가지 경우에 대하여 방법별로 비교하였다.

1) 시뮬레이션의 길이  $RL = 500$  인 경우  
3 가지의 방법에 대한 실험결과는 Table 1, 2, 3 의 내용과 같으며, 이에 대한 분석결과는 다음과 같다.

### (1) $\rho=0.5$ 인 경우

배치별 평균 지수 변화율을 이용하는 M2 방법중 배치의 크기가 40인 M2(40) 방법의 결과가 4가지의 평가척도를 모두 고려했을 때 다른 것에 비해 양호한 것으로 나타났다. M2(40) 의 결과를 M1 방법의 결과와 비교하면 두 방법간의 RB, ERHW, COV 에서 거의 차이가 없는 것으로 나타났으나, 출력자료의 평균제거량인 MT 는 M1 의 결과가 보다 좋은 것으로 나타났다. 그러나, M1 방법은 반복회수  $k$  가 증가되면서 COV 가 감소되는 경향을 갖기 때문에 M1 방법의 truncation point 에 의해서 초기치에 의한 불안정상태가 충분히 제거되었다고 볼 수 없다.

M1 과 M2 방법의 결과가 Cash 방법에 비하여 적은 양의 출력자료를 제거하면서도 RB, ERHW, COV 에 있어서 차이를 보이지 않는다. 따라서,  $\rho=0.5$  인 경우에는 본 논문에서 제시한 M1 과 M2 방법이 Cash 방법에 비하여 우월하다고 할 수 있다.

### (2) $\rho=0.7$ 인 경우

배치의 크기를 달리하는 M2 방법의 3가지 결과중 M2(40) 의 결과가 4가지의 평가척도를 모두 고려했을 때 다른 것에 비해 양호한 것으로 나타났다. M2(40) 방법이 M1 방법에 비해 제거시키는 출력자료의 양이 다소 많은 것으로 나타났으나, M1 방법의 결과에서  $k$  가 증가되면서 COV 가 감소되는 경향이 나타났으므로 M1 방법의 truncation point 는 출력자료에 포함된 불안정상태를 충분히 제거시킨다고 할 수 없다. M2(40) 의 결과는 Cash 방법에 비해서도 좋은 COV 를 가지며, Cash 방법의 결과에서도  $k$  가 증가되면서 COV 가 감소하는 경향이 나타났기 때문에 Cash 방법에 의해 결정되는 truncation point 가 출력자료에 포함된 불안정상태의 자료를 충분히 배제시키지 못했다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과로 부터 M2 방법의 결과가 Cash 방법의 결과에 비하여 우월하다고 할 수 있다.

### (3) $\rho=0.9$ 인 경우

현재의 시뮬레이션 길이  $RL=500$  으로 시스템의 상태가 안정상태에 이르기엔 충분치 않은 경우, M2 방법은 현재의 시스템 상태를 불안정상태로 판정하여 truncation point 를 제시하지 않으나 Cash 방법은 현재의 시스템 상태와 무관하게 truncation point 를 제시한다. M2 방법에 의하여 truncation point 를 제시하지 않는 경우의 시스템 상태에 대한 그림

은 Figure 5.1 과 같으며,  $\rho=0.9$  의 경우에 대한 방법별 결과는  $RL=1500$  으로 증가시킨 실험결과로써 평가하고자 한다.

하여 다시 실험하였으며, 각 방법에 대해서 반복회수와 truncation point 이후의 안정상태 길이 SL 를 100 에서 부터 500 까지 변화시

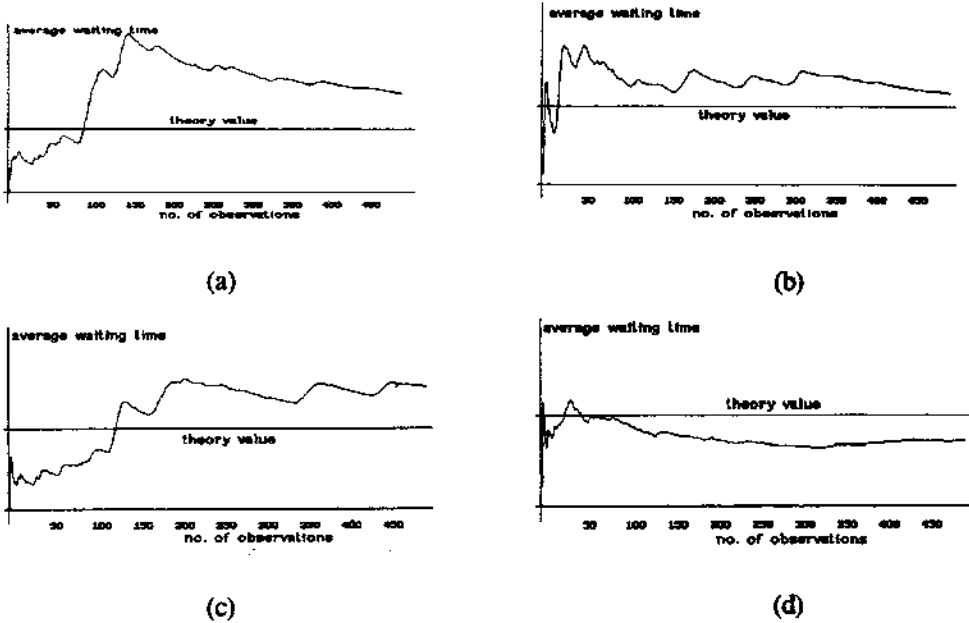


Figure 5.1 Simulation output for  $\rho=0.9$  in which not include the steady state

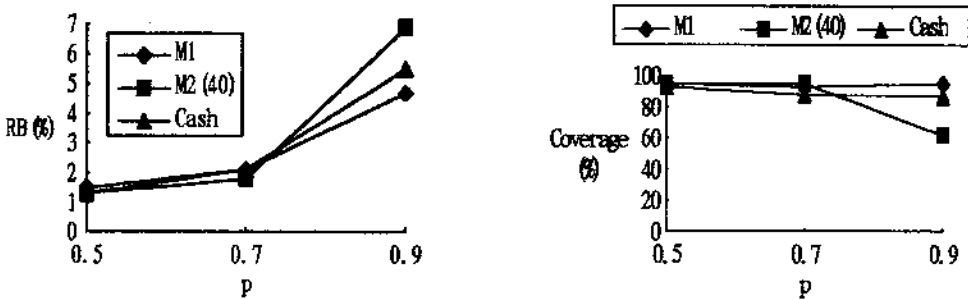
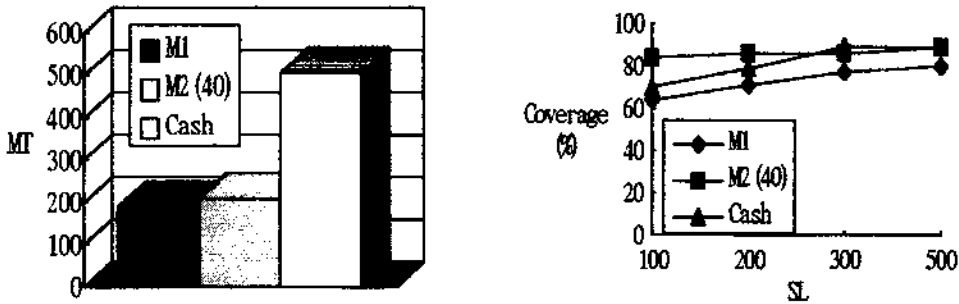


Figure 5.2 Relative bias and coverage of the estimators for  $k=8, RL=500$

2) 시뮬레이션의 길이  $RL=1500$  인 경우 시뮬레이션의 길이를  $RL=500$  으로 하였을 때  $\rho=0.9$  인 경우 시스템의 상태가 안정상태에 이르지 못하는 경우가 많아서 시뮬레이션의 길이를  $RL=1500$  으로 충분히 길게

키면서 출력분석의 결과를 평가하였다. 이에 대한 실험결과는 Table 4 부터 Table 12 에 정리한 내용과 같으며, 이에 대한 분석결과는 다음과 같다.

(1)  $\rho=0.5$  인 경우

Figure 5.3 Mean truncation and coverage for  $\rho=0.5$ ,  $k=10$ 

Truncation point 이후의 안정상태 길이 SL 을 증가시켰을 때 M1, M2, 그리고 Cash 의 3가지 방법에 의해서 추정된 신뢰구간의 유효범위는 대체적으로 개선되나, SL 이 어느 정도 이상이 되면 3 가지 방법에 의한 추정치의 RB 와 ERHW 의 개선에는 거의 영향을 미치지 못하는 것을 알 수 있다. 이와 함께, 반복회수의 증가가 RB 와 ERHW 의 결과에 거의 영향을 주지 않는데 이것은 truncation point 이후의 출력자료가 안정상태임을 의미하는 것이다. Cash 방법에 의해 제거되는 출력자료의 평균 제거량이 M2 방법의 결과에 비하여 2 배 이상이지만 M2 방법과 Cash 방법의 RB 와 ERHW 에는 거의 차이가 없으며, 유효범위도 M2(40) 방법의 결과가 대체적으로 양호하다. 따라서, M2(40) 방법에 의해서 결정되는 truncation point 는 시뮬레이션이 진행되는 과정에서 축차적으로 결정되어지며, Cash 방법에 비하여 적은 양의 출력자료를 제거하면서도 추정치의 정밀도나 신뢰구간의 유효범위에서 양호한 결과를 얻을 수 있기 때문에 매우 효율적이며 좋은 방법이라고 할 수 있다.

### (2) $\rho=0.7$ 인 경우

$\rho=0.5$  인 경우에서 처럼 안정상태 길이 SL 의 증가가 신뢰구간에 대한 유효범위의 개선과 함께 추정치에 대한 RB 와 ERHW 의 결과도 어느 정도 수준까지는 개선시키나, 반복회수의 증가가 RB 와 ERHW 에는 거의 영향을 미치지 못하는 결과를 얻었다. Cash 방법에 의해서 결정되는 truncation point 는 이용률에 상관없이 거의 같은 값을 제시하고 있으나, M1 과 M2 방법은 이용률에 따라 적합한 크기의 truncation point 값을 제시한다. Cash 방법에 의한 출력자료의 평균제거량이 M2 방법에 의한 제거량에 비하여 2배 정도 이지만 RB 와 ERHW 에는 거의 차이가 없으며, 유효범위도 M2(40) 방법의 결과가 대체적으로 양호하다. 따라서, Cash 방법에 비해 적은 양의 출력자료를 제거하면서도 추정치의 정밀도나 신뢰구간의 유효범위에서도 좋은 결과를 얻을 수 있는 M2(40) 의 방법이 보다 우월한 방법이라고 할 수 있다.

### (3) $\rho=0.9$ 인 경우

$\rho=0.9$  인 경우에는 반복별 SL 의 증가로 인한 RB 와 ERHW 의 개선효과에 비하여 반복회수의 증가에 의한 RB 와 ERHW 의 개

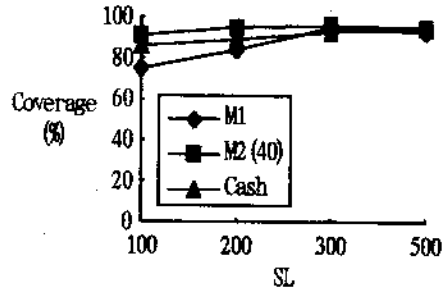
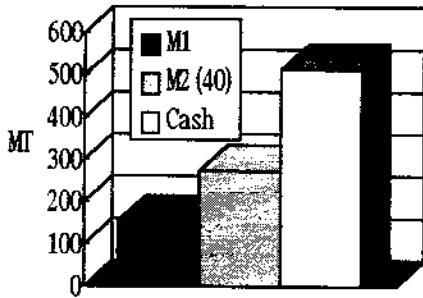


Figure 5.4 Mean truncation and coverage for  $\rho=0.7, k=10$

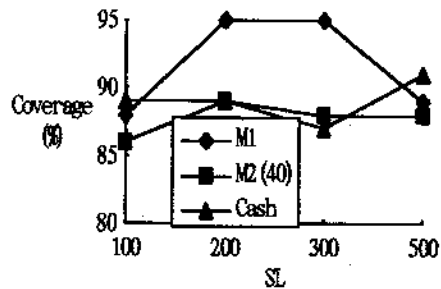
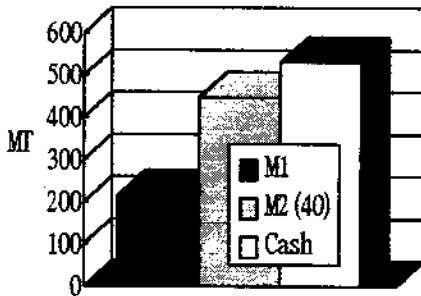


Figure 5.5 Mean truncation and coverage for  $\rho=0.9, k=10$

선효과가 크게 나타나는 실험결과를 얻었다. 이것은 대기행렬 시스템의 이용률이 높아지면서 출력자료간의 상관관계가 커지는 것에 기인하는 것으로서, 제시된 방법에 의해서 결정된 truncation point 이후의 SL 을 무한히 증가시키기 보다는 반복회수를 증가시키는 것이 보다 효과적이라는 것을 알 수 있다. 각 방법별로 얻은 추정치의 RB 와 ERHW 그리고 유효범위가 반복회수의 증가로 인하여 나빠지지 않기 때문에 현재의 truncation point 의 의하여 초기치에 의한 편의부분은 충분히 제거되었다고 볼 수 있다.  $\rho=0.9$  의 경우에서도 M2(40)에 의한 방법이 Cash 의 방법에 비하여 적은 양의 자료를 제거하면서도 RB

와 ERHW 의 값에서는 거의 차이를 보이지 않으며, 유효범위의 척도에서도 대체적으로 좋은 결과를 제시하고 있음을 알 수 있다.

## 6. 결론

안정상태 시뮬레이션에서 문제점으로 지적되고 있는 초기치의 편의문제를 해결하는데 Schruben 의 표준 시계열 자료 방법이 가장 널리 활용되고 있으며, Cash 는 이 방법에 근거한 truncation point 의 결정 방법을 제시하였다. 본 논문에서는 비선형 동역학 분야에서 폭넓게 연구되고 있는 카오스 이론의 Lyapunov 지수를 응용한 truncation point 의

결정 방법을 제시하고 그 결과를 Cash 의 방법과 비교하였으며, 이것을 평가척도 별로 살펴보면 다음과 같다.

### (1) 출력자료의 평균 제거량

Cash 방법은 이용률의 정도에 민감하지 못한 truncation point 를 제시하여 필요 이상의 많은 자료를 낭비하는 문제점이 있으나, M1 과 M2 방법은 이용률의 정도에 따라 적절한 truncation point 를 제시하기 때문에 Cash 방법에 비해 적은 양의 출력자료를 제거한다는 장점을 갖는다.

### (2) 상대편의와 상대구간 폭

M2 방법에 의하여 평가된 추정치와 신뢰구간을 상대편의와 상대구간 폭의 척도에서 Cash 방법의 결과와 비교하였을 때 거의 차이가 없는 실험결과를 얻었다. 따라서, 시뮬레이션이 진행되는 과정중에 M2 방법에 의해 결정되는 truncation point 가 초기치에 의한 불안정상태를 충분히 제거한다고 통계적으로 말할 수 있다.

### (3) 유효범위

유효범위에 있어서 M2 방법이 Cash 방법에 비해 다소 양호한 것으로 나타났으며, Cash 방법은  $\rho=0.5$  의 경우 유효범위가 80% 에도 미치지 못하는 결과를 여러번 제시하지만 M2(40) 방법은 신뢰율 90% 를 대체적으로 충족시키며 유효범위의 값도 크게 변하지 않는다. M1 방법과 M2 방법을 유효범위의 척도에서 비교하면 M1 방법이 보다 좋은 것으로 나타났으나, M1 방법의 상대편의와 상대구간 폭이 M2 방법의 결과보다 크기 때문에 M2 방법보다 좋다고 단정할 수는 없다.

Cash 에 의해서 제시된 방법은 시뮬레이션을 종료한 다음, 출력자료에 대한 통계적 분

석을 통하여 truncation point 를 결정하지만, 본 논문에서 제시한 M1 과 M2 방법은 시뮬레이션이 수행되는 과정 중에서 truncation point 를 축차적으로 결정할 수 있는 방법이다. 따라서, 제시된 방법 중 M2(40) 방법을 이용하여 truncation point 를 결정하게 되면 안정상태 시뮬레이션의 출력분석을 위한 기존의 방법 사용시 초기치의 출력자료를 필요 이상으로 버리게 되는 문제점을 해결할 수 있으며 특히, 반복-제거 방법의 사용시 가장 큰 문제로 지적되어왔던 truncation point 의 결정문제를 해결할 수 있게 된다. 두번째로, 각 반복별 시뮬레이션의 길이 RL 을 결정하는 문제는 truncation point 의 축차적 결정으로 인하여 정규성과 랜덤성을 충족시킬 수 있는 안정상태의 길이 SL 의 결정문제로 단순화되며, 필요한 시간 이상의 시뮬레이션 수행을 방지할 수 있다.

향후의 연구과제로서 truncation point 의 결정 방법과 관련하여 M/M/1 대기행렬 시스템에 대해서만 평가된 실험결과와 다양한 검증을 위해 재고 시스템과 생산 시스템 등에 대한 평가가 필요하다고 생각된다. 두번째 연구과제는 반복별 안정상태 길이의 결정 방법과 반복 회수의 결정 방법에 대한 것으로서, 본 논문에서 제시한 방법을 대기행렬 시스템, 재고 시스템 그리고 생산 시스템에 대해서 실험 및 평가하여 제시된 방법을 보다 구체화 시키고자 한다.

## 참 고 문 헌

- [1] Lee, Y.H. and H.S. Oh, "Detecting Truncation Point in Steady-State Simula-

- tion using Chaos Theory," Proceedings of the 1994 W.S.C., pp. 353-360, 1994.
- [2] 오형술, 이영해, "Simulation Output Analysis using Chaos Theory," 한국시뮬레이션학회논문지, 제3권, pp. 65-74, 1994.
- [3] Cash, C.R., "Evaluation of Tests for Initialization Condition Bias," Proceedings of the 1992 W.S.C., pp. 577-585, 1992.
- [4] Gafarian, A.V., "Evaluation of Commonly Used Rules for Detecting Steady-State in Computer Simulation," Naval Res. Logist. Quart., Vol. 25, pp. 511-529, 1978.
- [5] Moon, F.C., Chaotic Vibrations, John Wiley & Sons, 1987.
- [6] Hoover, S.V. and R.F. Perry, Simulation, Addison Wesley, 1990.
- [7] Schruben, L., "Detecting Initialization Bias in Simulation Output," O.R., Vol. 30, pp. 569-590, 1982.
- [3] Schruben, L., "Optimal Tests for Initialization Bias in Simulation Output," O.R., Vol. 31, pp. 1167-1178, 1983.
- [9] Tuffillaro, N.B., Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley, 1992.
- [10] Wolf, A., "Determining Lyapunov Exponent from a Time Series," Physica 16D, pp. 285-317, 1985.
- [11] Strogatz, S.H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley, 1994.
- [12] Khoshnevis, H., Discrete System Simulation, McGraw Hill, 1994.
- [13] Packard, N.H. et al., "Geometry from a Time Series," Physical Review Letter, Vol. 45, pp. 712, 1980.
- [14] Welch, P.D., "The Statistical Analysis of Simulation Results," in Computer Performance Modeling Handbook, Academic Press, 1983.
- [15] Heidelberger, P. and P.D. Welch, "Simulation Run Length Control in the Presence of an Initial Transient," O.R., Vol. 31, pp. 1109-1144, 1983.
- [16] Kelton, W.D. and A.V. Law, "A New Approach for Dealing with the Startup Problem in Discrete Event Simulation," Naval Res. Logist. Quart., Vol. 30, pp. 641-658, 1983.
- [17] Schruben, L., "Confidence Interval Estimation Using Standardized Time Series," O.R., Vol. 31, pp. 1090-1108, 1983.

Table 1. Experimental results for  $\rho=0.5$ ,  
RL=500.

	Method	k=10	k=8	k=5
RB	M1	0.013	0.015	0.018
	M2(30)	0.013	0.015	0.019
	M2(40)	0.013	0.014	0.019
	M2(50)	0.013	0.015	0.019
	Cash	0.013	0.014	0.019
ERHW	M1	0.030	0.034	0.048
	M2(30)	0.030	0.034	0.047
	M2(40)	0.029	0.034	0.046
	M2(50)	0.029	0.034	0.046
	Cash	0.029	0.034	0.050
MT	M1	152	152	152
	M2(30)	148	148	148
	M2(40)	163	163	163
	M2(50)	168	168	168
	Cash	179	179	179
COV	M1	0.875	0.950	0.953
	M2(30)	0.903	0.949	0.905
	M2(40)	0.903	0.949	0.921
	M2(50)	0.903	0.949	0.905
	Cash	0.906	0.925	0.938

Table 3. Experimental results for  $\rho=0.9$ ,  
RL=500.

	Method	k=10	k=8	k=5
RB	M1	0.042	0.047	0.066
	M2(30)	0.043	0.053	0.067
	M2(40)	0.059	0.069	0.075
	M2(50)	0.065	0.060	0.072
	Cash	0.054	0.055	0.071
ERHW	M1	0.104	0.121	0.163
	M2(30)	0.096	0.106	0.149
	M2(40)	0.080	0.094	0.127
	M2(50)	0.080	0.091	0.127
	Cash	0.102	0.122	0.164
MT	M1	194	194	194
	M2(30)	284	284	284
	M2(40)	292	292	292
	M2(50)	279	279	279
	Cash	174	174	174
COV	M1	0.844	0.950	0.875
	M2(30)	0.773	0.852	0.886
	M2(40)	0.688	0.619	0.697
	M2(50)	0.643	0.647	0.750
	Cash	0.774	0.872	0.905

Table 2. Experimental results for  $\rho=0.7$ ,  
RL=500.

	Method	k=10	k=8	k=5
RB	M1	0.018	0.021	0.025
	M2(30)	0.016	0.019	0.024
	M2(40)	0.016	0.018	0.023
	M2(50)	0.016	0.02	0.025
	Cash	0.017	0.021	0.025
ERHW	M1	0.042	0.049	0.068
	M2(30)	0.042	0.047	0.065
	M2(40)	0.042	0.048	0.066
	M2(50)	0.042	0.048	0.067
	Cash	0.041	0.047	0.066
MT	M1	152	152	152
	M2(30)	189	189	189
	M2(40)	214	214	214
	M2(50)	221	221	221
	Cash	172	172	172
COV	M1	0.875	0.925	0.906
	M2(30)	0.935	0.897	0.887
	M2(40)	0.933	0.947	0.902
	M2(50)	0.966	0.919	0.966
	Cash	0.844	0.875	0.906

Table 4. Experimental results for  $\rho=0.5$ , k=5  
and RL=1500

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.04	0.08	190	0.76
	M2(30)	0.03	0.07	194	0.88
	M2(40)	0.03	0.07	209	0.85
	M2(50)	0.03	0.07	225	0.85
	Cash	0.02	0.05	507	0.86
200	M1	0.03	0.07	190	0.80
	M2(30)	0.03	0.06	194	0.87
	M2(40)	0.03	0.06	209	0.88
	M2(50)	0.03	0.06	225	0.88
	Cash	0.02	0.05	507	0.93
300	M1	0.03	0.06	190	0.80
	M2(30)	0.03	0.06	194	0.88
	M2(40)	0.02	0.06	209	0.88
	M2(50)	0.02	0.06	225	0.88
	Cash	0.02	0.04	507	0.93
500	M1	0.02	0.05	190	0.90
	M2(30)	0.02	0.05	194	0.91
	M2(40)	0.02	0.05	209	0.93
	M2(50)	0.02	0.05	225	0.89
	Cash	0.02	0.04	507	0.91



**Table 5. Experimental results for  $\rho=0.5$ ,  $k=8$  and  $RL=1500$**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.04	0.06	190	0.71
	M2(30)	0.03	0.05	194	0.73
	M2(40)	0.03	0.05	209	0.80
	M2(50)	0.03	0.05	225	0.76
	Cash	0.02	0.03	507	0.89
200	M1	0.03	0.05	190	0.76
	M2(30)	0.02	0.05	194	0.76
	M2(40)	0.02	0.04	209	0.83
	M2(50)	0.02	0.04	225	0.84
	Cash	0.02	0.03	507	0.81
300	M1	0.02	0.04	190	0.77
	M2(30)	0.02	0.04	194	0.79
	M2(40)	0.02	0.04	209	0.83
	M2(50)	0.02	0.04	225	0.83
	Cash	0.02	0.03	507	0.83
500	M1	0.02	0.04	190	0.89
	M2(30)	0.02	0.04	194	0.81
	M2(40)	0.02	0.04	209	0.87
	M2(50)	0.02	0.04	225	0.83
	Cash	0.01	0.03	507	0.84

**Table 7. Experimental results for  $\rho=0.7$ ,  $k=5$  and  $RL=1500$**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.07	0.12	154	0.88
	M2(30)	0.04	0.09	259	0.85
	M2(40)	0.04	0.09	273	0.87
	M2(50)	0.04	0.09	295	0.89
	Cash	0.03	0.07	513	0.89
200	M1	0.05	0.10	154	0.88
	M2(30)	0.04	0.09	259	0.93
	M2(40)	0.04	0.08	273	0.92
	M2(50)	0.03	0.08	295	0.92
	Cash	0.03	0.07	513	0.90
300	M1	0.04	0.09	154	0.91
	M2(30)	0.03	0.08	259	0.91
	M2(40)	0.03	0.08	273	0.94
	M2(50)	0.03	0.08	295	0.93
	Cash	0.02	0.06	513	0.92
500	M1	0.03	0.08	154	0.96
	M2(30)	0.03	0.07	259	0.95
	M2(40)	0.03	0.07	273	0.94
	M2(50)	0.03	0.07	295	0.94
	Cash	0.02	0.06	513	0.93

**Table 6. Experimental results for  $\rho=0.5$ ,  $k=10$  and  $RL=1500$**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.04	0.05	190	0.64
	M2(30)	0.03	0.04	194	0.75
	M2(40)	0.02	0.04	209	0.84
	M2(50)	0.03	0.04	225	0.77
	Cash	0.02	0.03	507	0.70
200	M1	0.03	0.04	190	0.71
	M2(30)	0.02	0.04	194	0.86
	M2(40)	0.02	0.04	209	0.86
	M2(50)	0.02	0.04	225	0.88
	Cash	0.02	0.03	507	0.79
300	M1	0.02	0.04	190	0.77
	M2(30)	0.02	0.04	194	0.89
	M2(40)	0.02	0.04	209	0.86
	M2(50)	0.02	0.04	225	0.88
	Cash	0.01	0.03	507	0.89
500	M1	0.02	0.03	190	0.80
	M2(30)	0.02	0.03	194	0.91
	M2(40)	0.02	0.03	209	0.89
	M2(50)	0.02	0.03	225	0.88
	Cash	0.01	0.02	507	0.89

**Table 8. Experimental results for  $\rho=0.7$ ,  $k=8$  and  $RL=1500$**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.06	0.09	154	0.90
	M2(30)	0.04	0.07	259	0.91
	M2(40)	0.03	0.07	273	0.89
	M2(50)	0.03	0.06	295	0.90
	Cash	0.02	0.05	513	0.90
200	M1	0.04	0.08	154	0.91
	M2(30)	0.03	0.06	259	0.90
	M2(40)	0.03	0.06	273	0.90
	M2(50)	0.03	0.06	295	0.94
	Cash	0.02	0.05	513	0.91
300	M1	0.03	0.07	154	0.93
	M2(30)	0.03	0.06	259	0.91
	M2(40)	0.02	0.06	273	0.90
	M2(50)	0.02	0.06	295	0.93
	Cash	0.02	0.05	513	0.94
500	M1	0.03	0.06	154	0.93
	M2(30)	0.02	0.05	259	0.93
	M2(40)	0.02	0.05	273	0.91
	M2(50)	0.02	0.05	295	0.91
	Cash	0.02	0.04	513	0.93

**Table 9. Experimental results for  $\rho=0.7$ ,  
k=10 and RL=1500**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.06	0.08	154	0.75
	M2(30)	0.04	0.06	259	0.80
	M2(40)	0.03	0.06	273	0.91
	M2(50)	0.03	0.06	295	0.95
	Cash	0.02	0.04	513	0.86
200	M1	0.04	0.07	154	0.84
	M2(30)	0.03	0.06	259	0.96
	M2(40)	0.03	0.05	273	0.95
	M2(50)	0.02	0.05	295	0.96
	Cash	0.02	0.04	513	0.89
300	M1	0.03	0.06	154	0.95
	M2(30)	0.02	0.05	259	0.96
	M2(40)	0.02	0.05	273	0.96
	M2(50)	0.02	0.05	295	0.96
	Cash	0.02	0.04	513	0.93
500	M1	0.02	0.05	154	0.93
	M2(30)	0.02	0.05	259	0.98
	M2(40)	0.02	0.04	273	0.95
	M2(50)	0.02	0.04	295	0.91
	Cash	0.02	0.04	513	0.95

**Table 10. Experimental results for  $\rho=0.9$ ,  
k=5 and RL=1500**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.09	0.22	359	0.93
	M2(30)	0.09	0.18	407	0.88
	M2(40)	0.08	0.17	447	0.89
	M2(50)	0.07	0.15	498	0.87
	Cash	0.06	0.16	532	0.87
200	M1	0.08	0.21	318	0.91
	M2(30)	0.08	0.17	407	0.89
	M2(40)	0.07	0.16	447	0.91
	M2(50)	0.07	0.15	498	0.85
	Cash	0.06	0.15	532	0.87
300	M1	0.07	0.21	288	0.93
	M2(30)	0.07	0.17	407	0.87
	M2(40)	0.07	0.16	447	0.87
	M2(50)	0.06	0.14	498	0.84
	Cash	0.06	0.14	532	0.86
500	M1	0.08	0.22	215	0.88
	M2(30)	0.07	0.15	407	0.87
	M2(40)	0.07	0.14	447	0.84
	M2(50)	0.06	0.13	498	0.82
	Cash	0.06	0.14	532	0.86

**Table 11. Experimental results for  $\rho=0.9$ ,  
k=8 and RL=1500**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.08	0.16	359	0.87
	M2(30)	0.07	0.13	407	0.84
	M2(40)	0.07	0.13	447	0.91
	M2(50)	0.06	0.12	498	0.90
	Cash	0.05	0.12	532	0.91
200	M1	0.07	0.15	318	0.94
	M2(30)	0.06	0.13	407	0.90
	M2(40)	0.06	0.12	447	0.91
	M2(50)	0.05	0.11	498	0.90
	Cash	0.05	0.11	532	0.90
300	M1	0.06	0.14	288	0.93
	M2(30)	0.06	0.12	407	0.91
	M2(40)	0.05	0.12	447	0.91
	M2(50)	0.05	0.11	498	0.89
	Cash	0.05	0.11	532	0.87
500	M1	0.06	0.14	215	0.90
	M2(30)	0.05	0.11	407	0.90
	M2(40)	0.05	0.11	447	0.90
	M2(50)	0.04	0.10	498	0.94
	Cash	0.04	0.10	532	0.90

**Table 12. Experimental results for  $\rho=0.9$ ,  
k=10 and RL=1500**

SL	Method	RB	ERHW	MT	COV
100	M1	0.08	0.14	359	0.88
	M2(30)	0.07	0.12	407	0.86
	M2(40)	0.06	0.11	447	0.86
	M2(50)	0.06	0.10	498	0.84
	Cash	0.04	0.10	532	0.89
200	M1	0.06	0.13	318	0.95
	M2(30)	0.06	0.11	407	0.91
	M2(40)	0.06	0.11	447	0.89
	M2(50)	0.05	0.10	498	0.89
	Cash	0.04	0.10	532	0.89
300	M1	0.05	0.12	288	0.95
	M2(30)	0.05	0.11	407	0.91
	M2(40)	0.05	0.10	447	0.88
	M2(50)	0.05	0.09	498	0.91
	Cash	0.04	0.10	532	0.87
500	M1	0.05	0.12	215	0.89
	M2(30)	0.05	0.10	407	0.91
	M2(40)	0.05	0.09	447	0.88
	M2(50)	0.05	0.09	498	0.84
	Cash	0.04	0.09	532	0.91