Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.22, No.4, December, 1996

3차원 비길로틴 자재절단문제의 라그랑지안 완화 해법*

A Lagrangean Relaxation Method of Three-Dimensional Nonguillotine Cutting-Stock Problem

김상열** · 박순달***

Sang-Youl Kim** · Soon-Dal Park***

Abstract

The three dimensional cutting-stock problem is to maximize the total value of pieces which are smaller cubics-cut from a original cubic stock. This paper suggests a method to maximize the total value of different size cut pieces using the orthogonal non-guillotine cut technique. We first formulated a zero-one integer programming, then developed a Lagrangean relaxation method for the problem. The solutions were given by using a branch-and-bound technique associates with Lagrangean relaxation, which guarantees an optimal solution.

Keywords : cutting stock problem, non-guillotine cutting, Lagrangean relaxation, branch-and-bound

1. 서 론

자재절단 문제(cutting stock problem;CSP)란 일정한 크기로 생산된 원자재를 여러 크기의 부품으로 자를 때 발생되는 손실의 양을 최소화하면서 원하는 부품들의 소요를 만족시키도록 하는 문제이다. 자재절단 문제는 사용하는 공간의 차원(dimension)에 따라 1차원, 2차원, 3차원 문제로 분류된다. 1차원 자재절단 문제란 봉이나 막대와 같이 한 차원으로만 크기를 갖는 원자재로부터 원하는 부품을 한 방향으로만 잘라 내야 하는 문제를 말한다. 이에 비해 2차원 자재절단 문제란 가로, 세로의 크기를 갖는 평면 원자재로부터

* 본 연구는 대우재단의 Post-Graduate 장학 연구인 "3차원 적재 문제 연구"의 일환으로 이루어진 것임.

** LG-EDS 컨설팅 부문

*** 서울대학교 산업공학과

다양한 가로, 세로의 크기를 갖는 작은 사각형의 부품을 잘라 내는 문제이다. 3차원 자재절단 문제란 3차원의 형태를 갖는 부피가 있는 원자재를 3차원의 작은 부품으로 잘라 나는 문제이다.

자재절단 문제는 절단하는 방법에 따라 그 문제 상황이 달라지는데 절단은 크게 길로틴과 비길로틴 절단으로 나뉜다. 길로틴 절단이란 원자재를 한쪽 모서리에서 반대쪽 모서리까지 단번에 잘라 내야만 하는 절단을 이야기한다. 비길로틴 절단은 이러한 제약이 없기 때문에 더 많은 부품을 원자재로부터 얻어 낼 수 있다. 따라서 비길로틴 절단 문제는 절단에 시간이 많이 소요되나, 원자재가 매우 고가품인 경우 버리는 부분을 될 수 있으면 줄이고자 할 때 사용된다.

비길로틴 자재절단 문제는 크게 최적해 방법과 발견적 방법으로 나누어 볼 수 있다. 최적해 해법으로서 Beasley[3]는 2차원 비길로틴 자재절단 문제를 처음으로 0-1 정수계획모델로 표현하고 이를 분지한계법을 사용해 최적해를 찾도록 하였다. 이 문제는 부품의 가치를 최대화하는 것을 목적으로 하되 하나의 원자재로부터 부품을 잘라낼 때 잘려지는 각 부품의 개수는 최소, 최대개수 안에 있어야 한다는 제약을 가지고 있다. 이 대형 정수계획모델을 풀기 위해 부품이 서로 겹쳐서 잘려질 수 없다는 제약을 완화시킨 라그랑지안 완화문제로 만들어 원문제의 상한을 구하도록 하고 이 방법을 통해 최적해가 발견되지 않으면 발견적 방법에 기초를 둔 이진 깊이탐색의 분지한계법을 사용하게 된다. 이 정수계획 모형은 나중에 Chen et al.[7]이 제안한 2차원 적재문제 정수계획 모형의 기초가 되었다. Beasley[4]는 앞선 정수계획모형에 대하여 완화된 문제와 최적해와의 관계에 대한 실험결과를 보고하였다. 부품이 서로 겹치지 말아야 한다는 제약을 완화하는 라그랑지안 완화와, 정수조건을 완화한 선형계획법으로의 해결방안, 그리고 부품이 서로 겹치지 말아야 하는 제약을 부품의 넓이 총합은 원자재 합보다 작아야 한다는 제약으로 완화시켜 배낭문제로 해결하는 방법의 총 3가지를 가지고 비교하였는데 그 결과 선형계획문제로 완화하여 푸는 것이 제일 좋은 한계를 줌을 보여주었다. Hadjiconstantinous & Christofides [8]는 Beasley의 정수계획모형이 실제로 모형화하기 힘들기 때문에 실제적으로 사용이 가능한 새로운 정수계획 모형을 제시하고 이 모형을 Beasley의 해법구조를 사용하여 최적해를 구하도록 하였다. 단, 잘려지는 부품개수의 하한은 없는 것으로 가정하는 것이 다르다.

발견적 방법으로서 Biro and Boros[5]는 그래프 이론에 의해 2차원 비길로틴 절단문제를 접근하였다. 그는 패턴을 "R-network"으로 표시하고 각 마디는 부품집합 R중에서 하나의 부품을, 호는 2개 부품이 서로 인접되어 있을 경우(direct super-position) 연결되는 것으로 정의하였다. 각 호의 용량은 인접된 부품의 길이와 같도록 하였다. 또한 이때의 흐름은 Kirchoff의 법칙을 만족시키는 흐름이 되는 가운데 최대 용량을 만족하는 "R-Network"을 만들도록 하였다. 그러나 "R-Network"을 만드는 알고리즘은 제시되지 않았다. Chauny[6]는 여러 개의 원자재가 있을 때 원자재의 소요개수를 줄이는 것을 목적으로 하는 2단계 발견적 해법을 제안하였다. 먼

저 1단계는 전략적 단계(strategic module)로 전체 수요 제약을 만족시키기 위해 선형계획 문제를 형성하여 이 문제를 푼 실수해를 가지고 패턴을 결정하게 하였다. 2단계는 전술적 단계(tactical module)로 발견적 방법을 이용하여 가능한 패턴을 생성하게 하였다.

3차원 자재절단문제는 Schneider[12]가 처음으로 다루었는데 이는 부품의 회전이 허용되지 않고 같은 부품으로만 층(stack)을 이루어야 한다는 길로틴절단 제약하에서 문제를 해결하였다. 그는 잘려지는 상자의 수요를 정확히 만족시키기 위해 조합화방법(combination method)을 사용하였다. 그러나 모든 조합을 매 단계에서 고려하는 것은 시간소요 및 저장공간의 소요를 크게 하는 단점이 있었다. 김상열[2]은 3차원 자재절단 문제에서 길로틴 절단 제약하에 3단계로 절단하는 방법을 제시하였는데 이 방법은 김상열[1]이 제안한 2단계 방법을 3차원으로 확대한 방법이다. 그러나 3차원 비길로틴 자재절단 문제는 아직 최적해 방법이 제시되지 않고 있는 상황이다.

본 연구에서는 3차원 비길로틴 자재절단문제를 0−1 정수계획모델로 모형화하고 이 문제를 풀기 위해 라그랑지안 완화방법을 이용한 분지한계법을 사용하였다. 문제의 가정으로 다양한 크기의 작은 육각형 부품을 이보다 큰 육각형의 원자재로부터 잘라내고자 할 때 부품의 가로, 세로, 높이는 원자재의 가로, 세로, 높이에 평행하게 절단해야 한다. 즉, 부품을 돌려놓을 수 없도록 한다. 만일 부품을 돌려놓아도 되는 상황에 있어서는 육각형 부품을 최대 6방향으로 돌려놓을 수 있으므로 하나의 부품에 대하여 최대 6개의 상자로 따로 구분하여 주면 된다. 이를 토대로 하여 3차원 비길로틴 절단의 수리계획 모형은 다음과 같은 사항을 만족하도록 한다.

- 잘려진 부품의 가치합을 최대화시키도록 해야 한다.
- 부품들은 서로 겹쳐서 절단되지 않아야 한다.(원자재의 가로, 세로, 높이에 대한 각 절단면의 넓이는 절단면에 의해 잘려진 상자들의 단면적과 빈 공간의 합과 같아야 한다.)
- 부품의 육각형 크기가 유지되어 절단되어야 한다.
- 임의의 부품이 절단되는 위치는 유일하게 정의되어야 한다.

위와 같은 제약을 만족하는 0−1 정수계획 모형은 다음과 같다.

3차원 절단수리모형[TCSP]

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{a=0}^{L-1} v_i \cdot x_{ia} \tag{1.1}$$

$$s.t. \quad \sum_{a=0}^{L-1} x_{ia} \leq 1, \qquad i=1,\dots,m \tag{1.2}$$

$$\sum_{a=0}^{L-1} x_{ia} = \sum_{b=0}^{W-1} y_{ib}, \quad i=1,\dots,m \tag{1.3}$$

$$\sum_{b=0}^{W-1} y_{ib} = \sum_{c=0}^{H-1} z_{ic}, \quad i=1,\dots,m \tag{1.4}$$

$$\sum_{r=a}^{a+l_i-1} \sum_{s=b}^{b+w_i-1} \sum_{t=c}^{c+h_i-1} g_{rst} \leq (3-x_{ia}-y_{ib}-z_{ic}) l_i w_i h_i$$

$$i = 1, \dots, m, \ a = 0, \dots, L\text{-}1, \ b = 0, \dots, W\text{-}1, \quad c = 0, \dots, H\text{-}1 \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot h_i \sum_{a=r-l_i+1}^{r} x_{ia} + \sum_{s=0}^{W-1} \sum_{t=0}^{H-1} g_{rst} = W \cdot H$$

$$r = 0, \dots, L\text{-}1 \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} l_i \cdot h_i \sum_{b=s-w_i+1}^{s} y_{ib} + \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{t=0}^{H-1} g_{rst} = L \cdot H$$

$$s = 0, \ldots, W\text{-}1 \qquad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} l_i \cdot w_i \sum_{c=t-h_i+t}^{t} z_{ic} + \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{W-1} g_{rst} = L \cdot W$$

$$t = 0, \ldots, H\text{-}1 \qquad (1.8)$$

$x_{ia}, y_{ib}, z_{ic} \in \{0,1\}$

$i=1, \ldots, m, a=0, \ldots, L\text{-}1, b=0, \ldots, W\text{-}1, c=0, \ldots, H\text{-}1$

$g_{rst} \in \{0,1\}$

$r=0, \ldots, L\text{-}1, s=0, \ldots, W\text{-}1, t=0, \ldots, H\text{-}1$

목적함수 (1.1)은 원자재에서 절단되는 부품의 가치(부피)합을 최대화하도록 하는 것이다. 제약식 (1.2), (1.3), (1.4)는 부품 i는 단 한 번 절단되어야 하며 만일 절단되었다면 그에 따른 x_{ia}, y_{ib}, z_{ic}값은 동시에 1을 갖도록 제약하는 식이다. 제약식 (1.5)는 부품 i의 절단 위치가 (a,b,c)라면 부품의 좌하단지점 (a,b,c)로부터 부품의 부피만큼의 위치에 대한 g_{rst} 변수는 0이 되도록 제약하는 식이다. 제약식 (1.6), (1.7), (1.8)은 원자재 안에 부품이 서로 겹쳐서 절단되지 못하도록 제약하는 식으로서 각각 길이, 너비, 높이에 대하여 고려한 것이다. 위의 수리계획모형에서 정의된 변수는 다음과 같다.

m ; 부품 종류의 개수,

v_i ; 부품 i 의 가치(부피), $i = 1, \ldots, m$

L ; 원자재의 가로, W ; 원자재의 세로,

H ; 원자재의 높이

l_i ; 부품 i의 가로, w_i ; 부품 i의 세로

h_i ; 부품 i의 높이, $i = 1, \ldots, m$

x_{ia} = 1, i 부품 좌측하단의 x좌표 위치가 a일 경우, $i = 1, \ldots, m$, $a = 0, \ldots,$ L-1

= 0, 그렇지 않으면

y_{ib} = 1, i 부품 좌측하단의 y좌표 위치가 b일 경우, $i = 1, \ldots, m$, $b = 0, \ldots, W\text{-}1$

= 0, 그렇지 않으면

z_{ic} = 1, i 부품 좌측하단의 z좌표 위치가 c일 경우, $i = 1, \ldots, m$, $c = 0, \ldots, H\text{-}1$

= 0, 그렇지 않으면

g_{rst} = 1, 어느 부품에 의해서도 절단되어지지 않은 (r, s, t)를 좌측하단의 x, y, z 좌표로 갖는 단위공간(1 x 1 x 1)

= 0, 그렇지 않으면, $r = 0, \ldots, L\text{-}1$, $s = 0, \ldots,$ $W\text{-}1$, $t = 0, \ldots, H\text{-}1$

2. 이론적 배경

본 연구에서는 3차원 절단문제의 수리모형(TCSP)을 분지한계법에 의해 최적해를 찾고자 한다. 분지한계법은 한계전략, 분지전략, 탐색전략 등에 의해 효율성이 좌우된다. 특히, 한계전략과 분지전략은 변수나 제약식을 완화하는 방법에 의해 달라진다. 본 연구에서는 한계값의 계산을 위해 어려운 제약식을 완화하는 라그랑지안 완화방법을 사용하도록 한다. 라그랑지안 방법에 의해 해를 찾는 방법은 Held & Karp[10]이 순회판매원문제(TSP)에 적용하여 좋은 결과를 얻어낸 후 복잡한 정수계획문제에 많이 적용되어 온 해법이다. 분지한계법의 초기 마디에서 라그랑지안 완화에 의한 방법으로 일정한 연산회수안에 최적해를 구하지 못하면 분지를 시작 라그랑지안 값을 상한으로 최적해를 찾아가도록 한다.

상한의 설정

수리모형(TCSP)에 대하여 비어있는 공간을 정의하도록 하는 제약식(1.5)와 부품들이 서로 겹치지 말아야 한다는 제약식 (1.6), (1.7), (1.8)을 라그랑지안 승수 u_{iabc}, d_r, e_s, f_t를 이용해 목적함수로 올려 완화시킨 라그랑지안 문제 LR을 다음과 같이 정의하자.

[라그랑지안 문제] LR

$$Max \quad Z_D(u, d, e, f)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\Big[\sum_{a=0}^{L-1} A_{ia}x_{ia} - \sum_{b=0}^{W-1} B_{ib}y_{ib} - \sum_{c=0}^{H-1} C_{ic}z_{ic}\Big]$$

$$-\sum_{r=0}^{L-1}\sum_{s=0}^{W-1}\sum_{t=0}^{H-1} K_{rst}g_{rst} + 3\sum_{i=1}^{m} l_i w_i h_i \sum_{a=0}^{L-1}\sum_{b=0}^{W-1}\sum_{c=0}^{H-1} u_{iabc}$$

$$+W \cdot H\sum_{r=0}^{L-1} d_r + L \cdot H\sum_{s=0}^{W-1} e_s + L \cdot W\sum_{t=0}^{H-1} f_t \qquad (2.1)$$

$$s.t. \quad \sum_{a=0}^{L-1} x_{ia} \leq 1 \qquad i = 1, ..., m \qquad (2.2)$$

$$\sum_{a=0}^{L-1} x_{ia} = \sum_{b=0}^{W-1} y_{ib} \qquad i = 1, ..., m \qquad (2.3)$$

$$\sum_{b=0}^{W-1} y_{ib} = \sum_{c=0}^{H-1} z_{ic} \qquad i = 1, ..., m \qquad (2.4)$$

$x_{ia}, y_{ib}, z_{ic} \in \{0, 1\}$

$i=1, ..., m, a=0, ..., L-1, b=0, ..., W-1, c=0, ..., H-1$

$g_{rst} \in \{0, 1\}$

$r = 0, ..., L-1, \ s = 0, ..., W-1, \ t = 0, ..., H-1$

where

$$A_{ia} = v_i - l_i w_i h_i \sum_{b=0}^{W-1}\sum_{c=0}^{H-1} u_{iabc} - w_i \cdot h_i \sum_{r=a}^{a+l_i-1} d_r$$

$$B_{ib} = l_i w_i h_i \sum_{a=0}^{L-1}\sum_{c=0}^{H-1} u_{iabc} + l_i \cdot h_i \sum_{s=b}^{b+w_i-1} e_s$$

$$C_{ic} = l_i w_i h_i \sum_{a=0}^{L-1}\sum_{b=0}^{W-1} u_{iabc} + l_i \cdot w_i \sum_{t=c}^{c+h_i-1} f_t$$

$$K_{rst} = d_r + e_s + f_t + \sum_{i=1}^{m}\sum_{a=r-l_i+1}^{r}\sum_{b=s-w_i+1}^{s}\sum_{c=t-h_i+1}^{t} u_{iabc}$$

위의 3차원 절단문제(TCSP)를 라그랑지안 완화한 문제(LR)는 다음과 같이 각각 m개의 부분문제로 분리하여 풀이할 수 있다.

[부분문제] LR_i

$$Z_i = \max\Big[\sum_{a=0}^{L-1} A_{ia}x_{ia} - \sum_{b=0}^{W-1} B_{ib}y_{ib} - \sum_{c=0}^{H-1} C_{ic}z_{ic}\Big]$$

$$s.t. \quad \sum_{a=0}^{L-1} x_{ia} \leq 1$$

$$\sum_{a=0}^{L-1} x_{ia} = \sum_{b=0}^{W-1} y_{ib}$$

$$\sum_{b=0}^{W-1} y_{ib} = \sum_{c=0}^{H-1} z_{ic}$$

$$x_{ia}, y_{ib}, z_{ic} \in \{0, 1\}$$

위의 부분문제 LR_i는 부품 i를 원자재에서 절단할 때 부품을 서로 겹쳐서 절단하면 안 된다는 제약을 제거한 상태에서 부품의 최적 절단 위치를 결정해 준다. 이와 같이 분리된 부분문제 LR_i는 정리 1에 의해 다항식 계산 안에 최적해를 찾을 수 있게 된다.

정리 1. 3차원 절단문제에서 부분문제 LR_i는 다항식 시간 안에 최적해를 얻을 수 있다.

증 명 부경사법에 의해 라그랑지안 변수 u_{iabc}, d_r, e_s, f_t가 결정되면 부분문제의 계수 A_{ia}, B_{ib}, Z_{ic}는 기지의 값 u_{iabc}, d_r, e_s, f_t와 l_i, w_i, h_i에 의해 표현되기 때문에 부분문제 LR_i의 계수 A_{ia}, B_{ib}, Z_{ic}도 기지의 값이 된다. 다음과 같이 $\alpha_{ia}, \beta_{ib}, \gamma_{ic}$를 정의하자.

$$\alpha_{ia} = \underset{a}{Max} A_{ia}, \ \beta_{ib} = \underset{b}{MIN} B_{ib}, \ \gamma_{ic} = \underset{c}{MIN} C_{ic}$$

이때 $\alpha_{ia} - \beta_{ib} - \gamma_{ic} \geq 0$이 되면 부품 i의 좌측하단 위치가 원자재의 (a,b,c)지점에서 잘려지도록 하여 해는 $x_{ia} = y_{ib} = z_{ic} = 1$과 같이 결정된다. 또한 $\alpha_{ia} - \beta_{ib} - \gamma_{ic} < 0$이 되면 부품 i를 절단하지 않도록 하는 해를 얻게 되어 부분문제 LR_i의 최적해를 구할 수 있게 된다. 이때 계산의 복잡도는 n=Max{$|L|,|W|,|H|$}라 할 때 $\alpha_{ia}, \beta_{ib}, \gamma_{ic}$를 찾는 $O(n)$의 다항식 시간 안에 결정된다.

이와 같이 모든 i에 대하여 x_{ia}, y_{ib}, z_{ic}가 정해지면 g_{rst}는 원자재에서 부품에 의해 잘려지지 않은 부분을 말하는 것이기 때문에 여기에 대응하는 절단되지 않은 부분의 g_{rst} 를 결정해 주면 된다.

이 라그랑지안 문제 LR을 부경사법에 의해 해를 찾을 때 라그랑지안 승수의 개선방향과 개선폭은 Held et al의 라그랑지안 승수 조정방법에 의한다. 라그랑지안 문제 풀이 과정에서 바로 전단계의 해를 X_{ia}, Y_{ib}, Z_{ic}라 정의한다면, 개선방향 벡터는 완화된 제약식에 따라 U, D, E, F라 할 때 다음과 같다.

$$U_{iabc} = 3l_iw_ih_i - l_iw_ih_iX_{ia} - l_iw_ih_iY_{ib} - l_iw_ih_iZ_{ic} - \sum_{t=c}^{c+h_i-1} \sum_{s=b}^{b+w_i-1} \sum_{r=a}^{a+l_i-1} G_{rst}$$

$$D_r = W \cdot H - \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot h_i \sum_{a=r-l_i+1}^{r} X_{ia} - \sum_{s=0}^{W-1} \sum_{t=0}^{H-1} G_{rst}$$

$$E_s = L \cdot H - \sum_{i=1}^{m} l_i \cdot h_i \sum_{b=s-w_i+1}^{s} Y_{ib} - \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{t=0}^{H-1} G_{rst}$$

$$F_t = W \cdot L - \sum_{i=1}^{m} l_i \cdot w_i \sum_{c=t-h_i+1}^{t} Z_{ic} - \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{W-1} G_{rst}$$

개선폭 t는 다음과 같이 정의한다.

$$t = \pi(Z_{UB} - Z_{LB}) / S^2$$

여기서 $0 \leq \pi \leq 2$,

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{a=0}^{L-1} \sum_{b=0}^{W-1} \sum_{c=0}^{H-1} (U_{iabc})^2 + \sum_{r=0}^{L-1} D_r^2 + \sum_{s=0}^{W-1} E_s^2 + \sum_{t=0}^{H-1} F_t^2 \text{ 이다.}$$

Held et al.의 라그랑지안 풀이방법에 따라 처음 2N(N=$|L|+|W|+|H|$)횟수만큼은 π는 2로 정하여 계산을 수행하다가 연산횟수가 매 5회마다 π값을 반으로 줄인다. 이와 같이 매 5회마다 π값을 반으로 줄여가다가 ε= 0.005보다 π가 작을 때 종료하도록 한다. 부경사법 절차에 의해 원문제의 최적해가 발견되거나($Z_{\min}=Z_{LB}$) 그렇지 않으면 최적해를 발견하지 못하고 종료하게 된다. 이렇게 되면 $Z_{\min}$값을 가지고 분지를 하여 최적해를 찾게 된다.

분지전략

분지한계법에서 분지나무를 고려하기 위해 다음 집합을 정의하자.

- L_1 ; 초기마디부터 현재의 마디까지 이미 절단되어 있는 부품의 집합
- L_2 ; 아직 절단되지 않은 부품으로 현 마디 이하부터 고려가 가능한 부품의 집합
- L_3 ; 현재의 마디까지 탐색해 오며 이미 절단이 불가능하다고 판단된 부품 집합
- E_1 ; 원자재에서 절단이 되지 않아 비어있는 공간

분지나무에서 분지는 부품 하나를 절단하는 것을 의미하고 그 위치가 (a,b,c)라면 L_2에 있는 부품 i에 대한 (x_{ia}, y_{ib}, z_{ic})에 1을 할당하

는 것이다. 원자재에서 절단되지 않고 남아 있는 공간집합 E중에서 제일 하단 좌측 끝에 있는 절단지점을 (R,S,T)라 하자.

$$(R,S,T)=\min_{t\in H}[\min_{s\in W}[\min_{r\in L}((r,s,t)\,|\,(r,s,t)\in E_1)]]$$

이와 같은 절단가능지점 (R,S,T)가 발견되면 이 지점에 $Z_{i(RST)}$인 부품 i를 절단한다.

$$Z_{i(RST)} = \operatorname*{Max}_{i}[Z_i\,|\,Z_i=A_{iR}-B_{iS}-C_{iT}]$$

이와 같이 부품 i를 (R,S,T)위치에 절단하므로 분지를 하게 된다. 이 (R,S,T) 지점에 절단되는 부품이 없다면 (S,T,R)지점, 그 다음 (T,R,S)지점 순으로 절단하게 된다. 이것은 곧 x, y, z축으로 평행하게 절단하는 것이 된다.

다음 고려되는 지점(R,ST)의 범위를 축소해 보자. 원자재를 절단할 때 모든 단위위치에서 절단이 가능하지는 않다. 부품의 크기에 따라서 원자재를 자를 수 있는 가능한 위치들만 고려한다면 문제의 크기가 축소되어 계산량이 줄어들 수 있을 것이다. 이 방법은 절단하고자 하는 부품은 기존의 절단하고자 했던 다른 부품과 겹치거나 원자재밖에 놓이지 않아야 한다는 것을 이용하여 문제의 크기를 줄이는 방법이다. 가로방향 절단가능 위치집합을 L_0라 하면 L_0는 다음과 같이 정의된다.

$$L_0=\{x\,|\,x=\sum_{i=1}^{m} l_i k_i,\ 0\le x\le L\text{-}\min(l_i\,|\,i=1,\dots,m),\ k_i\ge 0\text{, 정수}\}$$

마찬가지로 세로, 높이방향에 대해서도 같은 방법을 적용할 수 있다. 이 방법은 최적 조건을 위배하지 않으면서 원자재의 가로, 세로, 높이방향의 절단 위치집합을 줄일 수 있다. 가로, 세로, 높이에 대하여 부품 i의 절단 가능한 지점 L_i, W_i, H_i는 다음과 같다.

$$L_i=\{x\,|\,x=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k l_k,\ 0\le x\le L\text{-}l_i,\ \alpha_k\ge 0\text{ 정수},\ k=1,\dots,m\}$$

$$W_i=\{y\,|\,y=\sum_{k=1}^{m}\beta_k w_k,\ 0\le y\le W\text{-}l_i,\ \beta_k\ge 0\text{ 정수},\ k=1,\dots,m\}$$

$$H_i=\{z\,|\,z=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k h_k,\ 0\le z\le H\text{-}h_i,\ \gamma_k\ge 0\text{ 정수},\ k=1,\dots,m\}$$

각 노드에서 $\pi=2$ 로 정하고 50회의 부경사법 iter. 을 행한다. 각 노드의 초기승수는 부모노드에서 결정된 가장 좋은 상한값을 주는 승수로 정한다. 위에서 고려된 발견적 방법이 분지나무의 모든 마디에서 사용된다.

한계전략

한계전략은 분지끝을 촉진시키기 위해 상한을 선정하는 것이다. 절단해 나가면서 상한값을 형성한다는 것은 아직 절단되지 않은 여유공간에 부품을 임의로 절단할 때 겹쳐서 절단하는 불법절단이 발생하기 때문이다. 분지후 분지마디에서 결정되는 총 절단의 예상가치는 분지마디가 n이라 할 때 다음과 같이 고려한다.

$f(n) = g(n) + h(n)$

$f(n)$;마디 n에서의 예상되는 절단의 총가치

$g(n)$;마디 n까지 절단된 부품들(L_i)의 가치합

$h(n)$;여유공간에 절단될 수 있는 부품들의 예상가치합

이때 $g(n)$은 기존에 절단된 부품들의 가치

는 알고 있기 때문에 쉽게 구할 수 있다. 그러나 $h(n)$은 쉽게 구할 수 없다. 본 한계전략에서는 $h(n)$의 상한값과 하한값을 임의의 마디 n에 대하여 구하도록 한다. 상한값은 앞에서 정의한 라그랑지안 문제의 상한값을 사용하고 하한값은 다음과 같은 발견적 방법을 사용하여 구한다.

① X_{ia}를 라그랑지안 문제의 해라 할 때 $[i \mid X_{ia}=1$이고 $i \notin L_i]$인 부품들을 라그랑지안 값 Z_i에 대해 내림차순 정리한다.

② 각 부품을 순서에 의해 절단하되 만일 겹치는 절단이 생기는 부품은 제외시킨다.

③ ②에 의해 모든 절단이 완료시 생기는 빈 공간 E_2를 정의한다.

$E_2 = [(r,s,t) \mid (r,s,t)$는 부품에 의해 절단되지 않은 빈 공간$]$

④ E_2가 비어있으면 ⑥으로 가고 아니면 ⑤로 간다.

⑤ (R,S,T)를 다음과 같이 정의한다.

$$(R,S,T)=\min_{t\in H}\{\min_{s\in W}[\min_{r\in L}((r,s,t)\ \ (r,s,t)\in E_2)]\}$$

이 (R,S,T)에 대응하는 가장 큰 라그랑지안 값 Z_i를 갖는 부품 i가 불법절단이 아니라면 절단한다. 이러한 부품이 없다면 (R,S,T)를 E_2에서 삭제한다. ④로 간다.

⑥ 절단이 끝난 원자재에 불법절단이 없다면 Z_{LB}를 수정하고 이 값을 하한으로 정한다.

위와 같은 분지한계법을 적용해 나갈 때 상한값에 대해 다음 조건 중에서 하나만 만족되어도 되돌아(backtracking)간다.

(i) $\min\left[\sum_{i=1}^{m} Q_i y_i,\ Z_{UB}\right] \le Z_{LB}$

(ii) $\sum_{i=1}^{m} \theta_i l_i w_i h_i > LWH$

(iii) $\sum_{i=1}^{m} \theta_i y_i > Z_{UB}$

여기서 θ_i란 현재 마디까지의 탐색과정중 부품 i가 L_1에 포함되어져 있는 개수이다.

탐색전략

깊이우선 탐색법은 매 단계에서 모든 마디를 분지하지 않기 때문에 좋은 결과를 제공하기도 한다. 또한 너비 탐색법은 해가 좋지 않은 경로들로 계속해서 진행하지 않아도 되기 때문에 좋은 결과를 줄 수 있다. 따라서 이 두 가지 방법을 혼합한 방법으로 최우선 탐색법(Best First Search)방법을 사용하도록 한다.

이 최우선 탐색을 사용시 원자재의 크기가 한정되어 있다면 항상 유한번의 계산 안에 탐색이 종료할 수 있다. 또한 탐색이 종료하기 전에 시작마디 s로부터 종료마디까지의 최적경로상에 있는 임의의 마디 n'에 대해 상한값 $f(n') \ge f^*(s)$ 가 성립한다. 따라서 분지를 위해 $f(n) \ge f^*(s)$가 성립하는 임의의 마디 n을 선택할 때 3차원 절단문제의 절단나무에서 최우선 탐색방법은 시작 s마디로부터 종료마디까지 경로가 존재한다면 최적경로를 찾아내고 종료하게 된다.

3. 해 법

3차원 길로틴 절단문제를 위에서 정의한 분지한계법을 기준으로 다음과 같은 해법을

이용하여 최적해를 찾아가도록 한다.

단계 1. 초기화

빈 원자재를 시작마디 s로 한다. 집합 L_1, L_2, S 를 다음과 같이 정의한다.

L_1 : = Φ, L_2 : = $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, b_i ; 부품 i

$S = \{(r, s, t) \mid$ 원자재에서 잘려지지 않은 공간 $r \in L$, $s \in W$, $t \in H\}$

단계 2. 절단지점의 결정

절단가능점 (R, S, T)를 원자재에서 아직 절단되지 않은 부분 E_1로부터 정한다.

$$(R,S,T) = \min_{t \in H}[\min_{s \in W}[\min_{r \in L}((r,s,t) \mid (r,s,t) \in E_1)]]$$

단계 3. 분지마디의 선택

L_2에 있는 부품중 $Z_{i(RST)}$값이 제일 큰 부품을 선정하여 절단한다. 만일 이 절단가능점에 이러한 절단가능 부품이 없다면 이 (R,S,T)를 E_1에서 제거하고 (S,T,R), (T,R,S)지점을 차례로 찾아 이 지점에 절단한다. 그렇지 않다면 이 지점에 부품을 절단하고 이 점을 E_1에서 제거한다. 절단된 부품을 L_1에 집어넣는다. 이때 이 부품을 L_2에서 지운다. 단계 4로 간다.

단계 4 한계값의 계산

L_2에 있는 분지가 가능한 각 부품의 절단에 따른 라그랑지안 문제를 풀어 상한 f값과 발견적 방법을 통한 하한값 Z_{LB}를 구한다. 또 집합 L_2가 비어있거나 라그랑지안 값 $h'(R)$=0이면 종료한다. 아니면 단계 4로 간다.

단계 5. 종료기준

b_k가 L_2에 있는 마지막 부품이라면 최적을 발견하고 종료한다. 이때 초기마디 s에서 이 b_k를 절단하는 마디까지의 경로를 좇으면 최적 절단순서가 형성된다. 위와 같이 절단된 패턴이 가능해라면 Z_{LB}를 수정한다.

b_k가 L_2에 있는 마지막 부품이 아니라면 단계 2로 간다.

표 1. 원자재 크기에 따른 수율

실험번호	부품 [번호,개수,규격]
1	[1,20,2×6×8], [2,50,8×4×10]
2	[1,45,8×16×4], [2,60,8×8×8], [3,50,8×12×12], [4,25,12×4×4]
3	[1,35,10×5×5], [2,40,5×15×10], [3,28,5×15×15]
4	[1,50,36×28×24], [2,60,40×32×20]
5	[1,25,15×20×25], [2,30,10×15×10], [3,40,20×25×35]
6	[1,28,18×10×8], [2,37,12×14×10], [3,30,6×10×8]
7	[1,15,7×4×10], [2,12,3×5×11], [3,20,6×9×12]
8	[1,20,6×8×11], [2,17,5×15×9], [3,13,4×13×7], [4,24,12×13×8], [5,21,10×14×11]
9	[1,18,10×13×11], [2,20,8×9×10], [3,12,7×12×15], [4,22,14×15×11]
10	[1,43,6×8×11], [2,22,5×15×9], [3,30,4×13×7]
11	[1,30,5×11×14], [2,28,9×12×10], [3,37,7×13×17], [4,23,10×10×8]
12	[1,35,3×6×8], [2,40,5×9×4], [3,15,8×9×12]
13	[1,56,7×8×3], [2,28,12×11×4]
14	[1,25,4×8×6], [2,32,10×12×6], [3,45,14×14×8]
15	[1,25,6×6×9], [2,25,12×10×8], [3,15,4×7×5], [4,20,7×9×11]
16	[1,35,15×18×17], [2,30,11×14×11], [3,25,24×16×15]
17	[1,25,21×13×11], [2,20,11×13×19], [3,20,10×14×6], [4,34,8×13×5]

표 2. 탐색마디에서 최적해의 수렴결과

실험 번호	방법 I			방법 II		
	탐색 마디	시간 (min)	최적해	탐색 마디	시간 (sec)	최적해
1	1024	538.4	76.4	1432	1817	82.3
2	85	134.9	83.3	123	763.5	93.4
3	175	241.4	88.5	224	132	90.4
4	39	14.3	82.3	401	124.7	81.5
5	235	302.6	90.8	209	370.8	87.6
6	834	403.3	77.4	952	498.8	89.1
7	65	34.5	93.5	182	174.5	92.0
8	1241	610.4	85.3	896	578.3	86.2
9	381	312.4	80.0	403	426.7	78.4
10	88	32.7	92.5	128	843.6	87.6
11	239	295.5	73.2	576	543.5	85.3
12	352	321.3	87.1	383	440.6	79.6
13	1002	518.3	71.2	2113	1157.7	83.0
14	232	233.4	82.9	731	558.4	77.5
15	753	330.8	88.2	472	341.6	83.4
16	438	374.3	70.6	2318	1227.9	80.4
17	1174	669.3	78.8	823	407.7	85.2
평균	491.6	315.7	82.5	727.4	612.2	84.9

실험을 위해 Ivancic et. al[11]의 실험자료를 사용하였다. Ivancic et. al은 상자를 컨테이너에 적재하는 문제에 이 자료를 사용했으나 Ivancic et. al의 컨테이너 적재문제는 비길로틴 절단문제와 같은 문제가 되므로 실험결과를 비교하는 데 무리가 없다. 단, 원자재의 사용개수를 본 연구에서는 하나로 제한했으나 Ivancic et. al은 사용개수에 제한을 두지 않았기 때문에 원자재 크기를 본 문제에 맞게 수정하였다. 즉, 방법 I에서는 70×70×70의 원자재를, 방법 II에서는 100×100×100의 원자재를 가지고 실험을 하였다. 원자재의 크기에 따른 비교방법으로 수율(= $\sum_{i \in S_R} (l_i \times w_i \times h_i) / (L \times W \times H) * 100$, S_R=원자재로부터 잘려진 부품집합)을 사용하였다.

4. 결 론

본 연구는 3차원 비길로틴 자재절단문제를 최적해 방법에 의해 해결하도록 하였다. 3차원 자재절단문제는 3차원 적재문제와 연관되어 현재 많은 연구가 진행되고 있으나 계산의 복잡성으로 인해 발견적 방법에 치우치고 있는 실정이다. 본 연구에서는 먼저 정수계획 모형으로 3차원 비길로틴 자재절단을 모형화하였으며 이를 라그랑지안 완화시켜 최적해를 찾도록 하고 여기서 최적해를 찾지 못하면 라그랑지안 값을 상한으로 하는 분지한계법으로 최적해를 찾도록 하였다.

2차원 비길로틴 절단문제가 2차원 파레트 적재와 같은 문제가 되듯이 3차원 비길로틴 적재문제에 적재의 안정성이 추가되어 고려된다면 3차원 비길로틴 절단문제는 3차원 컨테이너 적재문제가 된다. 3차원 절단문제의 현재까지 연구현황은 발견적 방법으로 해를 찾아 왔으나 이 연구에서는 최적해 방법을 처음으로 제시하였다. 이 방법은 3차원 컨테이너 적재문제의 최적해법을 연구하는 데 많은 도움을 줄 것이다.

참 고 문 헌

[1] 김상열, 박순달, "효율적인 2단계 길로틴

평면절단 방법", 산업공학, Vol.8, No.2, 1995, pp.151-159

[2] 김상열, 박순달, "최적해 방법에 의한 3차원 길로틴 3단계 자재절단 방법", 한국경영과학회/대한산업공학회 '96 춘계 공동학술대회 발표논문집, pp.276-279

[3] Beasley J.E., "An exact two-Dimensional non-guillotine cutting tree search procedure", Operations Research., Vol.33, No.1, (1985), pp.49-64

4. Beasley J.E., "Bounds for two-dimensional cutting", J. Opl Res. Soc., Vol.36, No.1 (1985), pp.71-74

[5] Biro Milos and Endre Boros, "Network flows and non-guillotine cutting patterns", European Journal of Operational Research, Vol.16, (1984), pp.215-221

[6] Chauny,F.,Loulou,R.Sadones,S.&Soimis,F., "A two phase heuristic for two-dimensional cutting stock problem", J. Oper. Res. Soc., Vol.42, (1991), pp.39-47

[7] Chen C.S., S.Sarin & B.Ram, "The pallet packing problem for non-uniform box sizes", Int. J. Prod. Res., Vol.29, No.10, (1991), pp.1963-1968

[8] Hadjiconstantinous Eleni, Nicos Christofides, "An exact algorithm for general, orthogonal, two-dimensional knapsack problems", European Journal of Operational Research, Vol.83, (1995), pp.39-56

[9] Held,M., H.,Wolfe,P. & Crowder,H.D., "Validation of subgradient optimization", Ma- thematical Programming, Vol.6, No.1, (1973), pp.62-88

[10] Held,M. & R.M.Karp,"The traveling salesman problem and minimum spanning trees: partII", Mathematical Programming, Vol.1, (1971), pp.6-25

[11] Ivancic N., Mathur K., Mohanty B.B., "An integer programming based heuristic approach to the three-dimensional packing problem", J. Mfg. Oper. Mgt. 2,(1989), pp. 268-298

[12] W. Schneider Weishuang Qu and Jerry L. Sanders,"Trim-loss minimization in a crepe-rubber mill;optimal solution versus heuristic in the 2(3)-dimensional case", European Journal of Operational Research, Vol.34,(1988), pp.273-281

96년 6월 최초 접수, 96년 10월 최종 수정