

얼음 벽면의 용해율을 고려한 비평행 자연대류에서 유동의 불안정성과 천이에 관한 연구

Instability and Transition of Nonparallel Bouyancy-Induced Flows Adjacent to an Ice Surface Melting in Water

황 영 규*
Y. K. Hwang

Key words : Instability(불안정성), Nonparallel flow(비평행유동), Critical grashof number(임계 Grashof수), Selective frequency(선택적주파수), Density extremum parameter(최대밀도 변수), Amplification of disturbances(교란증폭)

Abstract

A set of stability equations is formulated for natural convection flows adjacent to a vertical isothermal surface melting in cold pure water. It takes account of the nonparallelism of the base flows. The melting rate is regarded as a blowing velocity at the ice surface. The numerical solutions of the linear stability equations which constitute a two-point boundary value problem are accurately obtained for various values of the density extremum parameter $R = (T_m - T_\infty) / (T_0 - T_\infty)$ in the range $0.3 \leq R \leq 0.6$, by using a computer code COLNEW. The blowing effects on the base flow becomes more significant as ambient temperature (T_∞) increases to $T_\infty = 10^\circ\text{C}$. The maximum decrease of heat transfer rate is about 6.4 percent. The stability results show that the melting at surface causes the critical Grashof number G^* and the maximum frequency of disturbances to decrease. In comparison with the results for the conventional parallel flow model, the nonparallel flow model has a higher critical Grashof number but has lower amplification rates of disturbances than does the parallel flow model. The spatial amplification contours exhibit that the selective frequency B_0 of the nonparallel flow model is higher than that of the parallel flow model and that the effects of melting are rather small. The present study also indicates that the selective frequency B_0 can be easily predicted by the value of the frequency parameter B^* at G^* , which comes from the neutral stability results of the nonparallel flow model.

기 호 설 명

- A : 증폭 계수
- B : 무차원 주파수, G 값에 무관한 값으로 $B = \beta G^{1/3}$

* 성균관대학교 공과대학 기계설계학과

- B^* : 임계 Grashof 수에서의 B값
- C : 무차원화한 wave 속도, $C = \beta/\alpha$
- C_p : 정압비열, 4.0224[kJ/kg °K]
- D : 특성 경계층 두께, $4x/G$
- $f(\eta)$: 일반화한 유동함수
- f : 주파수
- g : 중력가속도
- G : 수정한 Grashof 수
- G^* : 임계 Grashof 수
- $Gr(x)$: Grashof 수, $g \cdot x^3 \cdot \alpha_T | T_0 - T_\infty | \nu^2$
- $H(\eta)$: 무차원화한 압력교란 증폭함수
- $\bar{H}(y)$: 차원있는 압력 교란 증폭 함수
- h_u : 얼음의 용해열, 333.92[kJ/kg]
- i : $\sqrt{-1}$
- $O(1)$: 크기가 1인
- Pr : Prandtl 수
- q : Gebhart와 Mollendorf의 밀도 관계식에
서 사용되는 온도항의 염도와 압력 관련
지수
- R : 최대밀도변수, $(T_m - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
- $S(\eta)$: 무차원화한 온도 교란 증폭 함수
- $\bar{S}(y)$: 차원있는 온도 교란 증폭 함수
- T : 온도
- U : 특성속도
- u, v : 수평, 수직 속도 성분
- x, y : 좌표축
- Z_0 : 부력교란계수,
 $\delta_0 | \theta_b - R |^{-1} (\theta_b - R) / | \theta_b - R |$

그리스 문자

- $\bar{\alpha}$: 복소 wave 수
- α : 무차원화한 복소 wave 수, $\alpha = \bar{\alpha}(4x/G)$
- α_T : 임계 Grashof 수에서의 α 값
- α_T : Gebhart와 Mollendorf⁽¹²⁾의 밀도 관계식
에서 사용되는 온도항의 계수
- $\bar{\beta}$: 실수 교란 주파수, $\bar{\beta} = 2\pi[\text{Hz}]$
- β : 무차원화 실수 교란 주파수,
 $\beta = \bar{\beta}(16x^2)/(\nu G^3)$
- δ : 상향유동 +1.0, 하향유동 -1.0

- η : 무차원화한 상사변수, $yG/4x$
- θ : 무차원화한 온도, $(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
- ν : 동점성계수
- ρ : 밀도
- $\bar{\phi}(y)$: 속도 교란 증폭 함수
- $\phi(\eta)$: 무차원화한 속도 교란 증폭함수
- Ψ : 유동함수

하 첨 자

- b : 기본유동
- I : 허수부
- m : 물의 최대 밀도점
- max : 최대값
- O : 등온표면
- R : 실수부
- ∞ : 경계층밖의 영역

1. 서 론

저온의 물 속에 0°C의 등온 수직 얼음벽면이 잠겨있을 때 벽면 주위에 형성되는 자연대류에는 그 유동장내에 두 방향의 부력이 존재하여, 국소적인 유동이 야기될 수 있으며, 이에 따른 유동의 비정상성등 매우 복잡한 유동현상이 관찰되었으며, Gebhart 등⁽¹⁾에 의해 구체적으로 논의되었다. 이는 물의 밀도가 온도의 상승에 따라 증가하다가 감소하게 되는 최대 밀도 온도 T_m 이 열 경계층내에 존재하기 때문이다. 즉, 최대 밀도 변수(density extremum parameter), $R = (T_m - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$ 의 값이 $0 < R < 0.5$ 인 경우, 어느 한 국소영역에서는 상향, 다른 국소영역에서는 하향인 부력반전이 발생한다. 여기서 T_m 은 최대밀도 온도, T_0 는 등온 벽면의 온도이고, T_∞ 는 벽면주위 유체의 온도이다. 유동현상은 부력반전의 정도에 따라 국소 유동 반전까지 야기되며, 일부 유동구간에서는 유동이 비정상적이 Wilson과 Vyas⁽²⁾, Carey와 Gebhart⁽³⁾, 유갑종⁽⁴⁾에 의해 밝혀졌다. 또한, 이 유동구간의 일부에서 정상상태 다중해(multiple steady state solution)가 존재함이 El-Henawy 등⁽⁵⁾에 의해 유동방정식을 풀음으로서 밝혀졌다(Fig.2 참조). 이

러한 기본유동들에 관한 이론해석시, Gebhart⁽⁶⁾에 의해 정리 요약된 선행연구들 대부분이 등은 얼음 벽면의 용해율을 고려하지 않았기 때문에 주위 유체온도 T_0 가 증가할수록 열전달율, Nusselt수 등과 실험측정치와의 오차가 증대함을 Padlog와 Mollendorf⁽⁷⁾가 지적하였다.

유동구역 $0.3 \leq R \leq 0.6$ 에서 이와 같은 최대 밀도점의 영향을 받으며 상변화가 수반되는 경우에는 그 기본유동조차 수치적으로 다루기 어려우며 안정성 해석은 매우 최소한 상황이다. 또한, 상변화를 고려하지 않은 Hwang등⁽⁸⁾, 황영규⁽⁹⁾와 같은 기존 연구들에서 유동안정성을 기술함에 있어 평행유동 가정으로 인해 너무 작은 임계 Grashof수가 계산되어 층류경계층의 선단부근부터 유동이 불안정해지기 시작한다고 예측하였다. 이러한 평행유동 모델에 의한 안정성해석의 비현실성을 극복하기 위해서는 비평행유동모델이 사용되어야만 한다. 최대 밀도점이 경계층내에 존재하고 벽면의 용해를 통한 상변화가 수반되며 유동의 비평행성까지 고려한 경우에 관한 안정성 연구는 아직 이루어지지 않았다. 따라서, 상변화 및 유동의 비평행성에 대한 고려는 안정성 해석에 있어서 보다 현실적인 예측결과를 제공하여 줄 것으로 보인다.

안정성 방정식의 유도시 유동의 비평행성을 고려할 경우, 평행유동에 비해 상대적으로 고차항을 포함시켰으므로 안정성해석결과 선단부근에 존재하는 임계 Grashof수의 비현실성이 황영규와 장명륜⁽¹⁰⁾, Haaland와 Sparrow⁽¹¹⁾의 경우들과 같이 극복될 것으로 보이며, 또한, 등은 얼음벽면의 상변화에 대한 고려는 실험결과와의 오차를 감소시킬 것으로 예상된다. 따라서, 본 연구에서는 등은벽면으로 사용된 얼음벽면의 용해 및 이에 따른 유동의 비평행성을 고려하여 수치적 안정성 해석을 수행하였다. 안정성 해석의 주관심 사항은 중립안정선도상의 임계 Grashof수 G^* 와 공간상의 교란증폭선도상의 선택적 주파수 B_0 이다. 즉, 층류 자연대류에서 임계 Grashof 수에 해당되는 공간상의 어떤 한 지점부터 유동이 불안정하여지며, 이 지점부터 미세한 교란이 일정한 주파수에 따라 증폭발전되어 난류로 천이 되어 갈 때 교란 주파수에 따라 민감하게 교란증폭 정도가 다르므로, 가장 빨리 교란이 증폭되

는 선택적 주파수가 B_0 가 중요하다. Gebhart 등⁽¹¹⁾에 의해 서술된 바와 같이 선행연구자들의 실험결과에 의하면 공간상의 교란증폭 선도상에서 e^A 으로 증폭될 때, 증폭계수 A 의 값이 10정도인 지점에서 천이가 발생하였다. 그러므로 교란증폭계수와 선택적 주파수를 수치적으로 구하면, 유동의 천이를 예측할 수 있다.

이러한 연구는 저장, 냉동, 환경제어등 제반 산업기술에 필수적인 기초 연구이다. 특히 물의 상태변화를 이용한 축열 및 축냉문제에는 안정특성이 적용될 수 있다.

본 연구의 안정성 해석 대상이 되는 기본유동은 순수한 찬물 속에 0°C 의 수직 등은 얼음벽이 잠겨 있을 때, Fig.1 같은 좌표계를 가지고 벽면부근에 형성되는 수직자연대류이며, $0.3 \leq R \leq 0.6$ 인 유동영역에서 안정 해석시, 비평행유동과 벽면의 용해율을 고려하고자 한다. 이를 위해, 우선 Fig.2와 같이 El-Henawy등⁽⁵⁾의 정상 상태 다중해가 존재하는 $0.2198 \leq R \leq 0.4540$ 인 영역에서는 열전달율 $-\theta'_1(0)$ 가 큰 값을 갖는 기본유동인 '윗쪽해'의 경우에 대해서만, 또한, $0.5 \leq R \leq 0.6$ 인 영역에서 얼음벽의 용해를 용출효과(blowing effect)로 간주함으로써 기본유동에 대한 수치해석을 수행하였다. 정상상태 다중해의 열전달율 $-\theta'_1(0)$ 가 작은 값을 갖는 기본 유동인 '아랫쪽해'의 경우에는 열전달율이 매우 작아서 얼음의 용해를 고려하지 않아도 그 오차가 4% 미만이기 때문에 용해율을 고려하지 않고 유동을 해석하였다.

이를 바탕으로 평행 및 비평행 유동에 대한 안정성 해석을 실시하여 얻은 중립 안정 선도들과 공간상의 교란증폭선도들을 통하여 비평행유동 및 용해율의 고려가 안정성에 미치는 영향을 규명하고자 하였다.

기본유동해석은 전형적인 층류 경계층유동으로 간주하여 상사변환 하였으며, 온도와 밀도와의 관계가 비선형적이므로, 보다 정확한 계산을 위하여 Gebhart와 Mollendorf의 밀도관계식⁽¹²⁾을 이용하였다.

본 연구에서 경계조건을 수정하여 벽면의 용해를 용출효과로 취급한 것은 Padlog와 Mollendorf⁽⁷⁾의 수치적 연구에서와 같은 방법이다. 그러나, 본

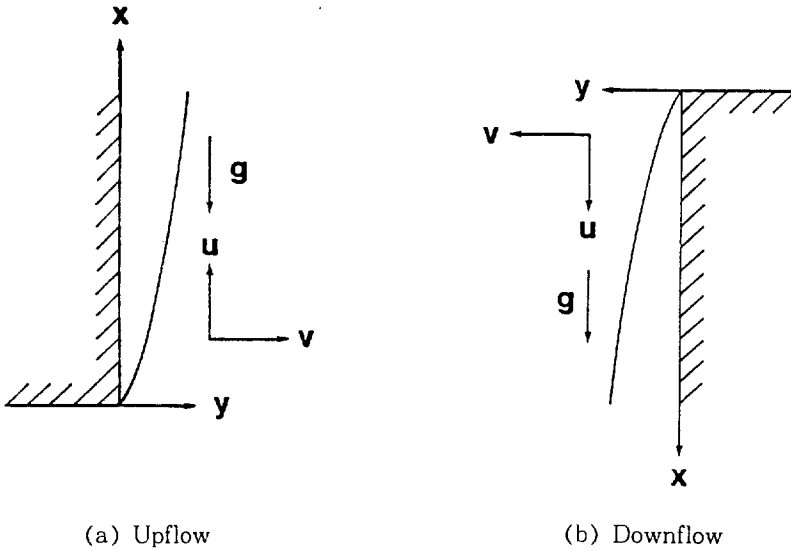


Fig.1 The coordinate system

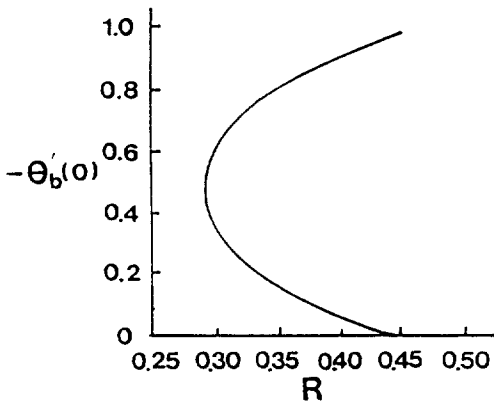


Fig.2 Details of variation of heat transfer rate $-\theta'_b(0)$ with R in the region of $0.2918 < R < 0.45402$ (largely downflow). (from EI-Henawy *et al.*⁽⁵⁾)

연구에서는 얼음벽면과 주위 유체와의 온도차가 Padlog와 Mollendorf⁽⁷⁾의 경우처럼 크지 않으므로 물성치의 변화는 무시하였다. 사실상 용해가 심할 경우 유동장은 형상변화를 고려한 이동 경계 조건 문제가 되어 매우 다루기 어려워진다. 그러나, 본

연구 영역에서는 주위유체와 벽면과의 온도차가 비교적 작아 용해는 서서히 일어나므로 유동 해석시 벽면의 형상변화를 무시하였다.

본 연구를 통하여 얻은 주요결과는, 비평행모델에 의해 계산된 중립안정선도상의 임계 Grashof 수에 대한 주파수 B' 값은 평행모델로부터 구한 공간교란증폭선도상의 선택적 주파수(즉, 특정한 주파수에 대하여 교란이 선택적으로 가장 빨리 증폭되는 주파수) B_0 의 값과 거의 일치함을 보임으로써 공간상의 교란증폭선도들을 구체적으로 구하지 않아도 용이하게 B_0 를 예측할 수 있다는 것이다. 또한, 용해의 영향은 임계 Grashof 수 G^* 를 다소 감소시켜 용해가 없는 경우보다 유동이 불안정하고 교란증폭이 발생할 수 있는 최대주파수가 낮아짐을 알 수 있었다.

2. 관련방정식

2차원 층류 기본유동에 대한 경계층 방정식을 상사변환하기 위하여 다음과 같은 무차원 유동함수 Ψ_b , 변수 η , 온도 θ_b 를 정의하였다.

$$\Psi_b(x, y) = \nu G f_b(\eta), \quad \eta = \frac{yG}{4x}, \quad \theta_b = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{1}$$

또한, Grashof수 $Gr(x)$, 수정한 Grashof수 G 는 다음과 같다.

$$Gr(x) = g\alpha_T \frac{\alpha_T}{\nu^2} |T_0 - T_\infty|^q, \quad G = 4\{Gr(x)/4\}^{1/4}, \quad (2)$$

여기서, $\alpha_T = 9.297173 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$ 이고, $q = 1.894816$ 이다.

온도와 밀도와의 관계는 Gebhart-Mollendorf 관계식⁽¹²⁾이 사용되며, 부력항을 적절히 처리한 후, 상사변환하고 Padlog와 Mollendorf⁽⁷⁾와 같이 용해율을 처리하면 다음과 같은 기본 방정식을 얻게 된다.

운동량 방정식 :

$$f_b''' + 3f_b f_b'' - 2(f_b')^2 + \delta(|\theta_b - R|^q - |R|^q) = 0 \quad (3.a)$$

에너지 방정식 :

$$\theta_b'' + 3Pr f_b \theta_b' = 0 \quad (3.b)$$

경계 조건 :

$$f_b'(0) = f_b'(\infty) = 1 - \theta_b(0) = \theta_b(\infty) = 0, \quad f_b(0) = -\frac{\theta_b'(0)C_p(T_0 - T_\infty)}{3Pr h_{ii}} \quad (4)$$

여기서, 상향유동이면 $\delta = +1$, 하향유동이면 $\delta = -1$ 고, Pr 은 Prandtl 수이며 11.6이다. 또한, h_{ii} 은 얼음의 용해열(latent heat of melting)을 나타낸다.

본 연구에서는 벽면이 수직이므로 기본유동방정식은 전형적인 경계층이론에 따라 y방향 운동량 방정식을 무시하고, 또한 x 방향 운동량 방정식의 압력항을 무시하였다. 그러나, 벽면이 경사지거나 용해율이 클 경우에는 y 방향 운동량 방정식을 무시할 수 없으며, 압력항들을 고려해야만 한다. 본 연구에서는 수직자연대류이고 용해율이 큰 경우가 아니므로 기본유동에서 압력항의 영향을 무시하고, 안정성 문제를 파형 불안정성 문제로 다루었다.

안정성 방정식은 비평행 유동 모델을 채택하여 y 방향 기본유동 속도성분 v_b 를 고려하였고(또한,

$\frac{\partial u_b}{\partial x}$ 및 $\frac{\partial T_b}{\partial x}$ 가 포함된 항들이 존재함), 압력교란 항을 소거하지 않고 유도하였다(장명륜과 황영규⁽¹⁰⁾ 참조). 교란양들을 무차원화하기 위해 다음과 같이 특성길이 D 와 특성속도 U 를 채택하였다.

$$D = \frac{4x}{G}, \quad U = \frac{\nu G^2}{4x} \quad (5)$$

이에 의해 무차원화된 교란량들은 다음과 같다.

$$\phi(\eta) = \frac{\bar{\phi}(y)}{UD}, \quad S(\eta) = \frac{\bar{S}(y)}{T_0 - T_\infty}, \quad H(\eta) = \frac{\bar{H}(y)}{\rho U^2}, \quad \alpha = \bar{\alpha}D, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}D}{U}. \quad (6)$$

온도와 밀도의 관계가 선형적인 경우(즉, 본 연구에서는 $q = 1$, $R = 0$ 인 경우) Haaland등⁽¹¹⁾, Tzuoo등⁽¹³⁾에 의하여 유도된 안정성 방정식과 본 연구의 식을 비교하기 위하여, x 방향 운동량 방정식과 y 방향 운동량 방정식을 교차미분하여 압력항을 소거하면 안정성 방정식이 상호일치하여 그 타당성을 확인하였다. 2차원 선형 안정성이론을 적용하고, 기본유동의 온도와 압력 및 속도에 미소한 교란을 중첩시키면 다음과 같은 안정성 방정식이 된다.

x 방향 운동량 방정식 :

$$[f_b' - c]\phi' - f_b''\phi - \frac{1}{i\alpha G}[(3f_b - \eta f_b')\phi'' - (2f_b' - \eta f_b'')\phi'] = -H + \frac{1}{i\alpha G}[\phi''' - \alpha^2\phi + Z_0 S] \quad (7.a)$$

y방향 운동량 방정식 :

$$[f_b' - c]\phi - \frac{1}{i\alpha G}[(3f_b - \eta f_b')\phi] = -\frac{H}{\alpha^2} + \frac{1}{i\alpha G}[\phi'' - \alpha^2\phi] \quad (7.b)$$

에너지 방정식 :

$$[f_b' - c]s - \theta_b' \phi - \frac{1}{i\alpha G}[(3f_b - \eta f_b')s'] + \eta \theta_b' \phi = \frac{1}{i\alpha G Pr} [s'' - \alpha^2 s] \quad (7.c)$$

여기서, 부력교란 계수인

$$Z_0 = \delta \frac{\theta_b - R}{|\theta_b - R|} \cdot q \cdot |\theta_b - R|^{(\alpha-1)} \text{이고, 파속도 } c = \frac{\beta}{\alpha} \text{이다.}$$

또한, 무차원화한 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(0) = \phi'(0) = S(0) = \phi'(\infty) = S(\infty) \\ = H(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

만약 평행유동으로 가정한 경우에는

$\frac{\partial u_b}{\partial x}$ 및 $\frac{\partial T_b}{\partial x}$ 가 포함된 항들이 사라지게 되어 위의 식(7.a~c)는 황영규⁽⁹⁾, Hwang등⁽⁸⁾이 사용한 안정성방정식이 된다.

3. 수치 해석 방법

기본유동의 경계조건 식(4)의 $f_b(0)$ 를 사용하여 용해율을 마치 용출속도로 취급하였다. 벽면에서의 용해율을 고려함으로 인하여 기본유동에 있어서 경계조건 $f_b(0)$ 이 0이 아닌 값을 가지게 되어 수치해석시, $f_b(0)$ 와 $\theta_b'(0)$ 를 연계하여 동시에 풀어야 하는 어려움이 있다. 우선, 벽면이 용해되지 않는 조건의 $\theta_b'(0)$ 를 사용하여 식(4)로부터 $f_b(0)$ 를 구함으로써 계산을 시작하여, 이 값으로 새로운 $\theta_b'(0)$ 를 구하는 반복계산을 수행하였으며, $f_b(0)$ 의 현재값과 전 단계의 값을 비교하였을 때 그 차가 오차한계 10^{-6} 내에 수렴함을 확인하여 기본유동 해를 구하였다.

본 연구의 기본유동해석 뿐만 아니라, 안정성 해석시 보조적으로 사용한 단순 사격법(Simple Shooting)은 η_∞ 가 증가하게 되면 계산이 불가능하게 되므로 multiple shooting 컴퓨터코드 BOUNDS(Deuffhard와 Bader⁽¹⁴⁾), Orthogonal Collocation 코드 COLNEW(Ascher등⁽¹⁵⁾, Bader와 Ascher⁽¹⁶⁾)를 사용하여 두점 경계값을 정확하게 만족하는 수치해를 구하였다. 이 때 Hwang⁽⁸⁾이 제시하였던 방법을 적용하였으며, 주로 COLNEW 코드를 이용하였다.

안정해석 과정에서 주의할 점은 경계조건이 모두 0이어서 무용해(Trivial Solution)로 수렴하거나

발산하게 되므로 최소한 한개의 0이 아닌 경계조건이 있어야 한다. 그러므로, 경계조건 일부는 다음과 같이 약간 수정하고 실수부와 허수부로 분리하였다.

$$\phi_R(0) = \phi(0) = S_R(0) = S_I(0) = 0,$$

$$S_R'(0) = K, S_I'(0) = L$$

$$\begin{aligned} \phi_R'(\infty) = \phi'(\infty) = S_R(\infty) = S_I(\infty) = H_R(\infty) \\ = H_I(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

대부분의 계산은 위의 수정한 경계조건을 사용하였으나, 경우에 따라서는 $\phi_R''(0)$ 와 $\phi_I''(0)$ 를 0이 아닌 작은 값으로 수정하여 사용하기도 하였다. 식(9)에서 K와 L의 절대값은 $10^{-3} \sim 10^{-1}$ 범위의 0이 아닌 값으로 취하였다. 이렇게 경계조건을 수정함으로써 원래의 경계조건 식(8)을 만족시키는 수렴하는 해를 쉽게 구할 수 있었다. 위에서와 같이 경계조건을 적절히 취하여 고유 벡터의 최대값이 $O(1)$ 의 크기가 되도록 조절하였다.

고유치 α_R, β_R 를 구하기 위하여 수정 Grashof수 G값을 고정시키고 $\alpha_R \beta_R$ 를 가정하거나, 또는 β_R 를 고정시키고 α_R, G 를 가정하여 반복계산을 하였다. 이때 가정한 값들이 비교적 정확한 값이어야 수렴하게 되므로, 한번 수렴하여 얻은 해들을 이용하여 외삽법으로 새로운 고유치를 가정하였다. 그리고 COLNEW 코드를 이용하여 수정한 두점 경계조건 식(9)을 만족하는 해를 구하였다. 즉, 원래 경계조건 식(8)의 $\phi_R'(0) = \phi'(0) = 0$ 는 $|\phi_R'(0)| + |\phi_I'(0)|$ 가 10^{-5} 이하가 될 때까지 반복 계산함으로써 수렴하는 고유치들을 구하였다.

경계조건을 만족시키기 위하여는 η_∞ 를 충분히 잡아야 하는데, 변동없는 해가 될 때까지 η_∞ 를 서서히 늘려 봄으로써 적당한 값을 취하였다. 이때 η_∞ 의 값이 180까지의 범위에서 안정성 방정식의 해를 구하였다. 수정한 경계조건이 사용되었을 때 유용해로 수렴했다는 판정기준은 참고문헌^(8,9)과 같다.

이렇게 하여 구하여진 고유치 α_R, β_R 은 교란의 파수와 주파수를 나타내며, α_R 는 교란증폭을 나타낸다. 또한, 주파수 $B = \beta G^{1/3}$ 은 x에 독립적이므로 물리적으로 일정한 주파수를 말한다.

교란의 증폭은 거리 G 에 따라 증폭된다고 보고 그 증폭계수 A 를 다음과 같이 적분하여 교란의 공간 증폭 곡선을 구할 수 있다. 증폭계수 A 는 다음과 같으며 증폭율은 e^A 이다.

$$A = -\frac{1}{3} \int_{G_1}^{G_2} \alpha dG \quad (10)$$

여기서, G_1 는 중립안정 선도상의 주파수 B (즉, $B = \beta G^{1/3}$)에 대응하는 G 의 값이고, 실제 전체증폭율은 e^A 이다.

4. 수치해석 결과 및 고찰

4.1 기본 유동

벽면에서의 용해율을 고려한 경계조건 식(4)를 만족시키는 기본유동 방정식 식(3.a-b)의 수치해는 최대밀도변수 $0.0 \leq R \leq 0.6$ 까지의 범위에 대하여 Table 1에 나타내었다. 단, $0.30 \leq R \leq 0.36$ 에서는 뒷쪽해에 대하여만 벽면의 용해율을 고려하였다.

기본유동에서 물성치의 변화를 무시하면 $R=0.60$ 일 때 얼음 벽면의 용해율을 고려한 경우가 고려하지 않은 경우에 비해 최고 6.4%의 열전달율 감소를 가져옴을 알 수 있다. 따라서, 최대 밀도변수 R 값이 0.50 이하인 경우에는 얼음의 용해를 고려하지 않아도 그 오차가 5.2% 이하이기 때문에 별 문제가 없을 것으로 판단된다.

얼음 벽면의 용해가 존재할 경우, 용출(blow-

ing)의 영향에 의해 경계층 두께가 다소 두꺼워지며, 상변화에 의한 잠열흡수등의 영향으로 인해 열전달율($-\theta'_s(0)$)은 오히려 감소함을 알 수 있다. 특히 최대 밀도점의 영향 때문에 R 이 증가함에 따라 열전달율이 $R=0.30$ 부근까지는 감소하다가 $R=0.40$ 이후로 다시 증가하는 경향은 그대로 유지된다(Table 1 참조).

4.2 중립 안정 해석

최대 밀도 변수 $R=0.6$ 인 경우 얼음벽면에서의 용해율을 고려한 기본유동과 고려하지 않은 기본유동에 대하여 각각 중립안정해석을 하였으며, 또한 해석시 평행 및 비평행 유동의 두 가지 모델을 적용한 안정성 방정식들을 모두 사용하였다. 이렇게 $R=0.6$ 에서 계산된 중립안정 해석결과들은 Table 2와 Fig.3~6에 제시되었다.

벽면에서의 용해율이 작은 $0.30 \leq R \leq 0.50$ 의 영역에서는 주로 용해율을 고려하지 않은 기본유동에 대하여 중립안정해석을 수행하였으며, 해석시 평행 및 비평행 유동의 두 가지 모델을 모두 적용하였다. 구하여진 중립안정 해석결과들은 Table 3과 Fig.7~11에 제시되었다. 특히 $0.30 \leq R \leq 0.36$ 인 정상상태 다중해 영역에서는 Fig.2의 뒷쪽해 및 아랫쪽에 해당되는 각각의 기본유동에 대하여 모두 중립안정선도를 구할 수 있었다.

$R=0.60$ 에서 평행 및 비평행유동에 대한 각각의 중립 안정 선도상에서, 용해를 고려한 경우의 임계 Grashof수는 각각 $G^* = 22.5$ 와 49.4 로 고려하지 않은 경우인 $G^* = 23.9$ 와 50.7 보다 다소 작은 값을

Table 1 Comparison of $-\theta'_s(0)$ and $f''_s(0)$ in numerical results taking account of ice melting as a blowing effect.

| R | $-\theta'_s(0)$ melting exists | $-\theta'_s(0)$ | $-f''_s(0)$ | $-f''_s(0)$ melting exists |
|------|--------------------------------|-----------------|-------------|----------------------------|
| 0.0 | 1.04697 | 1.02110 | 0.31843 | 0.32139 |
| 0.15 | 0.81084 | 0.79610 | 0.21393 | 0.21612 |
| 0.3 | 0.61582 | 0.59132 | -0.04690 | -0.05072 |
| 0.4 | 0.89922 | 0.86248 | 0.08779 | 0.08670 |
| 0.5 | 1.02713 | 0.97341 | 0.17665 | 0.17704 |
| 0.6 | 1.11166 | 1.04063 | 0.25203 | 0.25442 |

Table 2 Values of G^* , B^* , B_{max} and α_R^* at $R=0.60$.

| R | 0.6(Melting) | | 0.6(No Melting) | |
|--------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|
| | Nonparallel Flows | Parallel Flows | Nonparallel Flows | Parallel Flows |
| G^* | 49.4 | 22.5 | 50.7 | 23.9 |
| B^* | 0.2055 | 0.1132 | 0.2147 | 0.1152 |
| B_{max} | 0.6142 | 0.6253 | 0.6244 | 0.6372 |
| α_R^* | 0.4777 | 0.2975 | 0.5152 | 0.3084 |

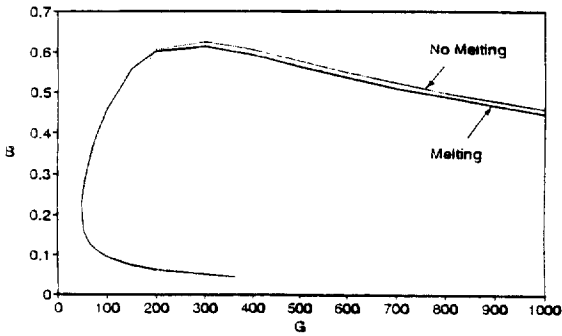


Fig.3 Neutral stability curves in the (G, B) -plane at $R=0.60$ for the nonparallel model.

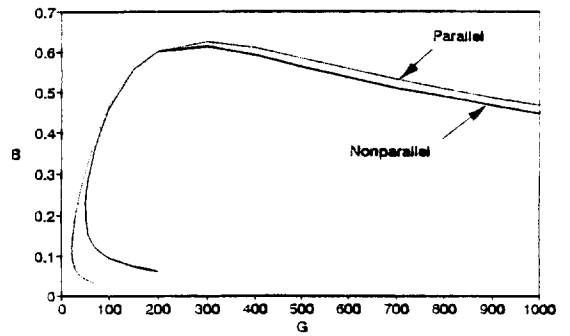


Fig.5 Neutral stability curves in the (G, B) -plane at $R=0.60$ taking account of melting

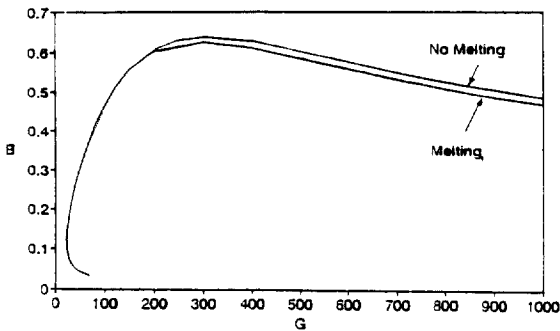


Fig.4 Neutral stability curves in the (G, B) -plane at $R=0.60$ for the parallel model.

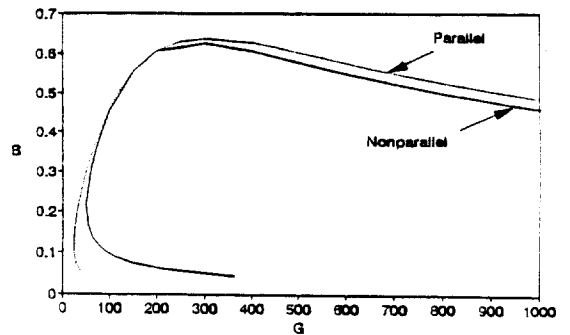


Fig.6 Neutral stability curves in the (G, B) -plane at $R=0.60$ neglecting melting

Table 3 Values of G^* , α_R^* , B^* for various values of R .

| R | | Nonparallel | | | Parallel | | |
|------|-------|-------------|--------------|--------|----------|--------------|--------|
| | | G^* | α_R^* | B^* | G^* | α_R^* | B^* |
| 0.50 | | 57.6 | 0.4218 | 0.1623 | 22.81 | 0.2483 | 0.0828 |
| 0.40 | UPPER | 72.8 | 0.3397 | 0.1169 | 19.62 | 0.1899 | 0.0525 |
| 0.36 | UPPER | 82.2 | 0.3220 | 0.1044 | 17.06 | 0.1650 | 0.0412 |
| | LOWER | 85.8 | 0.1942 | 0.0754 | 0.84 | 0.0589 | 0.0134 |
| 0.34 | UPPER | 86.6 | 0.3121 | 0.0973 | 15.23 | 0.1477 | 0.0347 |
| | LOWER | 76.3 | 0.2073 | 0.0721 | 1.20 | 0.0624 | 0.0136 |
| 0.32 | UPPER | 89.0 | 0.3002 | 0.0893 | 12.81 | 0.1277 | 0.0281 |
| | LOWER | 71.6 | 0.2267 | 0.0706 | 1.81 | 0.0666 | 0.0142 |
| 0.30 | UPPER | 86.5 | 0.2848 | 0.0796 | 9.19 | 0.1030 | 0.0209 |
| | LOWER | 72.0 | 0.2469 | 0.0695 | 3.16 | 0.0774 | 0.0146 |

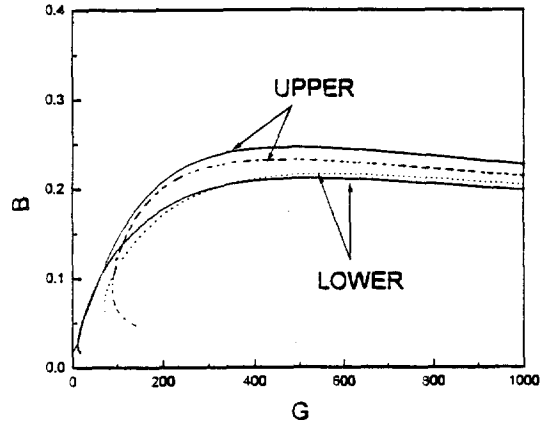
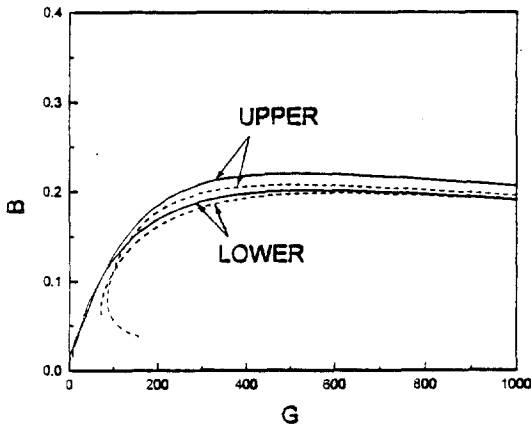


Fig.7 Neutral stability curves in the (G, B) -plane at $R=0.30$ (— : Parallel, ---- : Nonparallel).

Fig.8 Neutral stability curves in the (G, B) -plane at $R=0.32$ (— : Parallel, ---- : Nonparallel).

가짐을 보임으로써 불안정한 것을 알 수 있다 (Table 2 참조). 그러나, 수정한 Grashof수가 증가함에 따라 중립안정선도에서 교란의 증폭이 일어날 수 있는 최대 주파수값 B_{max} 값은 낮아진다 (Fig.3). 이와 같은 경향은 평행유동해석시와 동일하게 나타나며 다만 임계 Grashof 수가 작아지는 차이만 존재할 뿐이다(Fig.4 참조).

따라서, 평행 및 비평행 유동의 두 모델에 대하여 용해의 존재여부가 중립안정선도의 특성적 형태

의 변화를 야기하지는 않으며 (Fig.5~6), 예상과 같이 벽면에서의 용해는 경계층내의 y 방향 운동량을 증가시켜 유동불안정성을 다소 촉진시킨다고 할 수 있다. 그러나 이들 변화량은 미소하기 때문에 교란의 공간증폭 성향이 크게 바뀌어질 것으로는 예상되지 않는다.

또한, 용해가 존재할 경우 비평행 및 평행유동의 결과로 서로 비교하면, 평행유동에서는 $G^*=22.5$, $B^*=0.1132$ 로 비평행유동의 $G^*=49.4$, $B^*=0.2055$

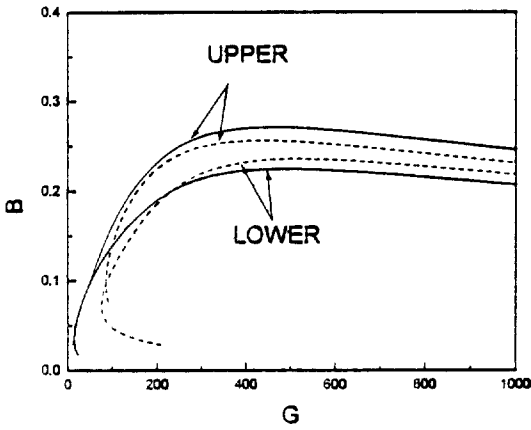


Fig.9 Neutral stability curves in the (G, B)-plane at $R=0.34$ (— : Parallel, - - - : Nonparallel).

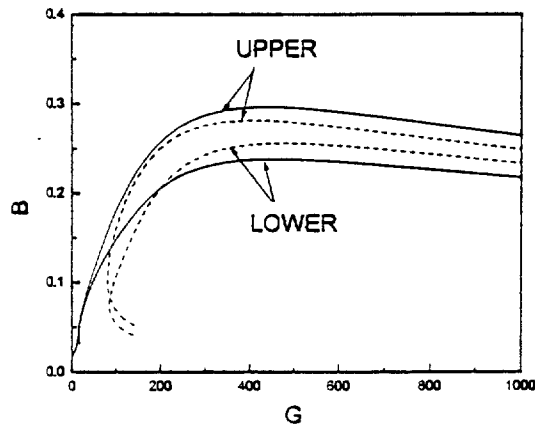


Fig.10 Neutral stability curves in the (G, B)-plane at $R=0.36$ (— : Parallel, - - - : Nonparallel).

보다 더 작은 임계 Grashof 수를 나타냄으로써 상대적으로 낮은 주파수의 교란에 대해 작은값을 갖는 공간상의 지점 G^* 에서 유동이 최초로 불안정해지기 시작하고, 비평행유동 모델은 상대적으로 높은 주파수의 교란에 대해 큰 값의 G^* 인 지점에서 불안정해진다(Fig.5).

용해를 고려하지 않은 경우에도 이와 같은 경향을 보이는데 이것은 상대적으로 큰 임계 Grashof 수 G^* 에 의해 비평행유동모델이 보다 현실적임을

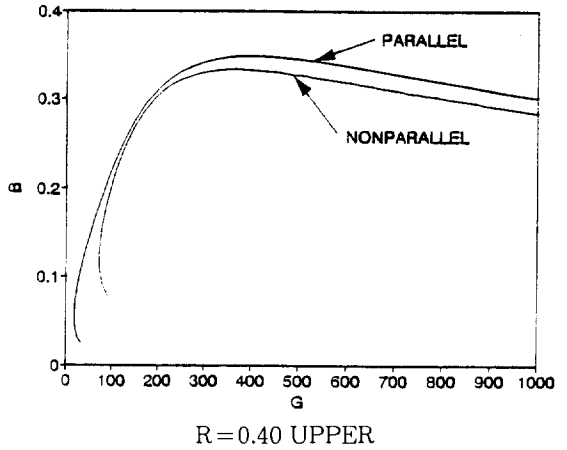


Fig.11 Neutral stability curves in the (G, B)-plane at $R=0.40$ (— : Parallel, - - - : Nonparallel).

가리키는 것이다(Fig.6). 즉, 평행모델은 G^* 의 값이 매우 작기 때문에 유동이 불안정해지기 시작하는 예측지점(즉, 선단부로부터의 거리)을 비현실적으로 앞당겨 놓음으로써 안정성 실험과의 오차를 증가시킨다.

유동영역 $R=0.30\sim 0.50$ 에서 윗쪽해에 해당되는 기본유동의 안정해석 결과를 살펴보면, 벽면에서의 용해율을 무시하고 비평행유동의 경우 각 R 값에 대해 평행유동의 경우보다 상대적으로 임계 Grashof 수 G^* 값이 증가함을 알 수 있다. 또한, 각 G^* 값에 대한 무차원 주파수 B^* 값과 파수 α^* 의 값은 상대적으로 증가함을 알 수 있다. 그러나, R 값이 감소함에 따라서 평행유동이던 비평행유동 모델이든지 모두 B^* 값 및 α^* 값은 감소함을 알 수 있다(Table. 3 참조).

벽면의 용해율을 무시한 Fig.2에 도시되어있는 기본유동의 열전달율을 고려하면, 평행유동의 경우 $R=0.30\sim 0.36$ 의 영역에서는 임계 Grashof 수 G^* 는 윗쪽해, 아랫쪽해 모두 열전달율 $\theta_w'(0)$ 이 감소할수록 0에 가까워지는 결과를 보여주고 있으며, 낮은 주파수 및 파수의 교란에 대하여 유동이 점차 불안정해짐을 알 수 있다. 그리고, 윗쪽해인 경우 교란의 증폭이 일어날 수 있는 최대주파수 B_{max} 는 열전달율이 감소할수록 작아지나, 아랫쪽해인 경우에는 열전달율이 작아질수록 B_{max} 는 커지는 경향을

보여주고 있다. 또한, R 값이 증가하면서 윗쪽해와 아랫쪽해는 서로 별개의 기본유동처럼 상이하게 보여지고 있다(Table. 3, Fig. 7~10 참조).

유동영역 $0.30 \leq R \leq 0.36$ 에서 비평행 유동가정에 의한 중립안정 계산 결과는 윗쪽해에 대해서는 R 값에 관계없이 중립안정 선도상에서 평행유동인 경우보다 상대적으로 안정함을 알 수 있으나, 아랫쪽해인 경우 $R=0.30$ 을 제외하고는 R 값이 증가할수록 특정한 Grashof 수 이후에는 B_{max} 이 평행유동에서의 B_{max} 보다 오히려 더 커지면서 그 차이가 더욱 증가하는 경향을 보여 주고 있다(Fig.7~10 참조).

4.3 공간상의 교란증폭

층류유동이 임계 Grashof 수 G^* 인 지점부터 불안정해지고 공간상에서 주유동을 따라 교란이 공간상에서 증폭발전되어 난류로 천이되는 과정에서 교란의 주파수에 대한 교란증폭정도는 민감하게 다르다. 이 과정에서 가장 빨리 교란이 공간상에서 증폭되는 주파수를 선택적 주파수라 부르며, 공간상의 교란증폭선도상에서 식(10)과 같이 정의된 증폭계수 A 의 값이 최소의 G 에서 가장 큰 값을 갖는 주파수로 나타난다. 그리고 천이는 A 의 값이 10전후인 지점에서 나타나기 때문에, 공간상의 교란증폭선도를 구하면 난류로의 천이점을 예측할 수 있다.

최대 밀도 변수 $R=0.60$ 및 $R=0.50$ 에서는 얼음벽면의 용해율이 교란증폭에 미치는 영향을 밝히 고자, 평행유동 및 비평행유동 모델들을 적용하여 공간상의 교란증폭 계산을 수행하였으며, 일부 결과를 (G, B) 평면에 도시하여 Fig.12~13에 제시

하였다. 또한 선택적 주파수는 B_0 는 Table 4에 정리되었다.

유동영역 $0.3 \leq R \leq 0.5$ 에서는 벽면의 용해율을 고려하지 않은 경우, 평행 및 비평행 모델을 적용한 교란증폭계산을 수행하였고, 특히 정상상태 다중해가 존재하는 $0.30 \leq R \leq 0.36$ 인 영역에서는 윗쪽해 및 아랫쪽해에 해당되는 기본유동들에 대해서도 교란증폭선도들을 얻을 수 있었다. 선택적주파수 B_0 는 Table 4에, 그 대표적인 공간상의 교란증폭선도들은 (G, B) 평면에 도시하여 Fig.14~16에 제시되었다.

윗쪽해의 경우 최대밀도변수 R 의 값이 감소할수록, 공간상의 교란증폭율과 선택적 주파수의 현저한 감소를 나타냄으로, 증폭성향이 둔화됨을 알 수 있다. 아랫쪽해의 경우에는 R 이 증가할수록 선택적주파수의 증가추세를 보이거나 교란증폭율이 윗쪽해에 비하여 매우 낮기 때문에 공간상의 교란증폭 및 천이는 상대적으로 매우 지연이 될 것으로 예측된다.

용해의 영향은 $R=0.50$ 및 0.60 에서는 Table 4와 같이 선택적 주파수의 뚜렷한 변화를 야기하지 않으며, 공간상의 증폭선도의 특성적인 형태도 그대로 유지된다.

일반적으로 비평행유동 모델은 평행유동모델에 비해 공간상의 교란증폭선도에서 전체적인 상향전이를 일으킨다. 즉, 평행유동 모델에 비해 선택적 주파수가 더 큰 값을 가지게 된다. 동시에 증폭율의 상대적인 저하로 인하여 교란이 증폭, 발전되기 시작하는 선단으로부터 거리도 증가하고, 증폭메카니즘이 확연히 나타나기 때문에 G 의 증가에 따른 불안정한 주파수 B 영역의 감소를 가져온다.

Table 4 Values of B_0 for various values of R .

| R | | 0.32 | 0.34 | 0.36 | 0.40 | 0.5 | | 0.6 | |
|-------------|-------|---------|---------|---------|-------|---------|------------|---------|------------|
| | | | | | | Melting | no Melting | Melting | no Melting |
| Parallel | UPPER | 0.084 | 0.093 | 0.100 | 0.122 | — | 0.170 | 0.206 | 0.210 |
| | LOWER | 0.065 | 0.069 | 0.075 | — | — | — | — | — |
| Nonparallel | UPPER | (0.089) | (0.097) | (0.104) | — | 0.182 | 0.185 | 0.224 | 0.226 |
| | LOWER | — | 0.072 | — | — | — | — | — | — |

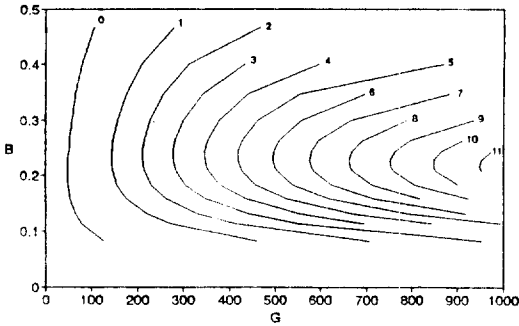


Fig.12 Spatial amplification contours in the (G, B)-plane at $R=0.60$ for the nonparallel flow model taking account of ice melting

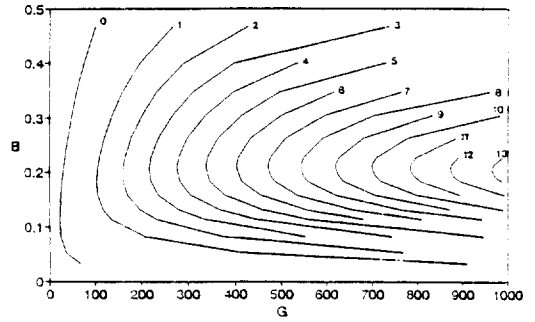


Fig.13 Spatial amplification contours in the (G, B)-plane at $R=0.60$ for the parallel flow model taking account of ice melting

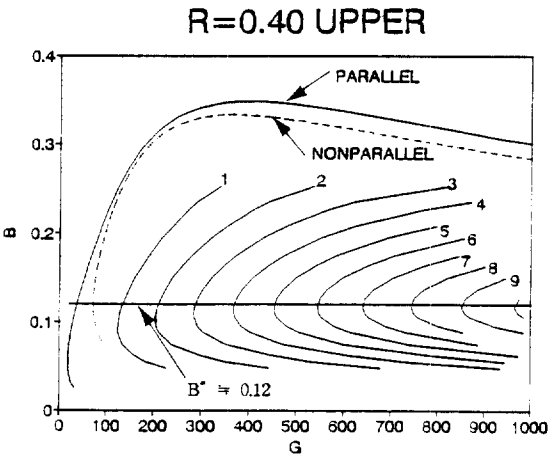


Fig.14 The neutral stability curve for the nonparallel flow model and the spatial amplification contours for the parallel flow model in the (G, B)-plane at $R=0.40$ (— : Parallel, - - - : Non-parallel).

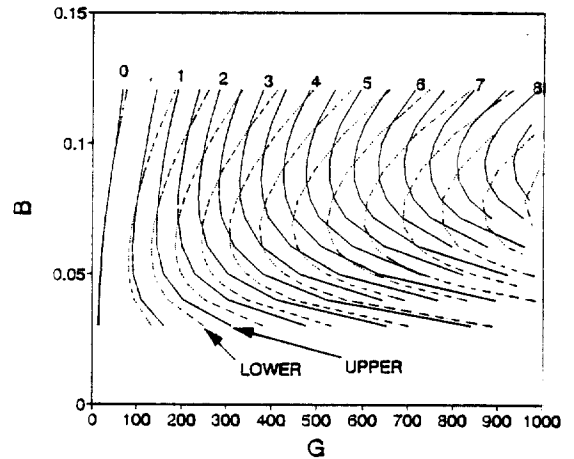


Fig.15 Spatial amplification contours in the (G, B)-plane, for the upper- and lower-branch solutions at $R=0.34$, corresponding to the parallel flow model (— : Upper, - - - : Lower).

최대 밀도 변수 $R=0.40$ 인 경우에 대한 평행 및 비평행유동 모델이 적용되었을 때, Fig.14과 같이 평행유동 모델로부터 구한 공간 증폭 선도로부터의 선택적 주파수의 값은 비평행유동 모델로부터 구한 중립 안정 곡선상의 B^* 값과 거의 근접한 값을 보임을 알 수 있다. 또한, 최대 밀도 변수 $0.32 \leq R \leq 0.40$ 의 윗쪽해와 $R=0.50, 0.60$ 에 대한 평행유

동 모델의 선택적 주파수 B_0 값은 Table 4에 제시된바와 같이, 비평행 유동 모델의 B^* 는 평행유동 모델의 B_0 값과 거의 비슷한 값을 가진다. 또한, 비평행 유동모델이든 평행유동 모델이든 간에 선택적 주파수 B_0 값의 차이는 근소함을 알 수 있다. 그러므로, 교란의 공간증폭 선도들을 구하지 않고도 비평행 유동모델의 중립안정 해석만으로 얻은 B^* 를

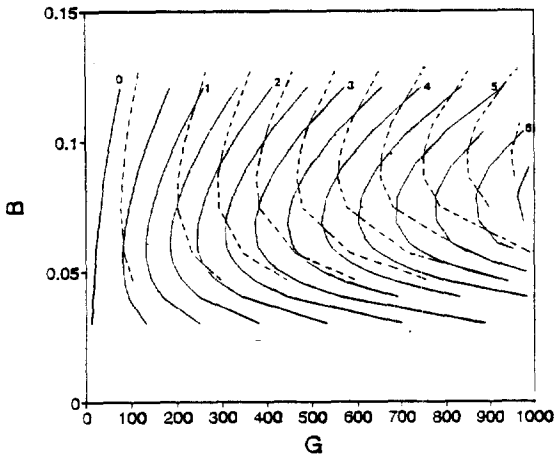


Fig.16 Spatial amplification contours in the (G, B) -plane, for the lower-branch solutions at $R=0.34$, corresponding to the parallel and nonparallel flow models(— : Parallel, --- : Nonparallel).

선택적 주파수로 예측할 수 있다(Table. 4에서 괄호내의 값은 앞에서 논의된 방법으로 추정된 값이다).

최대 밀도변수 $R=0.34$ 에서의 아랫쪽해에 대한 공간상의 교란 증폭 선도를 평행 및 비평행모델에 대해서 Fig.15와 Fig.16에 각각 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 비평행유동 모델을 가정한 경우의 선택적 주파수 B_0 는 평행유동 모델을 가정한 경우의 선택적 주파수 B_0 보다 다소 큰 값을 가지며, 상대적으로 공간상의 교란증폭율의 감소 현상이 평행모델에 비하여 현저하게 나타난다. 그리고, $0.30 \leq R \leq 0.36$ 의 유동영역에서는 윗쪽해이든 아랫쪽해든지 교란증폭율이 매우 작기 때문에 교란의 발전증폭을 통한 천이가 매우 지연될 것으로 판단되며, 윗쪽해와 아랫쪽해 사이에서의 느린 진동현상만이 존재할 것으로 예측되어진다.

5. 결 론

본 연구에서는 최대 밀도 변수 $R=0.30 \sim 0.60$ 인 물 속에 잠겨 있는 수직등온 벽면주위에 형성되는 자연대류를 기본유동으로 하여 벽면의 용해 및

유동의 비평행성을 고려한 안정성 해석을 하여 유동의 안정성과 공간상의 교란증폭 문제를 다루어 교란이 공간상에서 선택적 주파수를 따라 증폭발전하여 천이되는 교란증폭 메커니즘을 예측하였다.

얼음 벽면에서의 용해를 고려하지 않았을 경우, 평행 및 비평행유동 모델에 대한 임계 Grashof 수 G^* 값이 용해를 고려했을 경우보다 증가하므로 유동이 안정하다고 볼 수 있다. 벽면의 용해현상은 증폭이 가능한 교란의 최대 주파수 B_{max} 의 감소뿐만 아니라 교란증폭율도 다소 감소시키는 것으로 추측된다.

중립 안정 해석을 통하여 유동의 비평행성에 의해 임계 Grashof수 G^* 가 커지는 결과를 얻었다. 공간상의 교란증폭 해석에서 비평행유동 모델은 평행유동 모델에 비해 상대적으로 선택적 주파수 B_0 에 따른 증폭성향이 더 강하게 나타나며, 이 때 주파수 B_0 의 값은 높게, 그리고 증폭계수는 낮게 나타남을 알 수 있었다. 또한, 비평행 유동의 중립 안정 선도에서 얻은 임계 Grashof수 G^* 에 해당되는 무차원 주파수 B^* 로 부터 선택적 주파수 B_0 값을 얻을 수 있었다. 따라서 비평행유동을 고려한 안정성 해석은 구체적인 교란 증폭 선도를 구하지 않고도 교란의 증폭특성을 쉽게 알 수 있다.

후 기

이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음을 밝히고, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. and Sammakia, B., 1988, "Bouyancy-Induced Flows and Transport", Hemisphere Publ. Co., N. Y.
- Wilson, N. W. and Vyas, B. D., 1979, "Velocity Profiles Near a Vertical Ice Surface Melting into Fresh Water", ASME. J. Heat Transfer, pp. 313-317.
- Carey, V. P. and Gebhart, B., 1981,

- "Visualization of the Flow Adjacent to a Vertical Ice Surface Melting in Cold Pure Water", *J. Fluid Mech.*, Vol. 107, pp. 37-55.
4. 유갑중, 1985, "최대밀도점 부근의 물 속에 잠겨 있는 경사진 얼음평면에서의 자연대류", 서울대학교, 박사학위 청구논문.
 5. El-Henawy, I., Gebhart, B., Kazarinoff, N. and Mollendorf, J. C., 1982, "Numerically Computed Multiple Steady States of Vertical Bouyancy Induced Flows in cold Pure water", *J. Fluid Mech.* 122, pp. 235~250.
 6. Gebhart, B., 1979, "Bouyancy Induced Motions Characteristic of Applications in Technology", *Trans. ASME, J. Fluid Eng.* 101, pp. 5-287.
 7. Padlog, R. D. and Mollendorf, J. C., 1983, "Variable Fluid Property Effects on Transport in Pure Water Around the Density Extremum", *J. Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 655~657.
 8. Hwang, Y., Kazarinoff, N. D. and Mollendorf, J. C., 1993, "Hydrodynamic Stability of multiple Steady-State of Vertical Buoyancy-Induced Flows in cold Pure Water", *Int J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 2, pp. 423~435.
 9. 황영규, 1994, "최대 밀도점의 영향을 받는 수직 자연대류에서 시간 및 공간상의 교란 증폭에 관한 연구", 한국과학재단 연구보고서.
 10. 황영규, 장명륜, 1991, "4°C 물에 잠겨 있는 경사진 등온벽주위 비평행 자연대류의 파형 안정성", 대한기계학회 논문집, Vol.15, No.2, pp. 644~653.
 11. Haaland, S. E. and Sparrow, E. M., 1973, "Wave Instability of Natural Convection on inclined Surfaces Accounting for Nonparallelism of the Basic Flow, ASME, *J. Heat Transfer*, Vol. 96, pp. 405~407.
 12. Gebhart, B. and Mollendorf, J. C., 1977. "A New Density Relation for Pure and Saline Water", *Deep Sea Res.* 24, pp. 813~848.
 13. Tzuoo, K. L. and Chen, T. S., and Armaly, B. F., 1985, "Wave Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces", *J. Heat Transfer*, Vol. 197, pp. 107~111.
 14. Deufllhard, P. and Bader, G., 1982, "Multiple Shooting Techniques Revisited prepring No. 163", Institut für Angewante Math., University of Heidelberg.
 15. Ascher, U., Christiansen, J. and Russel, R. D., 1978, "COLSYS-A Collocation Code for Boundary-Value Problem. Codes for Boundary-Value Problem in Ordinary Differential Equation, (Ed. G. Goos & J. Hartmanis)", *Lecture Notes in Computer Science*. No. 76, pp. 164~185.
 16. Bader, G. and Ascher, U., 1985, "A New Basis Implementation for a Mixed Order Boundary O. D. E. Solver", *Tech. Rep.* 85-11, Dept. of Computer Science, University of British Columbia, Vancouver, Canada.