▩ 연구논문

수명분포가 Phase-Type인 수리불가능한 제품의 보증정책

김호균
동의대학교 산업공학과

Warranty Policies for Non-Repairable Products with Phase-Type Lifetime Distributions

Ho Gyun Kim
Dept. of Industrial Engineering, Dongeui University

Abstract

Ritchken(1985) analyzes free replacement and pro-rata warranty policies for products receiving renewable warranies. He shows that for constant failure rates pro-rata warranty policies are more attractive to risk-averse manufacturers than shorter term free replacement policies that result in the same average warranty cost. This paper considers the case when product lifetimes distributions are of phase-type. When this is so, Ritchken's performance measures can be simplified considerably. It is found that irrespective of the pattern of failure rates, pro-rata warranty policies are preferable to free replacement policies. But the warranty period of the equivalent free replacement policy decreases and then increases, as product reliability (the average time between failures) increases.

1. 서론

기업의 사회적 책임 및 소비자 중심주의(consumerism)의 대두로 생산자는 소비자가 요구하는 품질이 충분히 충족되고 있는 것을 보증해 주어야 한다. 보증(warranty)제도는 생산자가 판매된 제품에 대하여 특정기간동안 발생하는 고장에 대하여 책임을 진다는 소비자와의 계약이다. 소비자는 비슷한 기능을 갖는 제품중에서 사후 부담이 적은 제품을 선호하고 그러한 생산자를 선호할 것이다. 생산자 입장에서 보증을 사용하는 목적은 소비자에게 제품의 품질을 확신시켜 줌으로써 판매량을 증가시키고, 소비자의 열외요구(claim)

로부터 자신을 보호하는 것이다. 보증정책은 보증기간 내에 발생하는 고장에 대한 소비자 부담 정도에 따라 크게 무료 보증(free replacement warranty)과 할인보증(prorata warranty)으로 나누어진다. 제품의 고장형태, 생산자/소비자 입장, 보증정책 및 적용시간 범위 등에 따라 많은 연구가 이루어져 왔다[1, 2, 3, 5, 6, 7, 10]. Ritchken(1985)은 생산자 입장에서 동일한 기대비용을 갖는 두 보증정책(무료보증, 할인보증)의 비용에 대한 분산 함수를 구하고, 지수 수명분포를 따를 때 할인보증이 더 낮은 분산을 가짐을 예시하였다. Mamer(1987)는 소비자 구매행태를 고려하여 세가지 보증정책(보통 무료보증, 무제한 무료보증, 할인 보증)하에서 생산자 기대이익 및 소비자 기대 비용을 분석하였다. 특별히, 분산을 위험척도로 이용한 논문이 있었다[1, 3, 7, 10]. 그러나 경제적 결과를 비교하는 성능에 관련된 척도가 재생함수(renewal function)와 재생관련 함수들을 포함하고 있어, 수명분포가 지수분포 등 특정분포를 따르는 경우를 제외하고는 이를 구하는 계산은 convolution 및 난해한 수치적분을 요구하게 된다. Neuts(1981)가 제안한 후로 Ph(Phase-Type)분포는 확률모형의 계산적인 접근방법으로 많이 사용되어 왔다. Kao & Smith(1993)는 제품의 수명이 Ph분포를 따를 때, Mamer(1987)가 도출한 복잡한 기대비용 및 이익함수의 계산을 단순화 시켰다.

본 연구는 일정한 고장률만을 고려한 Ritchken(1985)의 결과를 제품의 수명이 Ph분포일 경우로 확대한다. 할인보증이 고장률의 형태에 관계없이 동일한 기대비용을 갖는 무료보증보다 더 낮은 분산을 가짐을 알 수 있고 제품의 신뢰도가 증가할수록 고장률의 형태가 일정형이거나 감소형일 때는 동일한 기대비용을 갖는 무료보증 기간이 감소하지만 증가형일때는 감소하다가 증가함을 보였다. 이는 품질관리와 관련하여 보증제도의 보증요소의 취사선택시 이용될 것이다. 최근에 임의의 확률분포를 Ph분포로 표현하거나 근사시키는 방법[Johnson & Taaffe(1990), O'Cinneide(1990)]이 많이 개발되고 있으므로, 본 연구 결과는 현실 적용력을 강화시킬 수 있다.

우선, 2절에서는 Ritchken모형을 설명하고 그 결과를 요약한다. 3절에서는 확률모형의 계산에 유용하게 이용될 수 있는 Ph(Phase-Type)분포 및 Ph재생과정을 언급하고 보조 정리를 도출한다. 4절에서는 Ritchken의 결과식을 간단하게 표현하고 고장률의 형태에 따른 결과를 분석한다. 끝으로 결론 및 향후 연구방향을 제시한다.

2. Ritchken모형 및 결과

보증하에 판매되는 수리 불가능한(non-repairable) 제품이 보증기간내 고장이 발생하면 제품은 대체되고 보증은 갱신(renewing)된다. 고장없이 보증기간이 경과되면 생산자는 책임을 면하게 된다. 보증기간내 고장난 제품에 대한 생산자 부담비용은 보증정책의 종류에 따라 다르다. 무료보증하에 판매되는 제품이 보증기간 W_0 동안에 고장이 발생하면, 소비자에게 무료로 제품을 대체해 주고 보증은 갱신된다. 보증기간 W_1를 갖는 제품의 할인보증하에서의 고장비용은 사용시간에 비례하게 된다. 두가지 보증정책하에서 고장제품당 생산자가 부담하는 비용, $I_k(X_i)$는 다음과 같이 정리될 수 있다. 여기서 $k=0$은 무료보

증을, $k=1$은 할인보증을 표시하며, q는 대체시 생산자가 부담하는 단위비용이다. 고장간 제품의 수명 X_i는 분포함수 $F(X_i)$를 갖는다.

$$I_k(X_i) = \begin{cases} q(W_k - kX_i)/W_k, & 0 \le X_i \le W_k \\ 0 & , \quad X_i > W_k \end{cases} \tag{1}$$

$$; k = 0, 1$$

판매된 제품당 누적되는 총보증비용, $C_k = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} I_k(X_i)$이다. 여기서 $\tilde{n}$은 보증기간을 초과한 고장이 발생할 때까지의 고장회수를 나타낸다. $\tilde{n}$가 stopping time이므로 보증하에 판매된 제품단위당 생산자가 부담하는 기대총보증비용은 $E\{C_k\}=E\{\tilde{n}\}E\{I_k(X_i)\}$가 된다.

따라서 기대 총 보증비용은 다음으로 주어진다. [참조: Ritchken (1985)]

$$E\{C_k\} = \begin{cases} qF(W_0)^2/\bar{F}(W_0) & ; \quad k=0 \\ \dfrac{qF(W_1)}{W_1\bar{F}(W_1)} \displaystyle\int_0^{W_1} F(u)du & ; \quad k=1 \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $\bar{F}(\cdot)=1-F(\cdot)$이다.

또한, 반복분산법칙을 이용해 기대 총 보증비용의 분산, $Var\{C_k\}$을 구하였다.

$$Var\{C_k\} = \begin{cases} q^2F(W_0)^2[\bar{F}(W_0)^2 + F(W_0)]/\bar{F}(W_0)^2 & ; \quad k=0 \\ q^2F(W_1)[2\bar{F}(W_1)\displaystyle\int_0^{W_1}\int_0^u F(x)dxdu \\ \qquad +(\displaystyle\int_0^{W_1}F(x)dx)^2F(W_1)]/W_1^2\bar{F}(W_1)^2 & ; \quad k=1 \end{cases} \tag{3}$$

3. Ph(Phase-Type)분포 및 재생과정

Neuts(1981)가 Ph분포를 제안한 이후로 확률적 계산에 유용하게 이용되었으며 Ph재생과정은 여러 분야의 확률모형화에 사용되고 있다. Ph분포는 흡수상태(absorbing state)를 하나 가지는 $(m+1)$차 상태공간에서 정의된 연속시간 마코프체인(CTMC: continuous time Markov chain)이 흡수상태에 빠질 때까지 경과한 시간의 분포로 정의된다. 초기상태(initial state)를 나타내는 벡터 $\underline{\alpha}$와 infinitesimal generator Q가 주어지면, $Q=\begin{bmatrix} T & T^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Ph$(\underline{\alpha}, T)$로 표현된다. 여기서 T는 음의 대각요소 및 비음의 비대각요소(off-diagonal)를 갖는 $m\times m$ 행렬이고 $T\underline{e}+T^0=0$ & $\underline{e}=(1, 1, \cdots, 1)^T$이다. 이때 분포함수는 $F(t)=1-\underline{\alpha}\exp(Tt)\underline{e}$, $t\ge 0$로 평균수명은 $\mu=-\underline{\alpha}T^{-1}\underline{e}$가 된다.

제품수명이 Ph($\underline{\alpha}$, T)로 표현될 때, 제품에 고장이 발생되는 즉시 대체되는 일련의 제품 대체는 Ph재생과정을 형성한다. $N(t)$를 $(0, t]$에서의 대체되는 제품의 수라 한다. 재생과정$\{N(t), t \le 0\}$과 관련하여 generator $Q^* = T + T^0 \underline{\alpha}$를 갖는 비가략(irreducible)이고 재귀적(recurrent)인 m차-상태 연속시간 마코프 체인 $\{X(t), t \le 0\}$가 존재하게 된다.

조건부 확률 P_{ij}를 요소로 가지는 행렬함수 $P(n, t)$을 다음과 같이 정의할 때,

$$P_{ij}(n, t) = P\{N(t) = n, X(t) = j \mid N(0) = 0, X(0) = i\};$$
$$t \ge 0, n \ge 0, 1 \le i \le m \,\&\, 1 \le j \le m,$$

$\sum_{n=0}^{\infty} P(n, t) = \exp(Q^* t)$이고, $\exp(Q^* t)$의 (i, j)번째 요소가 $P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$로 주어진다. [참조: Neuts(1981)] $\underline{\nu}(t) = \underline{\alpha}\exp(Q^* t)$, $t \ge 0$로 놓으면, 초기 벡터 $\underline{\nu}(0) = \underline{\alpha}$로 주어질 때 $\underline{\nu}(t)$의 j번째 요소가 $P\{X(t) = j\}$로 된다. $\underline{\nu}(t) > 0$ & $\underline{\nu}(t)\,\underline{e} = 1$ 이므로, 표현($\underline{\nu}(t)$, T)를 갖는 분포는 Ph분포가 된다. $\mu(t)$를 그 평균이라 하면 $\mu(0) = \mu$이다. 또한, $\underline{\tau} = \underline{\alpha}\exp(TW)$로 놓으면, $\underline{\tau} \ge 0$ & $\underline{\tau}\,\underline{e} \le 1$ 이므로 표현($\underline{\tau}$, T)를 갖는 분포도 Ph분포를 한다. 이때 그 평균을 κ라 한다

Ritchken의 성능척도 식(2) 및 (3)을 계산하기 편하도록 표현하기 위하여 다음 보조정리를 얻는다.

보조정리 1.

$$\int_0^{W_1} F(u)du = W_1 - \mu + \kappa_1 \tag{4}$$

증명

$$\int_0^{W_1}\{1 - \underline{\alpha}\exp(Tu)\,\underline{e}\}du$$
$$= W_1 - \underline{\alpha}\int_0^{W_1}\exp(Tu)du\,\underline{e}$$
$$= W_1 - \underline{\alpha}\,[\exp(TW_1) - I]\,T^{-1}\underline{e}$$
$$= W_1 - \mu + x_1$$

보조정리 2.

$$\int_0^{W_1}\int_0^{u} F(x)dxdu = \frac{1}{2}W_1^2 - W_1\mu + (\underline{\alpha} - \tau_1)T^{-2}\underline{e} \tag{5}$$

증명

$$\int_0^{W_1}\int_0^u F(x)dxdu$$

$$=\int_0^{W_1}[u-\mu-\underline{\alpha}\exp(Tu)T^{-1}\underline{e}]\,du \qquad \text{(보조정리 1에서)}$$

$$=\frac{W_1^2}{2}-W_1\mu-\underline{\alpha}\int_0^{W_1}\exp(Tu)duT^{-1}\underline{e}$$

$$=\frac{W_1^2}{2}-W_1\mu-\underline{\alpha}[\exp(TW_1)-I]T^{-1}T^{-1}\underline{e}$$

$$=\frac{W_1^2}{2}-W_1\mu+(\underline{\alpha}-\tau_1)T^{-2}\underline{e}$$

4. 제품수명이 Ph분포일 때

제품수명이 m차 상태를 갖는 Ph분포를 가질 때, 보조정리 1, 2 및 $F(w)=1-\underline{\tau}\,\underline{e}$를 이용하면 2절에서 기술된 기대총보증비용 식(2)와 기대총보증비용의 분산 식(3)이 다음과 같이 간단하게 표현되고 쉽게 계산되어진다.

$$E\{C_0\} = q(1-z_0)^2/z_0$$

$$E\{C_1\} = q(W-\mu+\kappa_1)(1-z_1)/(W_1z_1)$$

$$Var\{C_0\} = q^2(z_0^2-3z_0+4-3z_0^{-1}+z_0^{-2})$$

$$Var\{C_1\} =(1-z_1)[\sigma^2z_1+[E\{I_1(x_i)\}]^2]/z_1$$

여기서 $z_k=\underline{\tau}_k\underline{e},\ k=0,1$

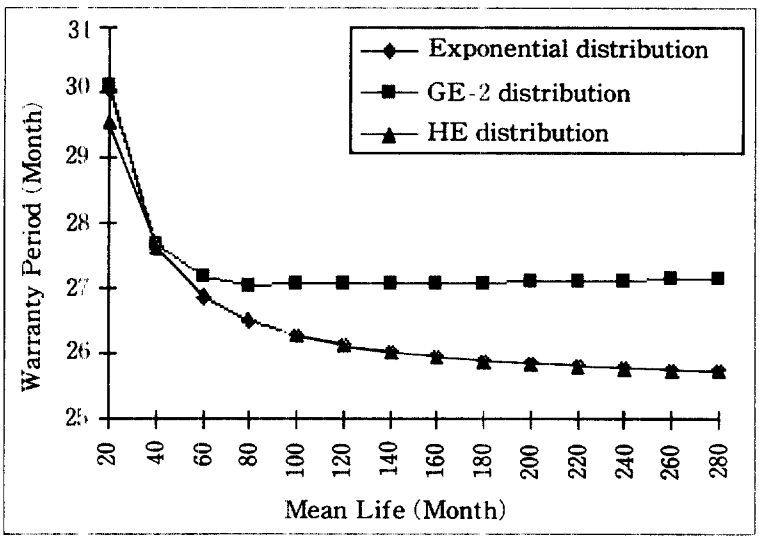
$$\sigma^2 = \frac{q^2}{W_1^2}[2(\underline{\alpha}-\underline{\tau}_1)T^{-2}\underline{e}-(\mu^2+\kappa_1^2)+2\kappa_1(\mu-W_1)]$$

$$E\{I_1(x_i)\} = \frac{q}{W_1}(W_1-\mu+\kappa_1)\text{이다} \qquad (6)$$

예제 : 결과를 예증하기 위해, Ritchken(1985)의 예제를 사용한다. $q=₩100$, $W_1=36$개월로 하고 제품의 수명분포로 Ph분포의 특수한 경우인 1) 지수분포: $(\alpha, T)=(1, -\lambda)$, 2) Generalized Erlarg 2 (GE-2)분포: $\underline{\alpha}=(1, 0)$, $T=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1\\ 0 & -\lambda_2\end{bmatrix}$ 그리고 3) Hyperexponential (HE)분포: $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2)$, $T=\text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2)$를 고려하였다. GE-2분포는 고장률이 IFR(increasing failure rate)이고 HE분포는 DFR(decreasing failure rate)분포이다.

세가지 형태의 고장률을 갖는 각 분포에 대하여, 먼저 보증기간 W_1을 갖는 할인보증하의 기대총보증비용 $E\{C_1\}$를 계산하고, 이와 동일한 기대 총보증 비용 $E\{C_0\}$를 갖는 무료보증의 보증기간 W_0를 구한다. 그리고 두 보증정책하에서 각 기대총보증비용의 분산 $Var\{C_0\}$, $Var\{C_1\}$을 계산한다 [참조: 〈표 1-3〉]. 주어진 평균수명 μ를 만족시키는 파라미터 λ_1, λ_2의 여러 가지 조합이 있을수 있으나, GE-2분포에서는 성능척도에 영향을 미치지 못하고 HE-2분포에서는 그렇지 않다. 여기에서는 HE-2분포에서 두개의 파라미터 조합만을 고려하였고 $\underline{\alpha}=(0.4, 0.6)$을 선택하였다. 고장률이 일정한 지수분포의 결과인 〈표 1〉은 Ritchken(1985)의 결과와 같다.

고장률의 형태에 관계없이 할인보증정책이 동일한 기대비용을 갖는 무료보증정책보다 기대 총보증 비용의 분산이 작아서 항상 유리함을 알수 있다. 또한 제품의 신뢰도(평균수명)가 증가하면, 기대보증비용과 비용분산이 감소한다. 그러나 〈그림 1〉에서처럼 고장률이 일정하거나 감소형일 때는 동일한 기대비용을 갖는 무료보증기간은 제품의 평균수명이 증가할수록 감소하지만 고장률이 증가형일 때는 무료보증기간이 감소하다가 증가하게 된다. 이는 품질관리와 관련하여 적절한 평균수명과 보증기간을 취사 선택할 때 이용될 것이다.



〈 그림 1 〉 동일한 기대보증 비용을 갖는 무료보증기간

〈 표 1 〉 동일한 기대비용의 표준편차 비교: 지수분포 [W_1=36]

평균수명 μ	무료보증기간 W_0	기대비용 $E\{C\}$	표준편차 $[Var\{c_1\}]^{1/2}$	$[Var\{c_0\}]^{1/2}$
20	30.02	270.80	306.17	316.88
40	27.65	49.72	77.58	86.28
60	26.87	20.39	42.90	49.55
80	26.49	11.07	29.78	35.06
100	26.27	6.94	22.90	27.25
120	26.13	4.76	18.65	22.33
140	26.03	3.47	15.75	18.94
160	25.95	2.64	13.64	16.45
180	25.90	2.07	12.03	14.55
200	25.85	1.67	10.77	13.04
220	25.81	1.38	9.75	11.82
240	25.78	1.16	8.91	10.81
260	25.76	0.98	8.20	9.96
280	25.74	0.85	7.59	9.23

〈 표 2 〉 동일한 기대비용의 표준편차 비교: GE-2분포 [W_1=36]

평균수명 μ	무료보증기간 W_0	기대비용 $E\{C\}$	표준편차 $[Var\{c_1\}]^{1/2}$	$[Var\{c_0\}]^{1/2}$
20	30.11	319.15	351.73	365.74
40	27.68	33.55	56.20	66.93
60	27.17	9.27	24.86	31.83
80	27.03	3.64	14.69	19.42
100	27.06	1.39	8.78	11.89
120	27.06	0.74	6.32	8.62
140	27.06	0.43	4.78	6.56
160	27.06	0.27	3.74	5.16
180	27.08	0.17	3.02	4.17
200	27.09	0.12	2.48	3.44
220	27.10	0.08	2.08	2.89
240	27.12	0.06	1.77	2.46
260	27.13	0.04	1.52	2.12
280	27.14	0.03	1.33	1.85

〈 표 3 〉 동일한 기대비용의 표준편차 비교 : HE분포 [W_1=36, $\underline{\alpha}$=(0.4, 0.6)]

평균수명	파라미터		무료보증기간	기대비용	표준편차	
μ	$1/\lambda_1$	$1/\lambda_2$	W_0	$E\{C\}$	$[Var\{c_1\}]^{1/2}$	$[Var\{c_0\}]^{1/2}$
20	33.3	11.11	29.58	304.68	341.55	351.13
	9.09	27.27	29.66	281.38	318.06	327.59
40	66.67	22.22	27.66	72.56	102.92	111.89
	18.18	54.55	27.54	67.19	97.24	105.96
60	100	33.33	26.94	31.83	57.33	64.78
	27.27	81.82	26.83	30.05	55.28	62.51
80	133.33	44.44	26.57	17.81	39.62	45.80
	36.36	109.09	26.47	17.02	38.60	44.63
100	45.45	136.36	26.27	10.95	29.74	34.86
	166.67	55.56	26.34	11.36	30.34	35.57
120	54.55	163.64	26.13	7.64	24.24	28.67
	200	66.67	26.19	7.88	24.63	29.15
140	63.64	190.91	26.03	5.63	20.49	24.38
	233.33	77.78	26.08	5.78	20.77	24.73
160	72.73	238.18	25.96	4.32	17.76	21.23
	266.67	88.89	26.00	4.42	17.97	21.49
180	81.82	245.46	25.90	3.42	15.68	18.81
	300	100.	25.93	3.49	15.84	19.01
200	90.91	271.73	25.85	2.77	14.04	16.89
	333.33	111.11	25.89	2.83	14.17	17.05
220	100	300.	25.82	2.30	12.72	15.33
	366.67	122.22	28.85	2.34	12.83	15.46
240	109.09	327.27	25.79	1.93	11.63	14.03
	400	133.33	25.82	1.93	11.72	14.15
260	118.18	354.55	25.76	1.65	10.71	12.94
	433.33	144.44	25.79	1.67	10.78	13.04
280	127.27	381.82	25.74	1.42	9.93	12.01
	466.67	155.56	25.77	1.44	9.99	12.09

5. 결론

기존논문에서 여러 보증정책이 제시되고 그 성능척도에 대한 결과가 많이 도출되었지만, 재생 및 재생함수를 포함하고 있어 간단한 모형이라도 convolution 및 수치적분이 요

구되었다. 본 연구는 제품 수명이 Ph분포를 따를 때 Ph분포의 계산 접근 용이성을 이용하여, Ritchken의 결과식을 간단하게 표현하고 세가지 고장률의 형태에 따라 성능척도를 분석하였다. 생산자 입장에서는 할인보증정책이 고장률의 형태에 무관하게 무료보증정책보다 낮은 분산을 가져 유리함을 알게 되었다. 또한 동일한 기대비용을 갖는 무료보증기간이 고장형태가 증가형일 때는 제품의 신뢰도가 증가할수록 감소하다가 증가함을 보였다. 이는 품질관리와 관련하여 보증제도의 설계시 제품의 적절한 신뢰성과 보증기간을 취사선택할 때 이용될 것이다.

본 연구는 수리가 불가능하고 제품대체시 보증이 갱신되는 제품에 한정하였다. 앞으로는 수리가 가능한 제품이나 다양한 보증정책의 경우가 고려되어야 한다. 또한, 실제 수명자료로부터 Ph분포로 표현하는 방법도 보강되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Balcer, Y., and Sahin, I. (1986), "Replacement Costs under Warranty: Cost Moments and Time Variability," *Operations Research*, Vol. 34, pp. 554-559.

[2] Blischke, W. R. and Murthy, D. N. P. (1994), *Warranty Cost Analysis*, Marcel Dekker.

[3] Bohoris, G. A., and Yun, W. Y. (1995), "Warranty Costs for Repairable Products under Hybrid Warranty," *IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry*, Vol. 6, pp. 13-24.

[4] Johnson, M. A. and Taaffe (1990), "Matching Moments to Phase Distribution: Density Function Shapes," *Communications in Statistics-Stochastic Models*, Vol. 6, pp. 283-306.

[5] Kao, E. P. C. and Smith, M. S. (1993), "Discounted and Per Unit Net Revenues and Costs of Product Warranty: The Case of Phase=Type Lifetimes," *Management Science*, Vol. 39, pp. 1246-1254.

[6] Mamer, J. W. (1987), "Discounted and Per Unit Costs of Production Warranty," *Management Science*, Vol. 33, pp. 916-930.

[7] Menzefricke, U. (1992), "On the Variance of Total Warranty Claims," *Communications in Statistics-Theory & Methods*, Vol. 21, pp. 779-790.

[8] Neuts, M. F. (1981), *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[9] O'Cinneide, C. A. (1990), "Characterization of Phase-Type Distributions," *Communications in Statistics-Stochastic Models*, Vol. 6, pp. 1-57.

[10] Ritchken, P. H. (1985), "Warranty Policies for Non-Repairable Items Under Risk Aversion," *IEEE Trans.* on Reliability, Vol. R-34, pp. 147-150.