

■ 연구논문

적합성 정도를 이용한 공정능력의 평가

박상규

대유공업전문대학 공업경영과

정규련

승실대학교 산업공학과

An Evaluation of Process Capability Using Degree of Conformance

Sang-Gyu Park

Dept. of Industrial Engineering, Dae Yeu Technical Junior College

Kyu-Ryun Chung

Dept. of Industrial Engineering, Soong Sil University

Abstract

Though the quality characteristics within a specified tolerance are equally desired quality there is a difference in conformance between a specification limit and a target value. In this paper we propose a measure of process capability that takes into account the degree of conformance to a target value as well as the process variation.

1. 서론

제품을 처음부터 정확하게 만들자는 것과 양질의 제품을 만들자는 목표는 훌륭한 동기 부여가 되지만, 공정에서 요구조건과 일치하지 않으면 자원의 낭비가 된다. 예를들어 선반의 가공능력이 떨어지면 작업자의 노력에도 불구하고 좋은 품질의 제품은 가공해 낼 수 없다. 작업자가 기계의 요구 조건을 만족시킬 수 없다면 그 또한 마찬가지이다. 공정능력은 여러 방식으로 정의되어 왔는데 일반적으로 공정의 산출물의 특성이 변화하는 범위로서 설명되고 있다. 전형적인 공정능력지수 (C_p)는 다음 식과 같이 실제 공정산포와 허용가능한 공정산포의 비로 나타내고 있다. [Kane, 1986]

$$C_p = \frac{\text{허용가능한 공정산포}}{\text{실제 공정산포}}$$

여기서 허용가능한 공정산포는 고정된 것으로 고려되는데 구체적으로는 공차로 표시되며, 실제공정산포는 공정 산출물의 특성치가 근사적으로 정규분포를 따르며 관리상태에 있다는 가정하에 추정된 값을 이용하고 있다.

따라서 공정능력지수 C_p 는

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{USL - LSL}{6\sigma} \\ &= \frac{USL - LSL}{NT} \end{aligned} \quad (1)$$

로 표현된다. 이 의미는 공정의 자연공차(6σ)와 규격한계를 비교평가하는 것이다. 식 (1)에서 σ 는 추정되어야 하므로 그 추정치로

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6s} \quad (2)$$

단,

$$s = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

이 사용되고 있다.

이 공정능력지수는 공정평균이 규격한계에 가까이 위치하면 그 값이 높더라도 규격의 제품이 발생할 가능성이 있다.

C_{pk} 는 규격상한과 규격하한을 고려한 것과 규격중심과 공정평균과의 치우침을 고려한 것으로 분류된다. 규격상한과 규격하한을 고려한 공정능력지수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} CPU &= \frac{\text{허용가능한 상한산포}}{\text{실제 상한산포}} \\ &= \frac{USL - \mu}{NT/2} \\ &= \frac{USL - \mu}{3\sigma} \end{aligned} \quad (3)$$

$$CPL = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \quad (4)$$

CPU 와 CPL 의 추정치는 μ 를 \bar{x} 로 σ 를 s 로 대체하면 구해진다. 이로부터 C_{pk} 는

$$C_{pk} = \min(CPU, CPL) \quad (5)$$

가 된다.

한편 공정평균과 규격중심과의 치우침을 고려한 경우는

$$C_{pk} = (1-k)C_p \quad (6)$$

단,

$$k = \frac{2|m-\mu|}{USL-LSL}, \quad 0 < k < 1 \quad (7)$$

이며, Fred(1991)에 의해서 식 (7)에서 m 이 규격중심이면 식 (5)와 (6)은 동일하다고 증명되었기 때문에 같은 기호 C_{pk} 를 사용하였다.

C_{pm} 은 공정변동과 목표치(Target value)에 대한 근접도를 설명할 수 있는 지수로 다음과 같이 정의된다. [Chan 외, 1988]

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sigma'} \quad (8)$$

단,

$$\sigma' = \frac{\sum(x_i - T)^2}{n-1}, \quad T = \text{목표치}$$

여기서 $\sigma'^2 = E(X - \mu)^2 + (\mu - T)^2$ 이고 $\sigma^2 = E(X - \mu)^2$ 이므로 식(8)은

$$\begin{aligned} C_{pm} &= \frac{USL-LSL}{6\sigma^2 + (\mu-T)^2} \\ &= \frac{C_p}{\sqrt{1 + \frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2}}} \end{aligned} \quad (9)$$

이 된다. 한편 C_p 에 대하여 신뢰수준 95%로 신뢰하한을 제시한 것도 있다. [Chou 외, 1990]

앞에서 살펴본 공정능력을 평가하는 지수들을 요약하면 <표 1>과 같다.

지금까지 제시된 공정능력지수들은 허용가능한 공정산포와 실제공정산포를 이용한 것이다. 즉, 선반가공공정이 관리된 상태에 있을 때 가공물의 치수를 이용하여 공정능력을 파악할 경우를 보면 시료로 취한 가공물의 치수를 측정하여 표본평균과 표본표준편차를 구한 다음에 <표 1>에 제시된 추정식을 적용한 공정능력지수로 평가하고 있다. 특히 양쪽 규격내의 목표치가 주어진 경우에는 품질특성치의 평균이 목표치로부터 그 치우침 정도에 따라 평가결과는 다르게 나타난다. 그런데 이 방법들은 품질특성치가 규격내에 있더라도 목표치에 어느 정도 적합한가를 함께 고려한 것은 아니다. 예를 들어, 선반가공에서

〈 표 1 〉 공정능력 지수

공정능력 지수	추 정 식	비 고
C_p	$\frac{USL - LSL}{6\sigma}$	양쪽규격
CPU	$\frac{USL - \bar{x}}{3s}$	규격상한
CPL	$\frac{\bar{x} - LSL}{3s}$	규격하한
k	$\frac{2 m - \bar{x} }{USL - LSL}$	규격중심과 공정평균과의 치우침
C_{pk}	$\text{Min}\{CPL, CPU\}$ $= C_p(1 - k)$	양쪽규격 치우침이 있을때
C_{pm}	$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{s^2 + \frac{n(\bar{x} - T)^2}{n-1}}}$	목표치와 근접도 고려

가공물의 치수가 규격에 만족되더라도 규격한계에 가깝게 가공된 것과 목표치에 가깝게 가공된 것의 품질에 대한 적합성은 모두 같다고 평가할 수는 없을 것이다. 다시 말하면, 품질특성치가 규격한계나 목표치에 근접된 정도에 따라 제품기능과 이에 따른 비용 등은 다르게 평가될 수 있기 때문이다.

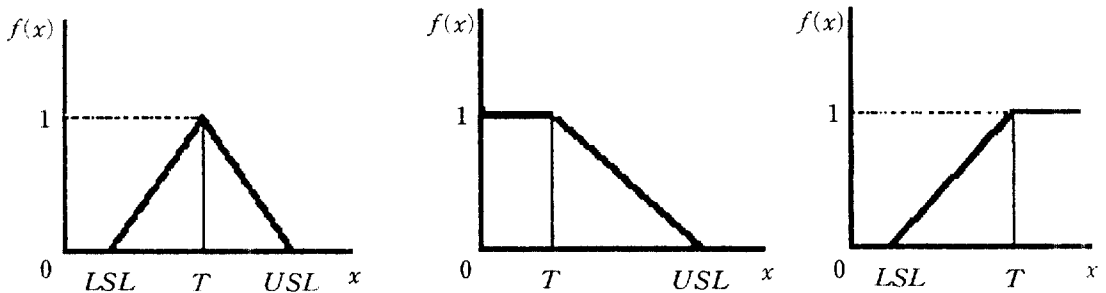
따라서 본 연구에서는 품질특성치의 변동을 적합성의 변화로 반영될 수 있는 함수를 규격과 목표치를 이용하여 수립한다. 이 함수는 비용을 고려한 Taguchi의 손실함수(Loss function)의 의미가 아니고 품질특성치의 규격과 목표치에 대한 적합성 정도의 변화를 나타낸 것이다. 이어서 추출된 시료의 품질특성치의 모평균과 모표준편차 또는 표본평균과 표본표준편차를 수립된 함수에 적용하여 공정능력을 상대적으로 평가하는 방법을 제시한다.

2. 적합성 함수를 이용한 공정능력의 평가

공정에서 가공된 제품을 검사할 때 규격내의 제품 즉, 양품으로 판정이 나더라도 모두 똑같은 품질이라고 볼 수는 없다. 목표치에 얼마나 근접하느냐에 따라 약간의 차이는 있다. 이러한 차이에 대하여 Taguchi는 비용개념으로 파악하고 이를 손실함수로 표현하였지만, 여기서는 그 정도를 비용으로 파악한 것이 아니고 단지 품질특성치의 적합성 정도의 차이를 나타낸다.

2.1 적합성 함수의 수립

이 개념에 따라 품질특성치의 목표치에 대한 적합성 정도를 다음과 같이 정의한다. 규격 외의 품질특성치의 적합성 정도는 0, 목표치에 일치한 경우는 1로 하자. 그리고 규격내의 품질특성치의 적합성 정도는 0과 1사이의 값을 가지며, 선형으로 변하는 것으로 가정한다. 이 개념을 나타내면 <그림 1>과 같으며 USL 은 규격상한, LSL 은 규격하한 그리고 T 는 목표치이다.



< 그림 1 > 규격에 따른 적합성 함수

이와 같은 정의에 따라서 규격과 목표치가 주어진 경우의 품질특성치의 적합성 정도를 나타내는 선형함수를 수립하면 다음과 같다.

양쪽 규격이 주어진 경우의 품질특성치의 적합성 정도를 나타내는 함수는,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-LSL}{T-LSL}, & LSL \leq x \leq T \\ \frac{USL-x}{USL-T}, & T \leq x \leq USL \end{cases} \quad (10)$$

로 수립된다. 여기서, $x > USL$ 과 $x < LSL$ 이면 $f(x) = 0$ 이며, $T-LSL$ 과 $USL-T$ 는 일반적으로 같을 필요는 없다.

같은 방법으로 규격 상한만 주어진 경우의 적합성 함수는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{USL-x}{USL-T}, & T \leq x \leq USL \\ 1, & x \leq T \end{cases} \quad (11)$$

로 수립되며, $x > USL$ 이면 $f(x) = 0$ 이다.

또한 규격 하한만 주어진 경우의 적합성 함수는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-LSL}{T-LSL}, & LSL \leq x \leq T \\ 1, & x \geq T \end{cases} \quad (12)$$

로 수립되며, $x < LSL$ 이면 $f(x) = 0$ 이다.

2.2 공정능력의 평가

위와 같이 수립된 적합성 함수를 이용하여 품질특성치의 범위가 $\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$)에서 $\mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$)일 때를 기준으로 하여 공정의 적합성 정도를 평가하는 방법을 제시하면 다음과 같다.

(1) 규격과 목표치를 이용하여 적합성 함수를 수립한다.

양쪽규격과 목표치가 주어진 경우에는 식(10)을, 규격상한과 목표치가 주어진 경우에는 식(11)을 그리고 규격하한과 목표치가 주어진 경우에는 식(12)를 이용한다.

(2) 품질특성치의 μ 와 σ 를 추정한다.

이 모수를 알고 있는 경우에는 그 값을 이용하고, 그렇지 않으면 공정에서 n 개의 시료를 랜덤하게 추출하여 품질특성치의 표본평균 \bar{x} 와 표본 표준편차 s 를 이용한다.

(3) 품질특성치의 변동에 대한 적합성 정도를 구한다.

규격이 양쪽으로 주어진 경우에는 식(10)을, 규격상한만 주어진 경우에는 식(11)을 그리고 규격하한만 주어진 경우에는 식(12)을 이용하여 $\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$)와 $\mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$)의 적합성 정도를 구하고 그값을 각각 $a = f(\mu - 3\sigma)$ 와 $b = f(\mu + 3\sigma)$ 또는 $a = f(\bar{x} - 3s)$ 와 $b = f(\bar{x} + 3s)$ 로 놓는다.

(4) 공정능력을 평가하는 지수를 구한다.

$\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$)와 $\mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$)의 범위 내의 적합성 정도를 대표하는 값을 다음 식으로 구한다. 이 결과를 적합성 정도를 나타내는 지수로 한다.

$$C_{pd} = \int_a^b yf(y)dy / \int_a^b f(y)dy \quad (13)$$

여기서 $f(y)$ 는 양쪽규격이 주어진 경우에는

$$f(y) = \begin{cases} (T-LSL)y + LSL - T \\ -(USL-T)y + USL - T \end{cases} \quad (13a)$$

이고, 규격상한만 주어진 경우에는

$$f(y) = -(USL-T)y + USL - T \quad (13b)$$

이며, 규격하한만 주어진 경우에는

$$f(y) = (T - LSL)y + LSL - T \quad (13c)$$

이다.

식 (13a), (13b) 및 (13c)의 $f(y)$ 에서 T 를 뺀 것은 계산의 편리성 때문이다. 양쪽규격인 경우에 식(13)의 적분구간은 $\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$) $\leq T \leq \mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$)이면 $[a, 1]$ 과 $[1, b]$ 로 나뉜다. 적합성의 정의에 따라서 양쪽규격이 주어진 경우에 식(13)의 결과는 $\mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$) $\leq LSL$ 이거나 $\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$) $\geq USL$ 이면 $C_{pd} = 0$ 이고, 규격상한이 주어진 경우에 $\mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$) $\leq T$ 이면 $C_{pd} = 1$ 이거나, $\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$) $\geq USL$ 이면 $C_{pd} = 0$ 이다. 또한 규격하한이 주어진 경우에는 $\mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$) $\leq LSL$ 이면 $C_{pd} = 0$, $\mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$) $\geq T$ 이면 $C_{pd} = 1$ 이다. 이 외에는 $0 < C_{pd} < 1$ 의 적합성 정도를 가진다. 따라서 실제 공정의 적합능력은 C_{pd} 가 1에 접근할수록 적합성이 높으며 공정의 산포가 적음을 의미한다.

(5) 공정능력을 평가한다.

식(13)으로 공정능력을 평가하는 기준을 제시하면 다음과 같다.

$0.67 \leq C_{pd} \leq 1.00$ 이면 공정능력은 매우 충분한 수준, $0.33 \leq C_{pd} \leq 0.67$ 이면 충분한 수준 그리고 $C_{pd} \leq 0.33$ 이면 부족한 상태로 판정한다. 이것은 규격과 목표치를 이용하여 수립된 함수에서 $T - LSL = USL - T$ 이고 $LSL = \mu - 3\sigma$ (또는 $\bar{x} - 3s$)와 $USL = \mu + 3\sigma$ (또는 $\bar{x} + 3s$)일 때의 적합성 정도를 기준으로 한 것이다.

3. 수치예

앞 절에서 제시한 방법을 Kane(1986)과 Chan 외(1988) 그리고 Fred(1991) 등이 사용한 예를 이용하여 적용해 보기로 한다. 이들이 첫번째로 예시한 것은 목표치가 규격중심과 일치하는 경우($USL - T = T - LSL$)로 <그림 2>와 같다. $USL = 18$, $LSL = 10$ 그리고 $T = 14$ 이며 모평균 μ 는 변하지만 모표준편차 σ 는 모두 2/3씩이다.

먼저 품질특성치에 대한 적합도 정도를 나타내는 함수는 식(10)에 의해서

$$f(x) = \begin{cases} x/4 - 5/2, & 10 \leq x \leq 14 \\ -x/4 + 5/2, & 14 \leq x \leq 18 \end{cases} \quad (14)$$

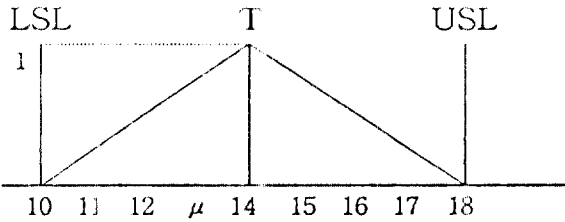
로 수립된다. $\mu = 13$ 일 때에는 $\mu - 3\sigma = 11$ 과 $\mu + 3\sigma = 15$ 이므로 이 값의 적합성 정도는 식(14)로부터 각각 $a = 1/4$ 과 $b = 3/4$ 이 된다. 따라서 11과 15사이의 적합성 정도의 대표값은 식(13)의 $f(y)$ 에 식(13a)를 적용하면

$$C_{pd} = \frac{\int_{1/4}^1 4(y-1)y \, dy + \int_1^{3/4} 4(1-y)y \, dy}{\int_{1/4}^1 4(y-1) \, dy + \int_1^{3/4} 4(1-y) \, dy} \quad (15)$$

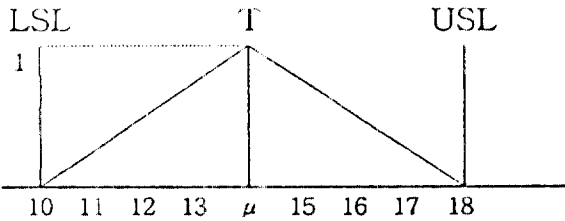
$$= 0.53$$

이 된다.

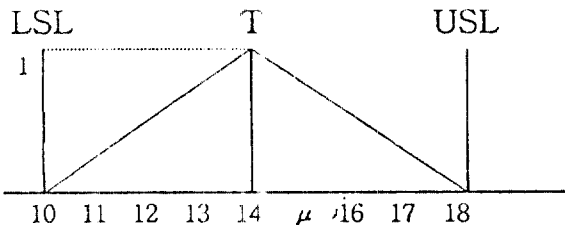
같은 방법으로 $\mu=14, 15, 16$ 및 17 일 경우의 적합성 정도의 대표값을 구하면 각각 $0.67, 0.53, 0.33$ 및 0.30 이 된다. 이상의 결과는 <그림 2>의 우측에 나타냈다.



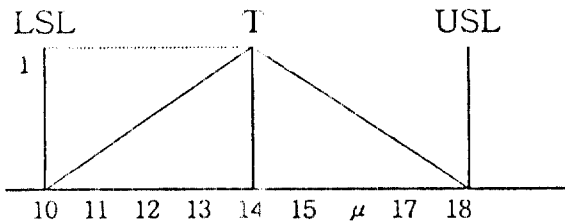
μ	Cp	CPL	CPU	Cpk	Cpm	Cpd
13	2	1.5	2.5	1.5	1.11	0.53



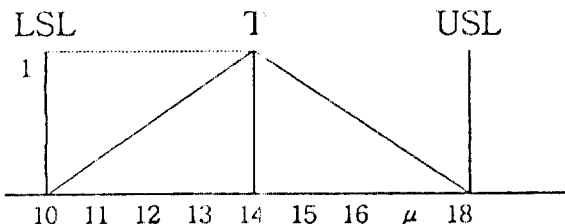
μ	Cp	CPL	CPU	Cpk	Cpm	Cpd
14	2	2.0	2.0	2.0	2.00	0.67



μ	Cp	CPL	CPU	Cpk	Cpm	Cpd
15	2	2.5	1.5	1.5	1.11	0.53



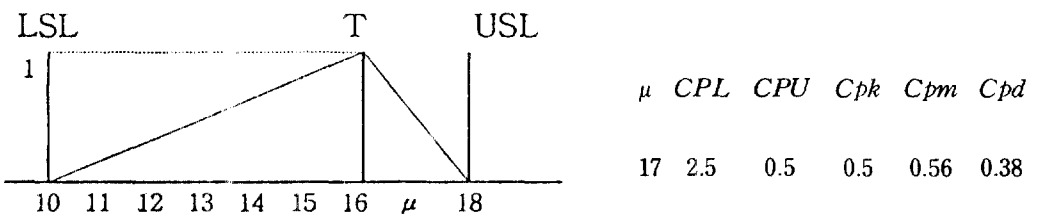
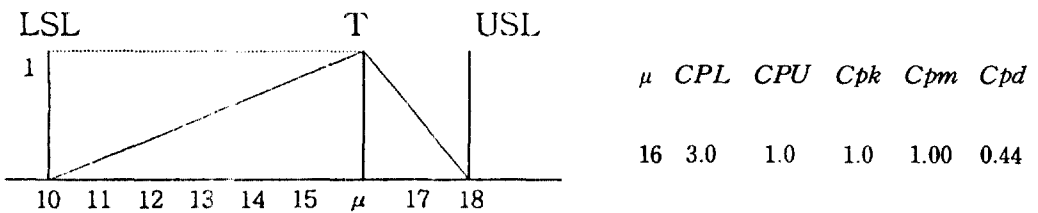
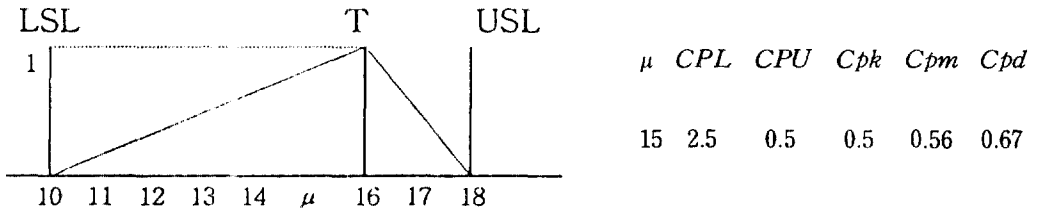
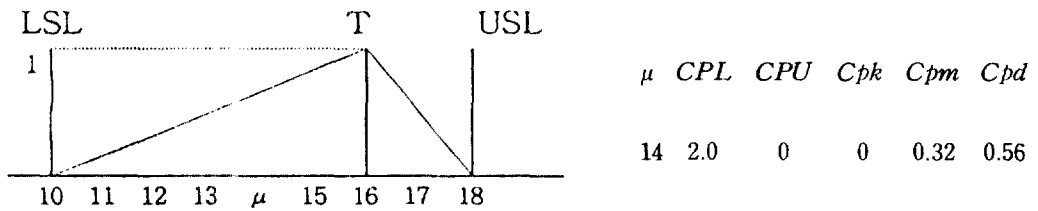
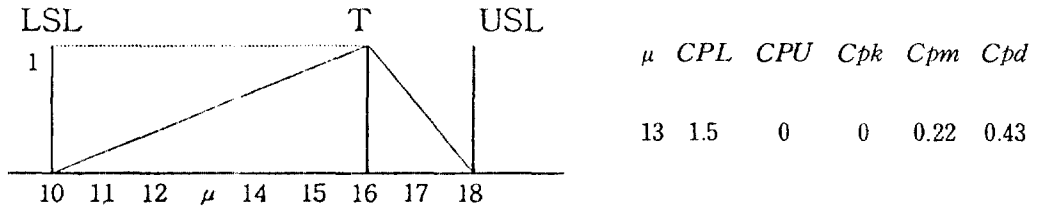
μ	Cp	CPL	CPU	Cpk	Cpm	Cpd
16	2	3.0	1.0	1.0	0.63	0.33



μ	Cp	CPL	CPU	Cpk	Cpm	Cpd
17	2	3.5	0.5	0.5	0.43	0.30

< 그림 2 > 규격중심과 목표치가 일치하는 경우의 공정능력지수의 비교

다음에 예시한 것은 목표치가 규격중심과 일치하지 않는 경우($USL - T \neq T - LSL$)로 <그림 3>이다. $USL = 18$, $LSL = 10$ 그리고 $T = 16$ 이고 μ 는 변하지만 σ 는 모두 2/3씩 일정하다. $\mu = 15$ 인 경우의 적합성 정도를 구하는 함수는 식(10)에 의해서



< 그림 3 > 규격중심과 목표치가 일치하지 않는 경우의 공정능력지수의 비교

$$f(x) = \begin{cases} x/6 - 5/3, & 10 \leq x \leq 16 \\ -x/2 + 9, & 16 \leq x \leq 18 \end{cases} \quad (16)$$

로 수립된다. $\mu=15$ 일 때에는 $\mu-3\sigma=13$ 과 $\mu+3\sigma=17$ 이므로 이 값의 적합성 정도는 식(16)으로부터 각각 $a=1/2$ 와 $b=1/2$ 을 얻는다. 따라서 13과 17사이의 적합성 정도의 대표값은 $f(y)$ 를 식(13a)로 적용한 식(13)으로부터

$$\begin{aligned} C_{pd} &= \frac{\int_{1/2}^1 6(y-1)y \, dy + \int_1^{1/2} 2(1-y)y \, dy}{\int_{1/2}^1 6(y-1) \, dy + \int_1^{1/2} 2(1-y) \, dy} \\ &= 0.67 \end{aligned} \quad (17)$$

이 된다.

같은 방법으로 $\mu=13, 14, 16$ 및 17 인 경우의 적합성 정도의 대표값을 구하면 각각 0.43, 0.56, 0.44 및 0.38이 된다. 이상의 결과는 〈그림 3〉의 우측에 나타나 있다.

한편, 한쪽 규격만 주어진 경우도 양쪽규격인 경우와 동일한 방법으로 구할 수 있다. 이상의 예를 통하여 그 결과를 비교해 보면 기존의 공정능력지수로 평가된 것과 상대적으로 차이가 없다. 그렇지만 규격중심과 목표치가 일치하지 않는 경우인 $\mu=16$ 과 $\mu=17$ 일 때에는 본 결과가 상대적으로 낮게 평가되었다. 이것은 목표치를 중심으로 한 좌우의 품질특성치의 적합성 정도가 다르게 평가된 결과이다. 이것은 공정평균이 목표치에 일치하지 않을 수록 제품기능의 적합성은 떨어지며 동시에 관련비용이 증가된다는 것을 의미한다. 이러한 사실로부터 C_{pd} 는 규격중심과 목표치가 일치하지 않는 경우에 기존의 결과보다 상대적으로 낮게 평가됨을 알 수 있다.

4. 결론

일반적으로 공정능력은 공정의 산출물의 특성이 변화하는 범위로 설명되고 있다. 특히 공정능력지수는 실제 공정산포와 허용가능한 공정산포의 비로서 나타내 지고 있다. 여기서 허용가능한 공정산포는 공차로 표시되며 실제 공정산포는 공정 산출물의 특성치가 근사적으로 정규분포를 따르며 관리상태에 있다는 전제하에 추정된 값으로 이용되고 있다. 본 연구에서는 규격과 목표치를 이용한 적합성 함수를 수립하고 품질특성치의 변동을 이 함수에 반영하여 공정능력을 평가하는 방법을 제시하였다. 그렇기 때문에 기존의 공정능력지수와 비교하면 결과는 약간 다르게 나타날 수 밖에 없다. 특히 적합성 정도를 나타낸 대표값의 범위는 항상 0과 1사이로 나타나기 때문에 상대적으로 비교하는데 편리하다. 특히 규격중심과 목표치가 일치하는 경우에는 기존의 공정능력 평가 결과와 상대적으로 길지만 그렇지 않은 경우에는 규격을 벗어난 품질특성치에 대한 산포의 적합성 정도가 0이 되기 때문에 기존의 평가결과보다 낮다. 적합성 정도를 나타내는 함수는 선형 이외의 다른 것으로도 적용시킬 수 있으며 앞으로 연구되어야 할 부분이다.

참고문헌

- [1] Chan, L. K., Cheng, S. W. and Spiring, F. A. (1988), "A New Measure of Process Capability: Cpm," *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, No. 3, pp. 162-175.
- [2] Chou, Y. M., Owen, D. B. and Borrego, S. A. (1990), "Lower Confidence Limits on Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, No. 3, pp. 223-229.
- [3] Fred A. Spring (1991), "The Cpm Index," *Quality Progress*, February, pp. 57-61.
- [4] Kane, V. E. (1986), "Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, No. 1, pp. 41-52.