Journal of Statistical Theory & Methods
1996, Vol. 7, pp 235~245

상관계수에 대한 검정법 비교

조 현주 · 송 명언 · 정 동명 · 송 재기

요약. 확률변수 (X,Y)가 이변량 정규분포를 따르는 경우, 모상관계수 ρ에 관한 여러 가설들 중에서 $H_0:\rho=\rho_0$인 경우에는 알려진 분포를 이용한 통계적 추론을 하기가 어렵다. 이러한 경우 Fisher에 의해 제안된 Z-변환을 이용한 근사적 검정법이 사용되어 오고 있으나 근사적인 방법이기 때문에 주어진 표본의 크기가 충분히 많지 않은 경우에는 적용에 무리가 있을 수 있다. 그래서 본 논문에서는 먼저 표본 상관계수 R의 분포를 모의실험을 통하여 직접 구하여 검정한 정확 검정법과, 붙스트랩(bootstrap) 방법을 이용하여 구한 붙스트랩 검정법을 제시하고, Fisher의 방법의 효율성과 실제성을 검토하고 제시된 방법들과 서로 비교하고자 한다.

주제어 : 이변량 확률변수, 상관계수, 붙스트랩.

1. 서 론

상관계수(correlation coefficient)는 오랫동안 여러 통계학자들에 의해 그 효용 및 성질에 관한 것들이 연구되어 왔으며 현재 광범위하게 적용되고 있는 척도 중 하나이다. 특히 두 변수간의 선형관계(linear association)의 정도를 밝히는데 있어서 가장 쉽게 접근할 수 있는 값이며 요인분석, 행동유전학적 모형, 구조방정식(LISREL) 모형 등에서도 기본적인 통계량으로 사용되고 있다.

일반적으로 두 변수가 이변량 정규분포(bivariate normal distribution)를 따르는 경우에는 모상관계수 ρ에 관한 가설을 검정함으로써 두 변수간의 선형관계의 정도를 알 수 있으며, 이것은 회귀분석에 있어서 회귀계수의 유의성 검정과 동일하다는 것이 R. A. Fisher에 의해 밝혀졌다. 이때 ρ에 관한 여러 가설들 중에서 $H_0:\rho=0$인 경우에는 표본 상관계수 R의 단조증가함수인 $\sqrt{n-2}\cdot R/\sqrt{1-R^2}$ 이 자유도 $n-2$인 t-분포를 따른다는 사실을 이용하여 쉽게 검정을 할 수 있다. 그러나 $H_0:\rho=\rho_0(\neq 0)$인 경우에는 R의 분포가 매우 복잡하여 기존에 알려진 분포를 이용한 통계적 추론을 하기가 어렵다. 따라서 이러한 경우 Fisher에 의해 제안된 Z-변환을 이용한 근사적 검정법(A-검정법)이 사용되어 오고 있다. 그러나 A-검정법은 근사적인 방법이기 때문에 유한 표본에서의 효율성에 대하여 연구할 필요가 있다. 따라서 본 논문에서는 먼저 R의 분포를 모의실험(Monte Calro simulation)을 통하여 직접 구하여 검정한 정확 검정법(E-검정법)과 붙스트랩 방법을 이용하여 구한 붙스트랩 검정법(B-검정법)을 제시하여 서로 비교하고, A-검정법의 효율성을 검토하고자 한다. 제 2장에서는 A-검정법을, 제 3장에서는 E-검정법과 B-검정법을 간략히 설명하고, 제 4장에서는 모의 실험을 통하여 A-검정법, E-검정법, 그리고 B-검정법의 검정력(power)을 서로 비교하여 보기로 한다.

조현주는 경북대학교 자연과학대학 통계학과(702-701 대구시 북구 산격동 1370번지)의 석사졸업생이며, 송명언은 경북대학교 통계학과의 박사과정학생이다. 정동명은 경북대학교 통계학과의 강사이며 송재기는 경북대학교 통계학과 부교수이다. 저자는 본 논문의 심사과정에서 많은 조언을 준 심사위원에게 진심으로 감사한다.

2. 근사적 검정법

먼저 (X,Y)가 이변량 정규분포를 따른다는 가정 하에서 $H_0:\rho=0$인 경우의 검정법을 살펴보면 다음과 같다.

모상관계수가 ρ인 이변량 정규분포에서 추출한 확률 표본을 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$이라 할 때, ρ의 불편 추정량인 표본 상관계수 R은 다음과 같이 주어진다.

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}.$$

이때 귀무가설 H_0의 기각역(rejection region)은 $|R|\geq c$이며 상수 c값은 H_0가 참일 때의 R의 분포, 즉, $\rho=0$일 때 아래와 같은 R의 확률밀도함수로 부터 주어진다.

$$f_{\rho=0}(r)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\left(1-r^2\right)^{\frac{n-4}{2}}, \quad -1\leq r\leq 1.$$

한편, $T=\sqrt{n-2}\cdot R/\sqrt{1-R^2}$는 자유도가 $n-2$인 t-분포가 되며, 이를 이용하면 유의수준 α에서 기각역은 다음과 같다.

$$|R|\geq\frac{t_{(n-2;\alpha/2)}}{\sqrt{n-2+t^2{}_{(n-2;\alpha/2)}}}.$$

여기서 $t_{(\nu;\alpha)}$는 자유도가 ν인 t-분포에서 오른쪽 꼬리부분의 면적이 α가 되는 값이다. 그런데 $\rho\neq0$인 경우에는 표본 상관계수 R의 분포는 한쪽으로 심하게 치우쳐 있으며 그 분포 또한 구해 내기가 쉽지 않다. 그래서 귀무가설 $H_0:\rho=\rho_0\,(\neq0)$에 대하여 대립가설 $H_1:\rho\neq\rho_0$를 검정하는 근사적 검정법인 A-검정법은 Fisher에 의해 제안된 것으로 다음과 같은 사실을 이용한 것이다.

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) \approx N\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right),\frac{1}{n-3}\right).$$

따라서 A-검정법의 검정 통계량 Z는 R의 Z-변환인

$$Z=\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\lambda\!\nu\left(\frac{(1+R)(1-\rho_0)}{(1-R)(1+\rho_0)}\right) \tag{1}$$

로 주어지며, · 가 참인 경우 근사적으로 표준 정규분포를 따르므로 유의수준 . 에서 기각역은 | | $_{\alpha/2}$이 되며, 여기서 Z_α는 표준 정규분포에서 오른쪽 꼬리부분의 면적이 . 가 되는 값이다. 또한 일 때 A-검정법의 검정력 은 다음과 같이 계산된다.

$$A(\rho_1)=\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{n-3}}{2}\left|\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)-\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)\right| > Z_{\alpha/2} \mid \rho=\rho_1\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{n-3}}{2}\left\{\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)-\ln\left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)\right\} > Z_{\alpha/2}-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+\rho_1)(1-\rho_0)}{(1-\rho_1)(1+\rho_0)}\right)\right)$$
$$+\ \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{n-3}}{2}\left\{\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)-\ln\left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)\right\} < -Z_{\alpha/2}-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+\rho_1)(1-\rho_0)}{(1-\rho_1)(1+\rho_0)}\right)\right)$$
$$\approx 1-\Phi\left(Z_{\alpha/2}-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+\rho_1)(1-\rho_0)}{(1-\rho_1)(1+\rho_0)}\right)\right)+\Phi\left(-Z_{\alpha/2}-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+\rho_1)(1-\rho_0)}{(1-\rho_1)(1+\rho_0)}\right)\right).$$

단, Φ는 표준 정규분포의 누적분포함수이다.

3. 정확 검정법과 붓스트랩 검정법

$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$을 이변량 정규분포 $N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$에서 추출된 크기 n의 임의 표본이라 하자. 일반성을 잃지 않고 $\mu_1=\mu_2=0$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$이라 두면 표본상관계수 R의 확률밀도함수 $f_\rho(r)$은 다음과 같다.

$$f_\rho(r)=\frac{n-2}{\pi}\cdot(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\int_0^1\frac{t^{n-2}}{(1-\rho rt)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\ ,\quad -1\le r\le 1.$$

따라서 가설 $H_0:\rho=\rho_0$를 검정하기 위한 정확 검정법인 E-검정법의 기각역은 적당한 상수 c_1, c_2에 대하여

$$P(R<c_1\ \ or\ \ R>c_2)=\alpha$$

를 만족하는 R의 구간이다.

A-검정법과의 비교를 위하여 2장에서 언급한 Z-변환을 이용하면 기각역은 $Z<e_1$이거나 $Z>e_2$가 되고, 이때

$$e_i=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+c_i)(1-\rho_0)}{(1-c_i)(1+\rho_0)}\right),\quad i=1,2,$$

이 되며 편의상 양쪽 꼬리부분의 확률을 같게 두면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}_{\rho_0}(Z<e_1)=\mathrm{P}_{\rho_0}(Z>e_2)=\frac{\alpha}{2}.$$

여기서 확률 $P_{\rho_0}(\cdot)$은 R의 확률밀도함수 $f_{\rho_0}(r)$을 이용하여 계산된다. 또한 $\rho=\rho_1$에서의 E-검정법의 검정력 함수 $E(\rho_1)$는

$$E(\rho_1)=\mathrm{P}_{\rho_1}(Z<e_1)+\mathrm{P}_{\rho_1}(Z>e_2)$$
$$=\mathrm{P}_{\rho_1}\left(Z^*<e_1-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+\rho_1)(1-\rho_0)}{(1-\rho_1)(1+\rho_0)}\right)\right)+\mathrm{P}_{\rho_1}\left(Z^*>e_2-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\ln\left(\frac{(1+\rho_1)(1-\rho_0)}{(1-\rho_1)(1+\rho_0)}\right)\right)$$

가 되며, 여기서 Z^*는 다음과 같다.

$$Z^{*}=\frac{\sqrt{n-3}}{2}\cdot\left(\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)-\ln\left(\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right)\right). \tag{2}$$

3.1. 정확 검정법

E-검정법의 기각역과 검정력을 구하기 위해 위의 확률을 계산하려면 복잡한 표본상관계수 R의 확률밀도함수를 여러번 적분하여야 하므로 대단히 어렵다. 그러므로 본 논문에서는 E-검정법의 기각역을 모의실험을 통하여 추정하고자 하며, 그 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘 $\mathbf{E}_1$ (E-검정법의 기각역 추정)

단계 1 : $N_2(0,0,1,1,\rho_0)$에서 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$을 생성한다.
단계 2 : (1)에서 주어진 Z값을 계산한다.
단계 3 : 단계 1과 단계 2를 큰 수 M번 반복하여 얻은 M개의 Z값을 크기 순으로 재배열하여 $Z_{(1)},Z_{(2)},\cdots,Z_{(M)}$을 구한다.
단계 4 : e_1, e_2의 추정값 $\hat{e}_1, \hat{e}_2$을 다음과 같이 계산한다.

$$\hat{e}_1=\frac{Z_{(M\cdot\alpha/2)}+Z_{(M\cdot\alpha/2+1)}}{2}, \qquad \hat{e}_2=\frac{Z_{(M\cdot(1-\alpha/2))}+Z_{(M\cdot(1-\alpha/2)+1)}}{2}.$$

위의 알고리즘 $\mathbf{E}_1$에서 계산된 $\hat{e}_1$과 $\hat{e}_2$를 이용하여 가설 H_0를 검정하기 위한 기각역은 $Z<\hat{e}_1$ 혹은 $Z>\hat{e}_2$이며, 반복 횟수 M이 커질 때 참 기각역 $Z<e_1$ 혹은 $Z>e_2$으로 수렴하게 된다. 그리고 실제 자료가 주어진 경우 단계 3에서 구한 Z의 분포를 이용하여 유의확률(p-value)을 계산할 수도 있다.

3.2. 붙스트랩 검정법

E-검정법은 표본 상관계수 R의 분포를 모의실험을 통하여 직접 근사시켜 구하였지만 B-검정법은 R의 분포를 직접 구하지 않고 주어진 자료로부터 붙스트랩 방법을 이용하여 구한 후 그 분포를 이용하여 기각역을 추정하고자 하며 그 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘 $\mathbf{B}_1$ (B-검정법의 기각역 추정)

단계 1 : $N_2(0,0,1,1,\rho_0)$에서 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$을 생성한다.
단계 2 : 복원추출을 이용하여 n개의 자료를 뽑아 Z값을 구한다.
단계 3 : 단계 2를 붙스트랩 반복 횟수(B)만큼 반복한다.
단계 4 : B개의 Z값을 크기 순으로 재배열하여 $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$를 아래와 같이 구한다.

$$\bar{b}_1=\frac{Z_{(B\cdot\alpha/2)}+Z_{(B\cdot\alpha/2+1)}}{2}, \qquad \bar{b}_2=\frac{Z_{(B\cdot(1-\alpha/2))}+Z_{(B\cdot(1-\alpha/2)+1)}}{2}.$$

단계 5 : 단계 1에서 단계 4를 큰 수 M번 반복하여 얻은 M개의 $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ 각각의 평균을 계산하여 e_1, e_2의 추정값 $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$을 구한다.

E-검정법에서와 같이 위의 알고리즘 $\mathbf{B}_1$에서 계산된 $\hat{b}_1$과 $\hat{b}_2$은 붙스트랩 반복 횟수 B와 반복 횟수 M이 커질 때 e_1과 e_2로 수렴하게 되며, 표본의 크기가 커질수록 정규분포의 기각역과 비슷한 값을 가지게 된다. 특히 $n=100$이고 $B=400$, $M=1000$을 사용하여 알고리즘 $\mathbf{B}_1$에서 계산된 $\hat{b}_1$과 $\hat{b}_2$을 표1에 수록하였다.

표 1. B-검정법의 기각역

	ρ_0	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
$\alpha=0.05$	$\hat{b}_1$	-1.9680	-1.9562	-1.9482	-1.9364	-1.9068	-1.8887
		(0.2169)	(0.2262)	(0.2213)	(0.2238)	(0.2219)	(0.2170)
	$\hat{b}_2$	1.8850	1.9050	1.9215	1.9460	1.9576	1.9758
		(0.2188)	(0.2237)	(0.2253)	(0.2203)	(0.2175)	(0.2170)
$\alpha=0.10$	$\hat{b}_1$	-1.6684	-1.6443	-1.6303	-1.6143	-1.5959	-1.5732
		(0.1783)	(0.1836)	(0.1847)	(0.1793)	(0.1944)	(0.1859)
	$\hat{b}_2$	1.5819	1.5886	1.6113	1.6372	1.6473	1.6548
		(0.1832)	(0.1840)	(0.1840)	(0.1866)	(0.1883)	(0.1846)

* (·): 표준편차

4. 모의실험

Fisher의 변환을 이용한 상관계수에 대한 근사적 검정법인 A-검정법의 실제성과 효율성을 E-검정 법 및 B-검정법과 비교하기 위하여 모의실험으로 각 검정법의 검정력을 계산하기 위한 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘 E_2 (E-검정법의 검정력 추정)

단계 1 : $N_2(0,0,1,1,\rho_1)$에서 $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \cdots, (X_n,Y_n)$을 생성한다.
단계 2 : (2)에서 주어진 Z^*를 계산한다.
단계 3 : 단계 1과 단계 2를 큰 수 M번 반복한다.
단계 4 : M개의 Z^*값 중에서 $\hat{e}_1 - \sqrt{n-3}/2\cdot\ln\big((1+\rho_1)(1-\rho_0)/(1-\rho_1)(1+\rho_0)\big)$ 보다 작거나 $\hat{e}_2 - \sqrt{n-3}/2\cdot\ln\big((1+\rho_1)(1-\rho_0)/(1-\rho_1)(1+\rho_0)\big)$보다 큰 값의 개수 m을 구하면 검정력 함수 $E(\rho_1)\approx m/M$는 주어진다.

알고리즘 B_2 (B-검정법의 검정력 추정)

단계 1 : $N_2(0,0,1,1,\rho_1)$에서 $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \cdots, (X_n,Y_n)$을 생성한다.
단계 2 : n개의 자료로부터 복원추출로 m개의 자료를 뽑고 Z^*값을 구한다.
단계 3 : 단계 2를 붙스트랩 반복(B) 횟수만큼 반복한다.
단계 4 : B개의 Z^*값 중에서 $\hat{b}_1 - \sqrt{n-3}/2\cdot\ln\big((1+\rho_1)(1-\rho_0)/(1-\rho_1)(1+\rho_0)\big)$ 보다 작거나 $\hat{b}_2 - \sqrt{n-3}/2\cdot\ln\big((1+\rho_1)(1-\rho_0)/(1-\rho_1)(1+\rho_0)\big)$보다 큰 값의 개수 m을 구하여 m/M을 계산한다. 단, $\hat{b}_1$과 $\hat{b}_2$은 알고리즘 $\mathbf{B}_1$에서 구한 값이다.
단계 5 : 단계 1에서 단계 4를 큰 수 M번 반복하여 얻은 M개의 비율을 평균하여 검정력 함수 $B(\rho_1)$을 계산한다.

위의 알고리즘에서 귀무가설 $H_0:\rho=0$의 ρ_0는 -0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8로 두고 유의수준(α)은 5%, 10%로 고정하였다. 그리고 E-검정법에서 $M=100{,}000$을 사용하였고 B-검정법에서는 $B=400$, $M=1000$을 사용하였다.

표본의 크기 n이 10, 20, 30, 50, 100일때 각 검정법들의 검정력을 비교하여 보면 전체적으로 각 검정력들이 비슷한 경향을 보임을 알 수 있으며, 특히 n=10인 경우에도(그림1 참조) Fisher의 A-검정법이 무난함을 알 수 있다. 그리고 n=30이상인 경우에는 세 검정법의 검정력들이 거의 차이가 없었으며, 특히 n=10, 30인 경우 세 검정법의 검정력들을 표2, 표3, 표4에 각각 수록하였다. 표에서 밑줄친 값은 실제 유의수준(observed significance level)을 나타내는 값으로 A-검정법과 E-검정법에서는 유의수준 α와 동일함을 알 수 있다. 또한 표본의 크기가 작은 경우에는 E-검정법의 검정력이 다른 검정법의 검정력에 비해 조금 더 크게 나타나고 있으며, 표본의 크기가 큰 경우에는 B-검정법의 검정력이 다른 검정법의 검정력보다 조금 더 효율적임을 알 수 있다. 그렇지만 Fisher의 Z-변환을 이용한 A-검정법도 대체적으로 무난하며 표본의 크기가 작은 경우에도 큰 무리가 없음을 알 수 있다.

참고문헌

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993), *An Introduction to the Bootstrap,* Chapman and Hall, New York.

Hall, P. and Martin, M. A. (1988), *On bootstrap resampling and iteration,* Biometrika, Vol. 75(4), pp.661-671.

Hall, P. and Wilson, S. R. (1991), *Two Guidelines for Bootstrap Hypothesis Testing,* Biometrics, Vol. 47, pp.757-762.

Rodgers, J. L. and Nicewander, W. A. (1988), *Thirteen ways to look at the correlation coefficient,* The American Statistician, Vol. 42, pp.59-66.

Rubinstein, R. (1981), *Simulation and the Monte Carlo Method,* New York, Wiley.

Young, G. A. (1988), *A note on bootstrapping the correlation coefficient,* Biometrika, Vol. 75(2), pp.370-373.

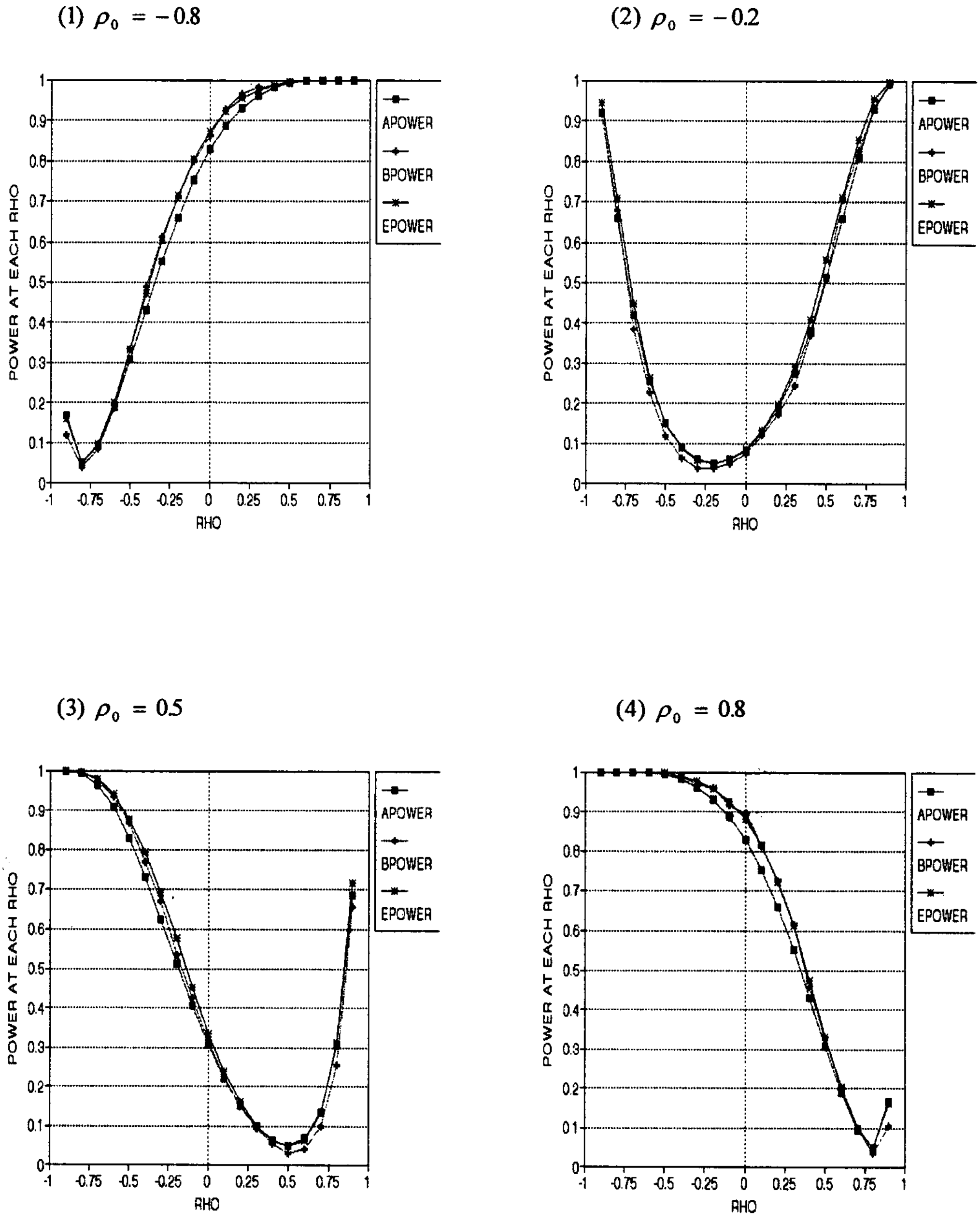

그림 1. A-검정법, E-검정법과 B-검정법의 검정력 (n=10, α=0.05)

표 2. A-검정법의 검정력

(1) n = 10

ρ_0	$\alpha=0.05$						$\alpha=0.10$					
ρ_1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
-0.9	.167	.685	.919	.993	1.000	1.000	.260	.787	.957	.997	1.000	1.000
-0.8	.050	.307	.659	.931	.992	1.000	.100	.425	.766	.964	.997	1.000
-0.7	.094	.134	.420	.808	.963	.999	.163	.217	.545	.882	.982	1.000
-0.6	.189	.067	.254	.659	.908	.997	.287	.124	.366	.766	.950	.999
-0.5	.307	.050	.150	.512	.828	.992	.425	.100	.239	.635	.896	.997
-0.4	.431	.063	.090	.381	.730	.981	.556	.119	.157	.505	.824	.991
-0.3	.551	.097	.059	.273	.623	.961	.671	.167	.114	.387	.735	.981
-0.2	.659	.150	.050	.189	.512	.931	.766	.239	.100	.287	.635	.964
-0.1	.752	.221	.058	.126	.405	.887	.840	.326	.112	.207	.530	.937
0.1	.887	.405	.126	.058	.221	.752	.937	.530	.207	.112	.326	.840
0.2	.931	.512	.189	.050	.150	.659	.964	.635	.287	.100	.239	.766
0.3	.961	.623	.273	.059	.097	.551	.981	.735	.387	.114	.167	.671
0.4	.981	.730	.381	.090	.063	.431	.991	.824	.505	.157	.119	.556
0.5	.992	.828	.512	.150	.050	.307	.997	.896	.635	.239	.100	.425
0.6	.997	.908	.659	.254	.067	.189	.999	.950	.766	.366	.124	.287
0.7	.999	.963	.808	.420	.134	.094	1.000	.982	.882	.545	.217	.163
0.8	1.000	.992	.931	.659	.307	.050	1.000	.997	.964	.766	.425	.100
0.9	1.000	1.000	.993	.919	.685	.167	1.000	1.000	.997	.957	.787	.260

(2) n = 30

ρ_0	$\alpha=0.05$						$\alpha=0.10$					
ρ_1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
-0.9	.493	.998	1.000	1.000	1.000	1.000	.617	.999	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.8	.050	.814	.996	1.000	1.000	1.000	.100	.887	.999	1.000	1.000	1.000
-0.7	.225	.379	.932	1.000	1.000	1.000	.331	.503	.965	1.000	1.000	1.000
-0.6	.558	.116	.722	.996	1.000	1.000	.678	.193	.817	.999	1.000	1.000
-0.5	.814	.050	.437	.974	1.000	1.000	.887	.100	.562	.988	1.000	1.000
-0.4	.939	.100	.209	.902	.999	1.000	.969	.171	.312	.946	1.000	1.000
-0.3	.984	.238	.086	.759	.994	1.000	.993	.347	.152	.845	.998	1.000
-0.2	.996	.437	.050	.558	.974	1.000	.999	.562	.100	.678	.988	1.000
-0.1	.999	.645	.083	.350	.922	1.000	1.000	.754	.148	.473	.958	1.000
0.1	1.000	.922	.350	.083	.641	.998	1.000	.877	.485	.149	.771	1.000
0.2	1.000	.974	.558	.050	.437	.996	1.000	.988	.678	.100	.562	.999
0.3	1.000	.994	.759	.086	.238	.984	1.000	.998	.845	.152	.347	.994
0.4	1.000	.999	.902	.209	.100	.939	1.000	1.000	.946	.312	.171	.974
0.5	1.000	1.000	.974	.437	.050	.814	1.000	1.000	.988	.562	.100	.892
0.6	1.000	1.000	.996	.722	.116	.558	1.000	1.000	.999	.817	.193	.689
0.7	1.000	1.000	1.000	.932	.379	.225	1.000	1.000	1.000	.965	.503	.330
0.8	1.000	1.000	1.000	.996	.814	.050	1.000	1.000	1.000	.999	.887	.050
0.9	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.493	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.835

표 3. E-검정법의 검정력

(1) $n = 10$

ρ_0	$\alpha=0.05$						$\alpha=0.10$					
ρ_1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
-0.9	.159	.725	.943	.996	1.000	1.000	.261	.826	.973	.999	1.000	1.000
-0.8	.050	.308	.708	.956	.996	1.000	.100	.450	.814	.979	.999	1.000
-0.7	.096	.131	.446	.853	.980	1.000	.171	.220	.598	.920	.992	1.000
-0.6	.199	.062	.262	.718	.941	.999	.311	.123	.395	.820	.972	1.000
-0.5	.332	.050	.148	.563	.875	.997	.468	.100	.249	.701	.932	.999
-0.4	.472	.064	.087	.417	.792	.989	.609	.121	.159	.563	.875	.996
-0.3	.602	.101	.057	.288	.691	.977	.726	.174	.113	.430	.794	.989
-0.2	.714	.158	.050	.102	.577	.957	.818	.255	.100	.310	.703	.978
-0.1	.804	.237	.059	.129	.452	.926	.884	.352	.114	.219	.597	.962
0.1	.921	.445	.130	.058	.237	.815	.959	.379	.217	.113	.356	.890
0.2	.955	.563	.198	.050	.161	.721	.977	.691	.307	.100	.258	.829
0.3	.975	.681	.291	.058	.100	.611	.989	.790	.418	.108	.179	.733
0.4	.988	.789	.410	.089	.063	.474	.995	.870	.550	.150	.121	.615
0.5	.995	.875	.555	.153	.050	.333	.998	.931	.688	.240	.100	.468
0.6	.998	.940	.712	.265	.064	.203	.999	.969	.816	.390	.126	.310
0.7	1.000	.978	.853	.444	.131	.098	1.000	.989	.917	.586	.226	.176
0.8	1.000	.995	.953	.700	.313	.050	1.000	.998	.977	.810	.451	.100
0.9	1.000	1.000	.996	.941	.715	.162	1.000	1.000	.998	.971	.825	.266

(2) $n = 30$

ρ_0	$\alpha=0.05$						$\alpha=0.10$					
ρ_1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
-0.9	.501	.998	1.000	1.000	1.000	1.000	.628	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.8	.050	.827	.997	1.000	1.000	1.000	.100	.896	.999	1.000	1.000	1.000
-0.7	.229	.395	.942	1.000	1.000	1.000	.338	.520	.968	1.000	1.000	1.000
-0.6	.571	.116	.741	.998	1.000	1.000	.691	.193	.833	.999	1.000	1.000
-0.5	.827	.050	.453	.979	1.000	1.000	.896	.100	.582	.989	1.000	1.000
-0.4	.946	.101	.212	.914	.999	1.000	.972	.173	.321	.954	1.000	1.000
-0.3	.986	.244	.087	.782	.996	1.000	.994	.355	.153	.862	.998	1.000
-0.2	.997	.450	.050	.578	.977	1.000	.999	.576	.100	.698	.990	1.000
-0.1	1.000	.662	.084	.364	.931	1.000	1.000	.770	.151	.491	.963	1.000
0.1	1.000	.932	.361	.084	.661	1.000	1.000	.964	.487	.149	.771	1.000
0.2	1.000	.978	.575	.050	.449	.998	1.000	.990	.697	.100	.581	.999
0.3	1.000	.995	.775	.087	.241	.986	1.000	.998	.862	.156	.351	.993
0.4	1.000	.999	.914	.215	.097	.944	1.000	1.000	.954	.321	.176	.974
0.5	1.000	1.000	.978	.449	.050	.810	1.000	1.000	.990	.578	.100	.892
0.6	1.000	1.000	.997	.738	.119	.564	1.000	1.000	.999	.833	.198	.689
0.7	1.000	1.000	1.000	.939	.390	.220	1.000	1.000	1.000	.970	.517	.330
0.8	1.000	1.000	1.000	.997	.827	.050	1.000	1.000	1.000	.999	.895	.100
0.9	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.502	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.628

표 4. B-검정법의 검정력

(1) $n = 10$

ρ_0 / ρ_1	$\alpha=0.05$						$\alpha=0.10$					
	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
-0.9	.116	.654	.916	.993	1.000	1.000	.221	.809	.969	.996	1.000	1.000
-0.8	.039	.264	.676	.942	.995	1.000	.087	.441	.815	.982	.999	1.000
-0.7	.085	.112	.384	.827	.977	1.000	.157	.194	.565	.925	.990	.999
-0.6	.187	.043	.227	.678	.932	.997	.306	.118	.367	.809	.974	1.000
-0.5	.333	.047	.117	.549	.866	.993	.453	.089	.211	.671	.935	.997
-0.4	.487	.044	.063	.354	.768	.986	.610	.130	.164	.559	.868	.995
-0.3	.612	.093	.038	.260	.669	.969	.719	.171	.097	.421	.773	.990
-0.2	.710	.131	.037	.175	.536	.959	.799	.267	.093	.276	.671	.976
-0.1	.797	.218	.048	.126	.424	.917	.867	.357	.102	.211	.574	.958
0.1	.928	.406	.120	.048	.224	.811	.968	.566	.193	.109	.332	.882
0.2	.966	.524	.172	.032	.249	.723	.976	.696	.301	.081	.234	.813
0.3	.982	.650	.243	.041	.092	.614	.994	.788	.420	.097	.169	.719
0.4	.984	.767	.371	.065	.055	.457	.990	.868	.524	.136	.114	.619
0.5	.995	.857	.506	.101	.031	.327	1.000	.927	.704	.219	.091	.476
0.6	.999	.920	.705	.191	.041	.203	.999	.972	.810	.371	.117	.318
0.7	1.000	.964	.826	.369	.097	.099	1.000	.989	.905	.580	.181	.158
0.8	1.000	.995	.933	.626	.256	.035	1.000	.998	.976	.781	.395	.086
0.9	1.000	1.000	.990	.904	.295	.103	1.000	1.000	.998	.967	.788	.219

(2) $n = 30$

ρ_0 / ρ_1	$\alpha=0.05$						$\alpha=0.10$					
	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8
-0.9	.490	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.635	.999	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.8	.051	.830	.999	1.000	1.000	1.000	.105	.918	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.7	.228	.400	.951	1.000	1.000	1.000	.363	.503	.971	1.000	1.000	1.000
-0.6	.586	.121	.762	.996	1.000	1.000	.736	.221	.836	1.000	1.000	1.000
-0.5	.826	.053	.477	.987	1.000	1.000	.921	.103	.570	.989	1.000	1.000
-0.4	.947	.109	.214	.911	.998	1.000	.983	.194	.324	.963	.999	1.000
-0.3	.982	.270	.119	.777	.998	1.000	.997	.394	.164	.882	.997	1.000
-0.2	.995	.455	.067	.606	.983	1.000	1.000	.589	.102	.703	.990	1.000
-0.1	1.000	.709	.090	.417	.936	1.000	1.000	.780	.153	.509	.965	1.000
0.1	1.000	.931	.383	.097	.698	1.000	1.000	.968	.489	.179	.775	1.000
0.2	1.000	.979	.572	.055	.467	.999	1.000	.992	.709	.113	.605	.999
0.3	1.000	.996	.792	.113	.243	.992	1.000	.998	.874	.173	.357	.996
0.4	1.000	.999	.921	.255	.113	.952	1.000	.999	.960	.350	.176	.981
0.5	1.000	1.000	.981	.485	.045	.836	1.000	1.000	.996	.612	.116	.912
0.6	1.000	1.000	.993	.751	.136	.594	1.000	1.000	1.000	.827	.209	.664
0.7	1.000	1.000	1.000	.950	.378	.242	1.000	1.000	1.000	.971	.545	.351
0.8	1.000	1.000	1.000	.995	.851	.050	1.000	1.000	1.000	1.000	.902	.128
0.9	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.520	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.649

A Comparative Study on Tests of Correlation

Hyun-Joo Cho · Myung-Unn Song · Dong-Myung Jeong · Jae-Kee Song

Abstract. In this paper, we studied about several methods of testing hypothesis of correlation, specially Approximate method, Empirical method and Bootstrap method. The Approximate method is based on the Fisher's Z-transformation and the Empirical and Bootstrap methods approximate the distribution of the sample correlation coefficient by Monte Carlo simulation and Bootstrap technique, respectively. In order to compare how good these tests are, we computed powers under various alternatives. Consequently, we see that the Approximate test performs very well even if in small sample and all tests have almost the same power in large sample.

keywords : Bivariate random variable, Correlation, Bootstrap.